Негативные симметрии интегрируемых уравнений

В.Э. Адлер (ИТФ)

60 лет Институту теоретической физики им. Л.Д. Ландау

30 сентября – 5 октября 2024, Черноголовка

Введение

Пусть дано интегрируемое эволюционное уравнение (или система)

$$u_t = a(u, u_x, u_{xx}, \dots),$$

высшие симметрии которой строятся оператором рекурсии

$$u_{t_n} = R^n(u_{t_0}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь u_{t_0} — затравочная симметрия, например $u_{t_0} = u_x$, $u_{t_0} = u_t$ или просто $u_{t_0} = 0$.

Пример R (для КдФ): $R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$, где $D = \partial/\partial_x$.

Тогда можно определить потоки

$$u_{t_{-n}} = R^{-n}(u_{t_0}), \tag{1}$$

которые обычно и называют негативными. Недостаток такого понимания в том, что это сильно нелокальные уравнения с которыми тяжело работать (хотя и возможно).

Мы будем определять НС немного по другому:

$$u_z = (R - \alpha)^{-1}(u_{t_0}), \tag{2}$$

где α произвольный параметр. Это более простые “гиперболические” уравнения.

Понятно, что такой поток является производящей функцией как для высших симметрий, так и для симметрий вида (1):

$$\begin{aligned} u_z = (R - \alpha)^{-1}(u_{t_0}) &= -\frac{1}{\alpha}\left(u_{t_0} + \frac{1}{\alpha}u_{t_1} + \frac{1}{\alpha^2}u_{t_2} + \dots\right) \\ &= u_{t_{-1}} + \alpha u_{t_{-2}} + \alpha^2 u_{t_{-3}} + \dots \end{aligned}$$

То есть, это просто некоторый альтернативный «базис» в бесконечномерной иерархии симметрий, что и определяет значение этих уравнений.

Уравнения (2) часто интересны и сами по себе. Например, уравнения синус-Гордона, Камассы–Холма, Максвелла–Блоха, Полмайера–Лунда–Редже — все имеют такое происхождение.

- Для уравнений типа КдФ

$$u_t = u_{xxx} + a(u, u_x, u_{xx})$$

НС имеют сравнительно простой вид

$$u_{xxz} = f(u, u_x, u_{xx}, u_z, u_{xz}; \alpha), \tag{3}$$

иногда они допускают понижение порядка до уравнений типа синус-Гордона (без параметра)

$$u_{xz} = g(u, u_x, u_z).$$

- Для систем типа НУШ:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a(u, v, u_x, v_x), \\ -v_t = v_{xx} + b(u, v, u_x, v_x) \end{cases} \longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_{xz} = f(u, v, u_x, v_x, u_z, v_z; \alpha), \\ v_{xz} = g(u, v, u_x, v_x, u_z, v_z; \alpha). \end{cases}$$

- Для уравнений типа Буссинеска вид НС усложняется, так как усложняется R.

- Интересны приложения к построению редукций Пенлеве-типа.

Исходное уравнение может иметь классические симметрии (например, растяжение), которые порождают дополнительную алгебру симметрий:

$$u_{t_0} \xrightarrow{R} u_{t_1} \xrightarrow{R} u_{t_2} \xrightarrow{R} \dots, \qquad u_{\tau_0} \xrightarrow{R} u_{\tau_1} \xrightarrow{R} u_{\tau_2} \xrightarrow{R} \dots$$

Потоки u_{τ_i} нелокальны, неавтономны и не коммутируют с u_{t_j} и друг с другом.

Стационарное уравнение для любой симметрии определяет некоторую конечномерную редукцию в виде ОДУ

$$A(R)(u_{t_0}) + B(R)(u_{\tau_0}) = 0,$$

где A и B — многочлены (с постоянными коэффициентами) от оператора рекурсии.

Если $B = 0$, то это уравнения Новикова, интегрируемые по Лиувиллю (конечнозонные решения).

Если $B \neq 0$, то это “струнные” уравнения типа Пенлеве. Чем выше $\deg B = n$, тем они сложнее. Однако, можно перейти к уравнению

$$(B^{-1}A)(R)(u_{t_0}) + u_{\tau_0} = 0.$$

В случае общего положения, разложение на простые дроби даёт стационар для суммы высших симметрий, негативных и классической:

$$\widetilde{A}(R)(u_{t_0}) + \sum_{i=1}^{n} c_i (R - \alpha_i)^{-1}(u_{t_0}) + u_{\tau_0} = 0.$$

Все нелокальности перемещаются в негативные симметрии и записываются единообразно при любом n.

- A.Yu. Orlov, S. Rauch-Wojciechowski. Dressing method, Darboux transformation and generalized restricted flows for the KdV hierarchy. *Physica D* **69:1–2** (1993) 77–84.
- VA, M.P. Kolesnikov. Non-autonomous reductions of the KdV equation and multi-component analogs of the Painlevé equations P_{34} and P_3. *J. Math. Phys.* **64** (2023) 101505.
- VA. Negative flows and non-autonomous reductions of the Volterra lattice. *Open Comm. in Nonl. Math. Phys., Special Issue in Memory of D. Levi* (2024) 11597.

В докладе будут обсуждаться следующие свойства, на наиболее простом примере НС для уравнений типа КдФ, вида (3).

- 3D-совместность НС. Потоки, отвечающие разным параметрам α_1 и α_2, должны коммутировать — это эквивалентно коммутативности высших симметрий. Так как НС не эволюционны, определение совместности необходимо уточнить.
- Связь с преобразованиями Бэклунда. Оказывается, что НС можно выводить не по оператору рекурсии, а из пары совместных цепочек — типа одевающей цепочки и цепочки типа Вольтерры. В результате устанавливается связь со свойством 3D-совместности уравнений на квадратной решётке.
- В классе уравнений типа КдФ наиболее сложный пример — уравнение Кричевера–Новикова. Для него оператор R имеет порядок 4 и приводит к более сложной НС. Её, тем не менее, можно редуцировать к уравнению типа (3). Цепочки здесь оказываются удобнее, чем R.

- VA. Negative flows for several integrable models. *J. Math. Phys.* **65** (2024) 023502.
- VA. 3D consistency of negative flows (2024) arXiv.2407.09813

Свойство 3D-совместности

Гиперболические уравнения. Пример Ферапонтова

Следующая тройка 3D-совместна:

$$u_{xy} = \sinh u\sqrt{1+u_x^2}, \qquad u_{yz} = \cosh u\sqrt{1+u_z^2},$$
$$u_{xz} = \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2}.$$

Перекрёстные производные для каждой пары уравнений совпадают при условии, что выполняется третье. Например, для первых двух:

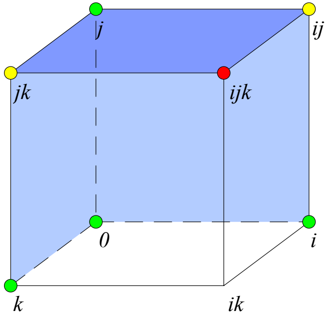
$$(u_{xy})_z - (u_{xz})_y = (u_{xz} - \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2})\left(\frac{u_z\cosh u}{\sqrt{1+u_z^2}} - \frac{u_x\sinh u}{\sqrt{1+u_x^2}}\right),$$

что равно 0 в силу третьего уравнения. То же и для других пар: каждое уравнение восстанавливается по двум другим, если в равенстве для перекрёстных производных отбросить множитель с младшими производными.

Гиперболические уравнения служат симметриями для эволюционных и являются вырожденным случаем НС, без параметра.

- E.V. Ferapontov. *J. Phys. A* **30:19** (1997) 6861–6878.
- A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. *Theor. Math. Phys.* **166:1** (2011) 43–75.

Квад-уравнения



Аналогично, для дискретных гиперболических уравнений

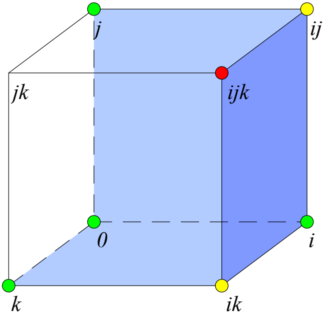
$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки, как совместность вокруг куба.

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

- V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

Квад-уравнения



Аналогично, для дискретных гиперболических уравнений

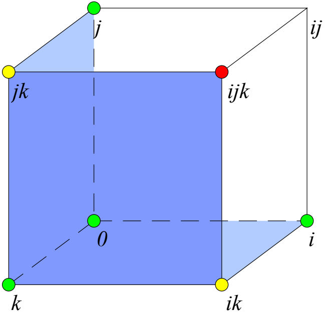
$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки, как совместность вокруг куба.

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

- V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

Квад-уравнения



Аналогично, для дискретных гиперболических уравнений

$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки, как совместность вокруг куба.

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

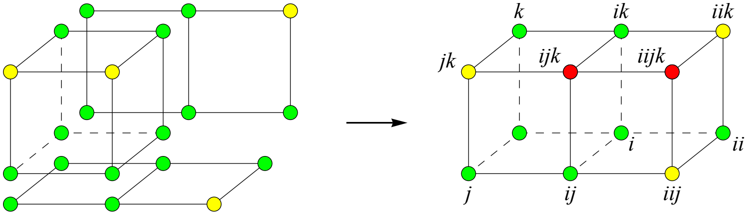
- V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

Дискретным аналогом наших уравнений $u_{xxz} = \dots$ служат уравнения на паре соседних квадратов

$$u_{iij} = f(u, u_i, u_{ii}, u_j, u_{ij}), \qquad u_{iik} = g(u, u_i, u_{ii}, u_k, u_{ik}).$$

Для них 3D-совместная тройка требует включения дополнительного уравнения вида

$$\begin{pmatrix} u_{jk} \\ u_{ijk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}(u, u_i, u_j, u_{ij}, u_k, u_{ik}).$$



Естественно ожидать чего-то подобного и в непрерывном случае.

- V.E. Adler, V.V. Postnikov. *J. Phys. A: Math. Theor.* **47:4** (2014) 045206.

3D-совместность негативных симметрий

НС для КдФ содержит параметр α. Разным α отвечают разные потоки.

Ясно, что они *должны* коммутировать, если высшие симметрии коммутативны, так как НС интерпретируется как производящий ряд по α.

Наоборот, если НС с разными α коммутируют, то это доказывает коммутативность высших симметрий.

Возникает вопрос, как проверить коммутативность НС независимо, не используя свойства оператора рекурсии и высших симметрий. Забудем вообще про высшие симметрии, пусть есть уравнения вида

$$u_{xxz_i} = F_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}), \quad i \in I. \tag{4}$$

Требуется определить понятие совместности для набора таких уравнений.

Определение. Уравнения

$$u_{xxz_i} = F_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}), \quad i \in I, \tag{5}$$

3D-совместны, если их можно дополнить уравнениями

$$u_{z_i z_j} = G_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}), \quad i \neq j, \tag{6}$$

такими, что $G_{ij} = G_{ji}$ и, для попарно различных $i, j, k \in I$,

$$D_{z_i}(F_j) = D_{z_j}(F_i) = D_x^2(G_{ij}), \tag{7}$$

$$D_{z_i}(G_{jk}) = D_{z_j}(G_{ik}) = D_{z_k}(G_{ij}), \tag{8}$$

тождественно в силу (5), (6) и дифференциальных следствий $u_{xxxz_i} = D_x(F_i)$, $u_{xz_iz_j} = D_x(G_{ij})$.

Отсюда следует совпадение *любых* перекрёстных производных, что гарантирует существование локальных решений общего вида, удовлетворяющих одновременно всему набору уравнений.

Конструктивно ли это определение? Уравнения (6) заранее не известны, но их можно восстановить прямым вычислением — если они существуют.

Первый шаг:

$$0 = D_{z_i}(F_j) - D_{z_j}(F_i) = P_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}, u_{xz_iz_j}),$$

где в правой части производные типа u_{xxxz} и u_{xxz} исключены из (5). Разрешая это уравнение относительно $u_{xz_iz_j}$, получаем

$$u_{xz_iz_j} = H_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}). \tag{9}$$

Это должно быть следствием (6), чтобы совместность имела место.

Второй шаг:

$$0 = D_x(H_{ij}) - D_{z_j}(F_i) = Q_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}),$$

где исключаются u_{xxxz}, u_{xxz} и $u_{xz_iz_j}$. Разрешая относительно $u_{z_iz_j}$, получаем искомое уравнение (6).

После этого остаётся только проверить равенства $D_x(G_{ij}) = H_{ij}$ и $D_{z_i}(G_{jk}) = D_{z_j}(G_{ik})$.

Простейший пример: pot-KdV

НС для потенциального КдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2, \tag{10}$$

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \gamma = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) известно как associated Camassa–Holm equation.

Совместность уравнений 10 и (11) означает следующее: пусть F — левая часть (11), тогда

$$D_t(F) = A(F),$$

с оператором $A = D^3 - 3\frac{v_{xz}}{v_z}D^2 + 3\Big(\frac{v_{xz}^2}{v_z^2} - 4v_x\Big)D$. Это можно принять за формальное определение НС для эволюционного уравнения, не апеллирующее к оператору рекурсии.

- J. Schiff. *Physica D* **121:1–2** (1998) 24–43.
- A.N.W. Hone. *J. Phys. A* **32:27** (1999) L307–314.

Проверка 3D-совместности

Следующие уравнения совместны:

$$v_{xxz_i} = \frac{v_{xz_i}^2 - \gamma_i}{2v_{z_i}} + 2(2v_x - \alpha_i)v_{z_i}, \tag{12}$$

$$v_{z_iz_j} = \frac{v_{z_i}v_{xz_j} - v_{z_j}v_{xz_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j. \tag{13}$$

Продемонстрируем вывод дополнительных уравнений (13). На первом шаге, равенство $(v_{xxz_i})_{z_j} = (v_{xxz_j})_{z_i}$ даёт

$$\begin{aligned} v_{xz_iz_j} = &\left(2(\alpha_i - \alpha_j)v_{z_i}v_{z_j} + \frac{\gamma_j v_{z_i}}{2v_{z_j}} - \frac{\gamma_i v_{z_j}}{2v_{z_i}}\right)\frac{v_{z_iz_j}}{v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j}} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{v_{xz_i}}{v_{z_i}} + \frac{v_{xz_j}}{v_{z_j}}\right)v_{z_iz_j} + 4v_{z_i}v_{z_j}. \end{aligned} \tag{14}$$

На втором шаге, условие $(v_{xz_iz_j})_x = (v_{xxz_i})_{z_j}$ приводит к факторизованному уравнению

$$((\alpha_i-\alpha_j)v_{z_iz_j} + v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})\times \\ \times \frac{(v_{z_i}^2 v_{xz_j}^2 - v_{z_j}^2 v_{xz_i}^2 - 4(\alpha_i-\alpha_j)v_{z_i}^2 v_{z_j}^2 + \gamma_i v_{z_j}^2 - \gamma_j v_{z_i}^2)}{(v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})^2} = 0.$$

Приравнивая первый множитель нулю, получаем (13).

Далее, проверяем, что равенство $(v_{z_iz_j})_x = v_{xz_iz_j}$ выполняется тождественно. Дифференцирование (13) по x даёт

$$v_{xz_iz_j} = 2v_{z_i}v_{z_j} + \frac{1}{2(\alpha_i-\alpha_j)}\left(\frac{v_{z_i}}{v_{z_j}}(v_{xz_j}^2-\gamma_j) - \frac{v_{z_j}}{v_{z_i}}(v_{xz_i}^2-\gamma_i)\right). \qquad (15)$$

Это совпадает с (14) при замене $v_{z_iz_j}$ в силу (13), то есть (14) является следствием (13) и (12).

Наконец, на заключительном этапе проверяем выполнение тождеств (8), то есть $(v_{z_iz_j})_{z_k} = (v_{z_iz_k})_{z_j}$, что завершает доказательство 3D-совместности.

Замечание. Уравнение (13)

$$v_{z_i z_j} = \frac{v_{z_i} v_{x z_j} - v_{z_j} v_{x z_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

— это самостоятельное 3D интегрируемое уравнение, связанное с универсальной гидродинамической иерархией Алонсо–Шабата. Для него выполняется тождество

$$(v_{z_i z_j})_{z_k} = (v_{z_i z_k})_{z_j}.$$

Уравнения (12) при этом не нужны, они лишь определяют 2D редукцию этого 3D-уравнения, сохраняющую свойство совместности.

Однако, в общем случае, в определении 3D-совместности не требуется, чтобы тождества (8) выполнялись без учёта (5).

- L. Martínez Alonso, A.B. Shabat. *Phys. Lett. A* **300:1** (2002) 58–64; *Theor. Math. Phys.* **140:2** (2004) 1073–1085.
- VA, A.B. Shabat. *Theor. Math. Phys.* ***153:1*** (2007) 1373–1387.

Вывод негативной симметрии

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \qquad \text{KdV}$$

Оператор рекурсии ($D = \partial_x$):

$$R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$$

Иерархия КдФ:

$$\begin{aligned}
u_{t_0} &= u_x && \text{сдвиг по } x\\
u_{t_1} &= R(u_x) = (u_{xx} - 3u^2)_x && \text{КдФ}\\
u_{t_2} &= R^2(u_x) = (u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3)_x && \text{высшая симметрия}
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Негативная симметрия ($\alpha \to -4\alpha$):

$$(R + 4\alpha)(u_z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 4(u - \alpha) - 2u_x D^{-1})(u_z) = 0.$$

Чтобы проинтегрировать, введем новую переменную q:

$$u_z = q_x, \quad q_{xxx} - 4(u-\alpha)q_x - 2u_x q = 0.$$

Есть интегрирующий множитель $2q$. Также можно определить правило дифференцирования q по t, чтобы была совместность с КдФ. В результате, приходим к такой записи НС (γ — постоянная интегрирования):

$$u_z = q_x, \tag{16}$$

$$\begin{cases} 2qq_{xx} - q_x^2 - 4(u-\alpha)q^2 + 4\gamma = 0, \\ q_t = q_{xxx} - 6uq_x. \end{cases} \tag{17}$$

Введение потенциала приводит к (11):

$$2v_x = u, \quad 2v_z = q \quad \Rightarrow \quad 2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \gamma = 0.$$

Уравнения (17) совместны в силу KdV, то есть, определяют расширение КдФ на переменную q.

Уравнение (16) определяет поток на этом расширенном пространстве и можно проверить, что $[D_z, D_t] = 0$.

- Фактически q — это резольвента оператора Штурма–Лиувилля $L=-D_x^2+u$, причем α играет роль спектрального параметра. Также, q можно представить в виде $q=\psi\varphi$, где $L\psi=\alpha\psi$, $L\varphi=\alpha\varphi$ (squared eigenfunction symmetry).

- Из (17) следует, что q удовлетворяет (вырожденному) уравнению Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса

$$q_t=q_{xxx}-\frac{3q_xq_{xx}}{q}+\frac{3q_x(q_x^2-4\gamma)}{2q^2}-6\alpha q_x.$$

- В принципе, можно работать и в исходных переменных u, исключив q из (17), (16):

$$4u_z=D_x\left(\frac{u_{xz}+\sqrt{u_{xz}^2-4(u-\alpha)(u_z^2-4\gamma)}}{u-\alpha}\right)\quad\Rightarrow$$

$$u_{xxz}=\Phi(u,u_x,u_z,u_{xz};\alpha,\gamma).$$

- I.M. Gelfand, L.A. Dikii. *Russian Math. Surveys* **30:5** (1975) 77–113.
- F. Calogero, A. Degasperis. *J. Math. Phys.* **22** (1981) 23–31.
- A.S. Fokas. *J. Math. Phys.* **21:6** (1980) 1318–1325.

Производящая функция для высших симметрий

Так как

$$u_z = q_x = (R-\mu)^{-1}(u_x) = -\mu^{-1}u_{t_0} - \mu^{-2}u_{t_1} - \dots$$

$(\mu = -4\alpha)$, то имеет место следующее свойство.

Симметрии КдФ имеют вид $u_{t_i} = h^{i+1}_x$, где h_i — коэффициенты формального ряда

$$q = h^0 + \frac{h^1}{\mu} + \frac{h^2}{\mu^2} + \dots, \quad h^0 = -\frac{1}{2},$$

удовлетворяющего уравнению

$$2qq_{xx} - q_x^2 - (4u+\mu)q^2 + \frac{\mu}{4} = 0,$$

что равносильно рекуррентным соотношениям

$$h^{i+1} = \sum_{s=0}^{i}\big(h^s_x h^{i-s}_x - 2h^s h^{i-s}_{xx} + 4uh^s h^{i-s}\big) + \sum_{s=1}^{i} h^s h^{i+1-s}.$$

Близкие примеры: Schwarzian-KdV и уравнение Дима

Schwarzian-KdV

Оператор рекурсии:

$$R = D_x^2 - \frac{2u_{xx}}{u_x}D_x + \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} - u_x D_x^{-1}\cdot\left(\frac{u_{xxxx}}{u_x^2} - \frac{4u_{xx}u_{xxx}}{u_x^3} + \frac{3u_{xx}^3}{u_x^4}\right)$$

Симметрии:

$$u_{t_0} = u_x, \quad u_t = R(u_x) = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x}, \ \dots$$

Негативные симметрии $R(u_{z_i}) = 4\alpha_i u_{z_i}$:

$$u_{xxz_i} = \frac{u_{xz_i}^2 - \gamma_i u_x^2}{2u_{z_i}} + \frac{u_{xx}u_{xz_i}}{u_x} + 2\alpha_i u_{z_i} \tag{18}$$

3D-совместность: дополнительные уравнения

$$u_{z_i z_j} = \frac{\alpha_i u_{z_i} u_{xz_j} - \alpha_j u_{z_j} u_{xz_i}}{(\alpha_i - \alpha_j)u_x}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Уравнение КдФ не имеет гиперболических симметрий, то есть, простейшая НС для него имеет вид $u_{xxz} = \dots$

В отличие от него, Schwarzian-KdV совместно с несколькими гиперболическими уравнениями:

$$u_{xz} = 2u_x\sqrt{u_z},$$
$$u_{xz} = 2uu_x,$$
$$u_{xz} = \frac{2uu_xu_z}{u^2+1}.$$

Из них первое определяет специальные решения (18) при $\alpha = \gamma = 0$, а два других имеют какое-то другое происхождение.

Уравнение Дима

$$u_t = u^3 u_{xxx}$$

Оператор рекурсии:

$$R = u^2 D_x^2 - uu_x D_x + uu_{xx} + u^3 u_{xxx} D_x^{-1} u^{-2} = u^3 D_x^3 u D_x^{-1} u^{-2}$$

Негативная симметрия $(R-\alpha)(u_z) = 0$:

$$u_z = u^2 q_x, \quad u^3 (uq)_{xxx} - \alpha u^2 q_x = 0$$

Потенциальная версия (замена $x \leftrightarrow v$ даёт Schwarzian KdV):

$$v_t = -\frac{v_{xxx}}{v_x^3} + \frac{3v_{xx}^2}{2v_x^4}, \qquad u = -\frac{1}{v_x}, \quad q = v_z.$$

Совместные НС:

$$2\frac{v_{z_i}}{v_x}\left(\frac{v_{z_i}}{v_x}\right)_{xx} = \left(\frac{v_{z_i}}{v_x}\right)_x^2 + \alpha_i v_{z_i}^2 + \gamma_i$$

$$v_{z_i z_j} = \frac{\alpha_i v_{z_j} v_{x z_i} - \alpha_j v_{z_i} v_{x z_j}}{(\alpha_i - \alpha_j) v_x}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

НС как ассоциированные уравнения для цепочек

Вывод НС из цепочек

Оператор рекурсии — не единственный метод построения НС. Другой способ (для уравнений типа КдФ) связан с совместными парами цепочек вида

$$u_{n+1,x}=a(u_{n,x},u_n,u_{n+1};\alpha),\qquad u_{n,z}=b(u_{n-1},u_n,u_{n+1}). \tag{19}$$

Дифференцируя второе уравнение по x и заменяя $u_{n\pm1,x}$ в силу первого, получаем

$$u_{n,xz}=c(u_{n-1},u_n,u_{n+1},u_{n,x}).$$

Отсюда выражается $u_{n+1}=\varphi(u,u_x,u_z,u_{xz})$, где $u=u_n$, и подстановка в первое уравнение (19) даёт то, что нужно:

$$u_{xxz}=f(u,u_x,u_{xx},u_z,u_{xz};\alpha).$$

Первые примеры таких пар появились в работах Ямилова.

- R.I. Yamilov. *Theor. Math. Phys.* **85:3** (1990) 1269–1275.

Иначе говоря, НС — это фактор-уравнение

$$\text{negative flow}(x,z;\alpha) = \frac{\text{Volterra chain}(n,z)}{\text{dressing chain}(n,x;\alpha)}.$$

Простейший пример:

Одевающая цепочка и цепочка типа Вольтерры

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = (v_{n+1} - v_n)^2 + \alpha, \qquad v_{n,z} = \frac{\beta}{v_{n+1} - v_{n-1}}$$

совместны; в силу этих уравнений переменная $v = v_n$ удовлетворяет НС для pot-KdV (11) с $\gamma = \beta^2$:

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \beta^2 = 0.$$

Иначе говоря, НС — это фактор-уравнение

$$\text{negative flow}(x,z;\alpha)=\frac{\text{Volterra chain}(\cancel{n},z)}{\text{dressing chain}(\cancel{n},x;\alpha)}.$$

Простейший пример:

Одевающая цепочка и цепочка типа Вольтерры

$$v_{n+1,x}+v_{n,x}=(v_{n+1}-v_n)^2+\alpha,\qquad v_{n,z}=\frac{\beta}{v_{n+1}-v_{n-1}}$$

совместны; в силу этих уравнений переменная $v=v_n$ удовлетворяет НС для pot-KdV (11) с $\gamma=\beta^2$:

$$2v_zv_{xxz}-v_{xz}^2-4(2v_x-\alpha)v_z^2+\beta^2=0.$$

Отсюда становится понятно, что 3D-совместность негативных симметрий тесно связана с 3D-совместностью квад-уравнений, с которой мы начинали. Квад-уравнения определяют принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Бэклунда, то есть, для одевающих цепочек. Все уравнения распространяются на многомерную решетку.

Например, для одевающей цепочки возникает уравнение

$$(v - T_iT_j(v))(T_i(v) - T_j(v)) = \alpha_i - \alpha_j,$$

где $T_i : v(\dots, n_i, \dots) \mapsto v(\dots, n_i + 1, \dots)$. Эти уравнения определены на каждом 2D сечении многомерной решетки, а каждой переменной n_i отвечает своя пара цепочек

$$T_i(v_x) + v_x = (T_i(v) - v)^2 + \alpha_i, \quad v_{z_i} = \frac{\beta_i}{T_i(v) - T_i^{-1}(v)}.$$

В результате, с каждым координатным направлением n_i ассоциирована своя НС с переменной ∂_{z_i} и параметрами α_i, β_i, а их совместность является следствием совместности цепочек типа Вольтерры на квадратной решетке.

Совместность цепочек типа Вольтерры с квад-уравнениями исследовалась во многих работах. Однако, их совместность с одевающими цепочками и интерпретация как НС не изучалась.

- F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. *Phys. Lett. A* **153:6–7** (1991) 337–344.
- F.W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta. *Studies in Appl. Math.* **106:3** (2001) 261–314.
- A. Tongas, D. Tsoubelis, P. Xenitidis. *Phys. Lett. A* **284:6** (2001) 266–274.
- P.D. Xenitidis. *Proc. R. Soc. A* **474** (2018) 20180340.
- R.N. Garifullin, I.T. Habibullin, R.I. Yamilov. *J. Phys. A: Math. Theor.* **48:23** (2015) 235201.

Уравнение Кричевера–Новикова

Уравнение Кричевера–Новикова имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - r(u))}{2u_x}, \quad r = 4u^3 - g_2 u - g_3.$$

Оператор рекурсии имеет порядок 4 и перепрыгивает через симметрии, поэтому общая формула приводит к очень сложной НС более высокого порядка по производным.
Ее можно получить также, стартуя с оператора рекурсии для одной из систем Дринфельда–Соколова, для которой КН служит редукцией.
Однако, порядок удается понизить и результат может быть записан в следующем виде:

$$2u_z = \frac{u_x^2 q_x^2 - r(u)q^2}{(u-\alpha)q} - \frac{u-\alpha}{q}, \tag{20}$$

где q — нелокальная переменная, определяемая уравнениями

- VA. *J. Math. Phys.* **65** (2024) 023502.

$$2qq_{xx} - q_x^2 + 2qq_x\left(\frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{u_x}{u-\alpha}\right) - q^2\left(\frac{r(u)}{u_x^2} - \frac{2\beta}{u-\alpha}\right) + \frac{(u-\alpha)^2}{u_x^2} = 0,$$

$$q_t = -q_x\left(\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{u_{xx}^2 - r(u)}{2u_x^2} - \frac{2(u_{xx}-\beta)}{u-\alpha}\right) - \frac{q}{u_x}\left(\frac{2(\beta u_{xx} - r(u))}{u-\alpha} + r'(u)\right),$$

где $\beta^2 = r(\alpha)$. Исключение q приводит к НС вида $u_{xxz} = \dots$:

$$\begin{aligned}
&P(u)(u_xu_{xxz} - u_{xx}u_{xz})^2\\
&\quad - u_x^2\big(P'(u)u_{xz} - (4u^2 - 8\alpha u - 8\alpha^2 + g_2)u_xu_z\big)(u_xu_{xxz} - u_{xx}u_{xz})\\
&\quad + (2\beta u_x^2 - P(u))\big(r(u)u_{xz}^2 - r'(u)u_xu_zu_{xz} + 4(2u+\alpha)u_x^2u_z^2\big)\\
&\quad + 4u_x^2((u-\alpha)u_{xz} - u_xu_z)^2 - 4u_x^2(\beta u_x^2 - P(u))^2 = 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $P(u) = u^4 + \frac{1}{2}g_2u^2 + 2g_3u + \frac{1}{16}g_2^2 - \alpha r(u)$.

Подход с цепочками эквивалентен, но дает более удобное представление НС в виде совместной пары

$$u_{n,x}u_{n+1,x}=h(u_n,u_{n+1}),\quad u_{n,z}=\frac{h(u_n,u_{n+1})}{u_{n+1}-u_{n-1}}-\frac{1}{2}\frac{\partial h(u_n,u_{n+1})}{\partial u_{n+1}},\tag{22}$$

где h — симметричный биквадратичный многочлен. Ее совместность легко проверяется для любого h.

Цепочка по x определяет преобразование Бэклунда для КН, если

$$h(u,v)=h(v,u),\quad h_{uuu}=0,\quad r(u)=h_v^2-2hh_{vv}.$$

В частности, $r(u)=4u^3-g_2u-g_3$ отвечает

$$h(u,v)=\frac{1}{\nu}((uv+\mu u+\mu v+g_2/4)^2-(u+v+\mu)(4\mu uv-g_3)),\quad \nu^2=r(\mu).$$

Прямыми вычислениями можно показать, что пара (22) эквивалентна НС (20) при следующей связи между точками на эллиптической кривой:

$$\alpha=\frac{16\mu^4+8g_2\mu^2+32g_3\mu+g_2^2}{16r(\mu)},$$

$$\beta=\frac{\nu(64\mu^6-80g_2\mu^4-320g_3\mu^3-20g_2^2\mu^2-16g_2g_3\mu-32g_3^2)}{32r(\mu)^2}.$$

Заключение

- негативные симметрии — производящие функции для высших симметрий
- приложения — альтернативный, более удобный способ записи высших струнных уравнений
- коммутативность потоков формулируется как свойство 3D-совместности
- методы вывода: оператор рекурсии, квадраты собственных функций, цепочки преобразований Бэклунда