Негативные симметрии: свойства и приложения

В.Э. Адлер (ИТФ им. Л.Д. Ландау)

Mathematical Models and Integration Methods

18 апреля 2024

Введение

Пусть дано интегрируемое эволюционное уравнение или система

$$u_t = a(u, u_x, u_{xx}, \dots),$$

высшие симметрии которой строятся оператором рекурсии

$$u_{t_n} = R^n(u_{t_0}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь u_{t_0} — затравочная симметрия, например $u_{t_0} = u_x$, $u_{t_0} = u_t$ или просто $u_{t_0} = 0$.

Естественно определить негативные симметрии (НС) как

$$u_{t_{-n}} = R^{-n}(u_{t_0}). \tag{1}$$

Проблема в том, что эти уравнения сильно нелокальны; тем не менее, такой подход существует, см. напр. [1].

[1] Y.F. Adans, G. França, J.F. Gomes, G.V. Loboa, A.H. Zimerman. *JHEP* **08** (2023) 160.

Мы будем определять НС по другому:

$$u_z = (R-\mu)^{-1}(u_{t_0}), \tag{2}$$

где μ произвольный параметр. Это более простые “гиперболические” уравнения.

Для уравнений типа КдФ $u_t = u_{xxx} + a(u, u_x, u_{xx})$ НС имеют вид

$$u_{xxz} = f(u, u_x, u_{xx}, u_z, u_{xz}; \mu), \tag{3}$$

иногда возможно понижение порядка до уравнений типа синус-Гордона

$$u_{xz} = g(u, u_x, u_z).$$

Системы типа НУШ:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a(u, v, u_x, v_x), \\ -v_t = v_{xx} + b(u, v, u_x, v_x) \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_{xz} = f(u, v, u_x, v_x, u_z, v_z; \mu), \\ v_{xz} = g(u, v, u_x, v_x, u_z, v_z; \mu). \end{cases}$$

- НС часто интересны сами по себе (уравнения синус-Гордона, Камассы–Холма, Максвелла–Блоха, СИП, Полмайера–Лунда–Редже — все имеют такое происхождение).

- НС (2) — производящая функция для высших и для симметрий вида (1), см. напр. [2, 3]:

$$
\begin{aligned}
u_z = (R-\mu)^{-1}(u_{t_0}) &= -\frac{1}{\mu}\left(u_{t_0} + \frac{1}{\mu}u_{t_1} + \frac{1}{\mu^2}u_{t_2} + \dots\right)\\
&= u_{t_{-1}} + \mu u_{t_{-2}} + \mu^2 u_{t_{-3}} + \dots
\end{aligned}
$$

- Коммутативность высших симметрий ⇔ коммутативность НС, отвечающих параметрам μ_1 и μ_2. Это даёт примеры 3D-совместных непрерывных уравнений.

[2] A.M. Kamchatnov, M.V. Pavlov. *Phys. Lett. A* **301:3–4** (2002) 269–274.

[3] S.Y. Lou, M. Jia. *JHEP* **02** (2024) 172.

- Приложения к построению неавтономных редукций Пенлеве-типа.

Интегрируемое уравнение может иметь классические симметрии (например, растяжение), которые порождают дополнительную алгебру симметрий:

$$u_{t_0} \xrightarrow{R} u_{t_1} \xrightarrow{R} u_{t_2} \xrightarrow{R} \dots, \qquad u_{\tau_0} \xrightarrow{R} u_{\tau_1} \xrightarrow{R} u_{\tau_2} \xrightarrow{R} \dots,$$

причем u_{τ_i} оказываются нелокальными, неавтономными и не коммутируют с u_{t_j} и друг с другом.

Стационарное уравнение для любой симметрии определяет некоторую конечномерную редукцию (ОДУ):

$$A(R)(u_{t_0}) + B(R)(u_{\tau_0}) = 0,$$

где A и B — многочлены (с постоянными коэффициентами) от оператора рекурсии.

Если $B = 0$, то это уравнения Новикова, интегрируемые по Лиувиллю (конечнозонные решения).

Если $B \neq 0$, то это “струнные” уравнения типа Пенлеве.

Обычно добавляют лишь саму классическую симметрию, так как высшие содержат нелокальности и чем выше $\deg B = n$, тем они сложнее. Однако, можно перейти к уравнению

$$(B^{-1}A)(R)(u_{t_0}) + u_{\tau_0} = 0.$$

В случае общего положения (B без кратных корней), разложение на простые дроби даёт стационар для суммы высших симметрий, негативных и классической [4]:

$$\widetilde{A}(R)(u_{t_0}) + \sum_{i=1}^{n} c_i(R - \mu_i)^{-1}(u_{t_0}) + u_{\tau_0} = 0.$$

Все нелокальности перемещаются в негативные симметрии и записываются единообразно при любом n.

[4] A.Yu. Orlov, S. Rauch-Wojciechowski. *Physica D* **69:1–2** (1993) 77–84.

План доклада

- НС для уравнения КдФ
- свойство 3D-совместности, примеры
- неавтономные редукции для КдФ [5]
- НС и неавтономные редукции для цепочки Вольтерры [6]

[5] V.E. Adler, M.P. Kolesnikov. *J. Math. Phys.* **64** (2023) 101505.

[6] V.E. Adler. *Open Comm. in Nonl. Math. Phys., Special Issue in Memory of D. Levi* (2024) 11597.

Негативная симметрия для уравнения КдФ

Вывод негативной симметрии

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \qquad \text{KdV}$$

Оператор рекурсии ($D = \partial_x$):

$$R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$$

Иерархия КдФ:

$$u_{t_0} = u_x \qquad \text{сдвиг по } x$$
$$u_{t_1} = R(u_x) = (u_{xx} - 3u^2)_x \qquad \text{КдФ}$$
$$u_{t_2} = R^2(u_x) = (u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3)_x \qquad \text{высшая симметрия}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Негативная симметрия ($\mu = -4\alpha$):

$$(R - \mu)(u_z) = u_x \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 4(u - \alpha) - 2u_x D^{-1})(u_z) = u_x.$$

Правую часть можно заменить на 0 без потери общности: коэффициент при u_x включается в первообразную $D^{-1}(u_z)$.

Чтобы проинтегрировать, введем новую нелокальную переменную q:

$$u_z = q_x, \quad q_{xxx} - 4(u-\alpha)q_x - 2u_x q = 0.$$

Есть интегрирующий множитель $2q$. Также можно определить правило дифференцирования q по t, чтобы была совместность с КдФ. В результате, приходим к НС (γ — постоянная интегрирования)

$$u_z = q_x, \tag{4}$$

где q — нелокальность, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} 2qq_{xx} - q_x^2 - 4(u-\alpha)q^2 + 4\gamma = 0, \\ q_t = q_{xxx} - 6uq_x. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (5) совместны в силу KdV, то есть, определяют расширение КдФ на переменную q.

Уравнение (4) определяет поток на этом расширенном пространстве, и утверждается, что $[D_z, D_t] = 0$.

- Фактически q — это резольвента оператора Штурма–Лиувилля $L = -D_x^2 + u$, причем α играет роль спектрального параметра [7]. Также, q можно представить в виде $q = \psi\varphi$, где $L\psi = \alpha\psi$, $L\varphi = \alpha\varphi$ (squared eigenfunction symmetry).

- Из (5) следует, что q удовлетворяет (вырожденному) уравнению Калоджеро–Дегаспериса [8, 9]

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3q_x q_{xx}}{q} + \frac{3q_x(q_x^2 - 4\gamma)}{2q^2} - 6\alpha q_x.$$

- В принципе, можно работать и в исходных переменных u, исключив q из (5), (4):

$$4u_z = D_x\left(\frac{u_{xz} + \sqrt{u_{xz}^2 - 4(u-\alpha)(u_z^2 - 4\gamma)}}{u-\alpha}\right) \quad \Rightarrow$$

$$u_{xxz} = \Phi(u, u_x, u_z, u_{xz}; \alpha, \gamma).$$

[7] I.M. Gelfand, L.A. Dikii. *Russian Math. Surveys* **30:5** (1975) 77–113.

[8] F. Calogero, A. Degasperis. *J. Math. Phys.* **22** (1981) 23–31.

[9] A.S. Fokas. *J. Math. Phys.* **21:6** (1980) 1318–1325.

- Удобная форма записи НС получается при введении потенциала:

$$2v_x = u, \quad 2v_z = q \quad \Rightarrow$$

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2, \qquad \text{pot-KdV}$$

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \gamma = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) известно как associated Camassa–Holm equation [10, 11].

Совместность уравнений pot-KdV и (6) означает следующее: пусть F — левая часть (6), тогда

$$D_t(F) = A(F),$$

с оператором $A = D^3 - 3\frac{v_{xz}}{v_z}D^2 + 3\Big(\frac{v_{xz}^2}{v_z^2} - 4v_x\Big)D$. Это можно принять за формальное определение НС для эволюционного уравнения, не апеллирующее к оператору рекурсии.

---

[10] J. Schiff. *Physica D* **121:1–2** (1998) 24–43.

[11] A.N.W. Hone. *J. Phys. A* **32:27** (1999) L307–314.

Производящая функция для высших симметрий

Так как

$$u_z = q_x = (R-\mu)^{-1}(u_x) = -\mu^{-1}u_{t_0} - \mu^{-2}u_{t_1} - \dots,$$

то имеет место следующее свойство.

Симметрии КдФ имеют вид $u_{t_i} = h^{i+1}_x$, где h_i — коэффициенты формального ряда

$$q = h^0 + \frac{h^1}{\mu} + \frac{h^2}{\mu^2} + \dots, \quad h^0 = -\frac{1}{2},$$

удовлетворяющего уравнению

$$2qq_{xx} - q_x^2 - (4u+\mu)q^2 + \frac{\mu}{4} = 0,$$

что равносильно рекуррентным соотношениям

$$h^{i+1} = \sum_{s=0}^{i}\big(h^s_x h^{i-s}_x - 2h^s h^{i-s}_{xx} + 4uh^s h^{i-s}\big) + \sum_{s=1}^{i} h^s h^{i+1-s}.$$

Представления Лакса

Иерархия КдФ служит условием совместности для матричных уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_{t_i} = V_i\Psi \quad \Rightarrow \quad U_{t_i} = V_{i,x} + [V_i, U],$$

где $U = V_0$ и все V_i имеют общую структуру

$$M(g) = \begin{pmatrix} -g_x & 2g \\ 2(u-\lambda)g - g_{xx} & g_x \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$U = M(1/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V_1 = M(-u-2\lambda).$$

НС (4) допускает представление нулевой кривизны $U_z = V_x + [V, U]$, где

$$V = M\Big(\frac{q}{4(\alpha-\lambda)}\Big).$$

Альтернативно, имеется представление Лакса в дифференциальных операторах.

НС (4) эквивалентна уравнению

$$L_z = [P(L-\alpha)^{-1}, L] \quad \Leftrightarrow \quad L_z(L-\alpha) = [P, L],$$

где

$$L = -D^2 + u, \quad P = -\frac{1}{2}qD + \frac{1}{4}q_x.$$

Такое представление получено в [12]; его вывод связан с конструкцией оператора рекурсии из [13].

[12] V.E. Adler. *J. Math. Phys.* **65** (2024) 023502.

[13] M. Gürses, A. Karasu, V.V. Sokolov. *J. Math. Phys.* **40:12** (1999) 6473–6490.

Свойство 3D-совместности, примеры

Совместны ли негативные симметрии друг с другом?

НС для КдФ содержит параметр α. Разным α отвечают разные потоки.

Ясно, что они *должны* коммутировать, поскольку НС интерпретируется как ряд по α, коэффициенты которого — коммутативные высшие симметрии.

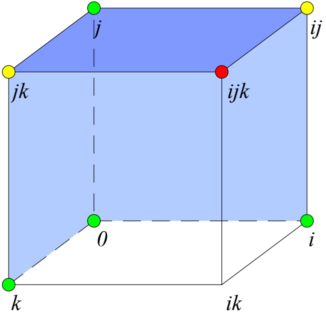
Наоборот, если НС с разными α коммутируют, то это доказывает коммутативность высших симметрий.

Возникает вопрос, как проверить коммутативность НС независимо, не используя свойства оператора рекурсии и высших симметрий. Забудем вообще про высшие симметрии, пусть есть уравнения вида

$$u_{xxz_i} = F_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}), \quad i \in I. \tag{7}$$

Требуется определить понятие совместности для набора таких уравнений.

3D-совместность квад-уравнений



Напомним, что для дискретных гиперболических уравнений

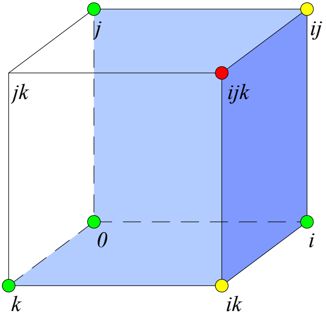
$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки [14].

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

[14] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

3D-совместность квад-уравнений



Напомним, что для дискретных гиперболических уравнений

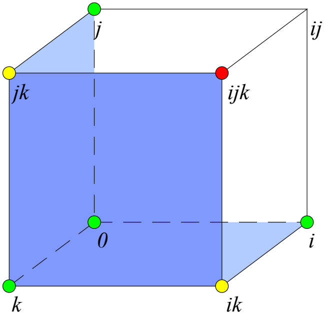
$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки [14].

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

[16] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

3D-совместность квад-уравнений



Напомним, что для дискретных гиперболических уравнений

$$u_{ij} = f(u, u_i, u_j; \alpha_i, \alpha_j)$$

(индекс означает сдвиг по координате n_i: $u_i = u(n_i + 1, n_j)$) совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки [14].

Три способа вычислить u_{ijk} по начальным данным u, u_i, u_j, u_k должны давать совпадающие результаты.

---

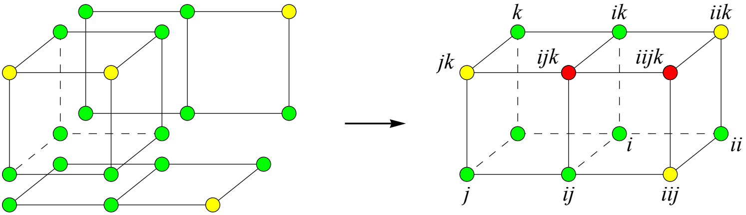
[16] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. *Comm. Math. Phys.* ***233:3*** (2003) 513–543.

Дискретным аналогом НС можно считать уравнения на паре соседних квадратов. В [16] исследовалась совместность пары таких уравнений:

$$u_{iij} = f(u, u_i, u_{ii}, u_j, u_{ij}), \qquad u_{iik} = g(u, u_i, u_{ii}, u_k, u_{ik}),$$

и оказалось, что дополнительно необходимо рассматривать 2-компонентные квад-уравнения

$$\begin{pmatrix} u_{jk} \\ u_{ijk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}(u, u_i, u_j, u_{ij}, u_k, u_{ik}).$$



Естественно ожидать чего-то подобного и в непрерывном случае.

[16] V.E. Adler, V.V. Postnikov. *J. Phys. A: Math. Theor.* **47:4** (2014) 045206.

Пример Ферапонтова

Следующая тройка 3D-совместна:

$$u_{xy} = \sinh u\sqrt{1+u_x^2},$$
$$u_{yz} = \cosh u\sqrt{1+u_z^2},$$
$$u_{xz} = \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2}.$$

Перекрёстные производные для каждой пары уравнений совпадают, при условии, что выполняется третье. Например, для первых двух:

$$(u_{xy})_z - (u_{xz})_y = (u_{xz} - \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2})\left(\frac{u_z\cosh u}{\sqrt{1+u_z^2}} - \frac{u_x\sinh u}{\sqrt{1+u_x^2}}\right),$$

что обращается в 0 в силу третьего уравнения. Аналогично и для других пар: каждое уравнение тройки восстанавливается по двум другим, если в равенстве для перекрёстных производных отбрасывать множители с младшими производными.

[17] E.V. Ferapontov. *J. Phys. A* **30:19** (1997) 6861–6878.

Хорошо известно, что гиперболические уравнения служат симметриями для эволюционных, см. напр. [18]. Такие уравнения можно считать специальным случаем НС.

Однако, по-видимому, совместные тройки для них — это редкость.

---

[18] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. *Theor. Math. Phys.* **166:1** (2011) 43–75.

3D-совместность негативных симметрий

Определение. Уравнения

$$u_{xxz_i}=F_i(u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_{z_i},u_{xz_i}),\quad i\in I, \tag{8}$$

3D-совместны, если их можно дополнить уравнениями

$$u_{z_iz_j}=G_{ij}(u,u_x,u_{xx},u_{z_i},u_{xz_i},u_{z_j},u_{xz_j}),\quad i\ne j, \tag{9}$$

такими, что $G_{ij}=G_{ji}$ и, для попарно различных $i,j,k\in I$,

$$D_{z_i}(F_j)=D_{z_j}(F_i)=D_x^2(G_{ij}), \tag{10}$$

$$D_{z_i}(G_{jk})=D_{z_j}(G_{ik})=D_{z_k}(G_{ij}), \tag{11}$$

тождественно в силу (8), (9) и дифференциальных следствий $u_{xxxz_i}=D_x(F_i)$, $u_{xz_iz_j}=D_x(G_{ij})$.

Отсюда следует совпадение *любых* перекрёстных производных, что гарантирует существование локальных решений общего вида, удовлетворяющих одновременно всему набору уравнений.

Конструктивно ли это определение? Уравнения (9) заранее не известны, но их можно восстановить прямым вычислением — если они существуют.

Первый шаг:

$$0 = D_{z_i}(F_j) - D_{z_j}(F_i) = P_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}, u_{xz_iz_j}),$$

где в правой части производные типа u_{xxxz} и u_{xxz} исключены из (8). Разрешая это уравнение относительно $u_{xz_iz_j}$, получаем

$$u_{xz_iz_j} = H_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}). \tag{12}$$

Это должно быть следствием (9), чтобы совместность имела место.

Второй шаг:

$$0 = D_x(H_{ij}) - D_{z_j}(F_i) = Q_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}),$$

где исключаются u_{xxxz}, u_{xxz} и $u_{xz_iz_j}$. Разрешая относительно $u_{z_iz_j}$, получаем искомое уравнение (9).

После этого остаётся только проверить равенства $D_x(G_{ij}) = H_{ij}$ и $D_{z_i}(G_{jk}) = D_{z_j}(G_{ik})$.

Pot-KdV

Следующие уравнения 3D-совместны:

$$v_{xxz_i} = \frac{v_{xz_i}^2 - \gamma_i}{2v_{z_i}} + 2(2v_x - \alpha_i)v_{z_i}, \tag{13}$$

$$v_{z_i z_j} = \frac{v_{z_i} v_{xz_j} - v_{z_j} v_{xz_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j. \tag{14}$$

Продемонстрируем вывод дополнительных уравнений (14). На первом шаге, равенство $(v_{xxz_i})_{z_j} = (v_{xxz_j})_{z_i}$ даёт

$$\begin{aligned} v_{xz_iz_j} &= \left(2(\alpha_i - \alpha_j)v_{z_i}v_{z_j} + \frac{\gamma_j v_{z_i}}{2v_{z_j}} - \frac{\gamma_i v_{z_j}}{2v_{z_i}}\right) \frac{v_{z_i z_j}}{v_{z_j} v_{xz_i} - v_{z_i} v_{xz_j}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{xz_i}}{v_{z_i}} + \frac{v_{xz_j}}{v_{z_j}}\right) v_{z_i z_j} + 4v_{z_i} v_{z_j}. \end{aligned} \tag{15}$$

На втором шаге, условие $(v_{xz_iz_j})_x = (v_{xxz_i})_{z_j}$ приводит к факторизованному уравнению

$$((\alpha_i-\alpha_j)v_{z_iz_j} + v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})\times \\ \times \frac{(v_{z_i}^2v_{xz_j}^2 - v_{z_j}^2v_{xz_i}^2 - 4(\alpha_i-\alpha_j)v_{z_i}^2v_{z_j}^2 + \gamma_iv_{z_j}^2 - \gamma_jv_{z_i}^2)}{(v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})^2} = 0.$$

Приравнивая первый множитель нулю, получаем (14).

Далее, проверяем, что равенство $(v_{z_iz_j})_x = v_{xz_iz_j}$ выполняется тождественно. Дифференцирование (14) по x даёт

$$v_{xz_iz_j} = 2v_{z_i}v_{z_j} + \frac{1}{2(\alpha_i-\alpha_j)}\left(\frac{v_{z_i}}{v_{z_j}}(v_{xz_j}^2-\gamma_j) - \frac{v_{z_j}}{v_{z_i}}(v_{xz_i}^2-\gamma_i)\right). \tag{16}$$

Это совпадает с (15) при замене $v_{z_iz_j}$ в силу (14), то есть (15) является следствием (14) и (13).

Наконец, на заключительном этапе проверяем выполнение тождеств (11), то есть $(v_{z_iz_j})_{z_k} = (v_{z_iz_k})_{z_j}$, что завершает доказательство 3D-совместности.

Замечание. Уравнение (14)

$$v_{z_i z_j} = \frac{v_{z_i} v_{x z_j} - v_{z_j} v_{x z_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

— это самостоятельное 3D интегрируемое уравнение, связанное с универсальной гидродинамической иерархией Алонсо–Шабата [19]. В [20] было показано, что для него выполняется тождество

$$(v_{z_i z_j})_{z_k} = (v_{z_i z_k})_{z_j}.$$

Уравнения (13) при этом не нужны, они лишь определяют 2D редукцию этого 3D-уравнения, сохраняющую свойство совместности.

Однако, в общем случае, в определении 3D-совместности не требуется, чтобы тождества (11) выполнялись без учёта (8).

[19] L. Martínez Alonso, A.B. Shabat. *Phys. Lett. A* **300:1** (2002) 58–64; *Theor. Math. Phys.* **140:2** (2004) 1073–1085.

[20] V.E. Adler, A.B. Shabat. *Theor. Math. Phys.* ***153:1*** (2007) 1373–1387.

Schwarzian-KdV

Оператор рекурсии:

$$R = D_x^2 - \frac{2u_{xx}}{u_x}D_x + \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} - u_x D_x^{-1}\cdot\left(\frac{u_{xxxx}}{u_x^2} - \frac{4u_{xx}u_{xxx}}{u_x^3} + \frac{3u_{xx}^3}{u_x^4}\right)$$

Симметрии:

$$u_{t_0} = u_x, \quad u_t = R(u_x) = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x}, \ \dots$$

Негативные симметрии $R(u_{z_i}) = 4\alpha_i u_{z_i}$:

$$u_{xxz_i} = \frac{u_{xz_i}^2 - \gamma_i u_x^2}{2u_{z_i}} + \frac{u_{xx}u_{xz_i}}{u_x} + 2\alpha_i u_{z_i} \tag{17}$$

3D-совместность: дополнительные уравнения

$$u_{z_i z_j} = \frac{\alpha_i u_{z_i} u_{xz_j} - \alpha_j u_{z_j} u_{xz_i}}{(\alpha_i - \alpha_j)u_x}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Уравнение КдФ не имеет гиперболических симметрий, то есть, простейшая НС для него имеет вид $u_{xxz} = \dots$

В отличие от него, Schwarzian-KdV совместно с несколькими гиперболическими уравнениями:

$$u_{xz} = 2u_x\sqrt{u_z},$$
$$u_{xz} = 2uu_x,$$
$$u_{xz} = \frac{2uu_xu_z}{u^2+1}.$$

Из них первое определяет специальные решения (17) при $\alpha = \gamma = 0$, а два других имеют какое-то другое происхождение.

Уравнение Дима

Оператор рекурсии:

$$R = u^2 D_x^2 - u u_x D_x + u u_{xx} + u^3 u_{xxx} D_x^{-1} u^{-2} = u^3 D_x^3 u D_x^{-1} u^{-2}$$

Затравочная симметрия совпадает с самим уравнением:

$$u_t = u^3 u_{xxx}$$

Негативная симметрия $(R - \alpha)(u_z) = 0$:

$$u_z = u^2 q_x, \quad u^3 (uq)_{xxx} - \alpha u^2 q_x = 0$$

Потенциальная версия (замена $x \leftrightarrow v$ даёт Schwarzian KdV):

$$v_t = -\frac{v_{xxx}}{v_x^3} + \frac{3 v_{xx}^2}{2 v_x^4}, \qquad u = -\frac{1}{v_x}, \quad q = v_z$$

$$2 \frac{v_{z_i}}{v_x} \left(\frac{v_{z_i}}{v_x} \right)_{xx} = \left(\frac{v_{z_i}}{v_x} \right)_x^2 + \alpha_i v_{z_i}^2 + \gamma_i$$

$$v_{z_i z_j} = \frac{\alpha_i v_{z_j} v_{x z_i} - \alpha_j v_{z_i} v_{x z_j}}{(\alpha_i - \alpha_j) v_x}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Вывод НС из цепочек

Оператор рекурсии — не единственный метод построения НС. Другой способ (для уравнений типа КдФ) связан с ассоциированными уравнениями для совместной пары цепочек вида

$$u_{n+1,x} = a(u_{n,x}, u_n, u_{n+1}; \alpha), \qquad u_{n,z} = b(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}). \tag{18}$$

Первые примеры таких пар появились в [21].

Дифференцируя второе уравнение по x и заменяя $u_{n\pm1,x}$ в силу первого, получаем

$$u_{n,z} = b(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) \quad \xrightarrow{D_x} \quad u_{n,xz} = b(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n,x}).$$

Отсюда выражается $u_{n+1} = \varphi(u, u_x, u_z, u_{xz})$, где $u = u_n$, и подстановка в первое уравнение (18) даёт то, что нужно:

$$u_{xxz} = f(u, u_x, u_{xx}, u_z, u_{xz}; \alpha).$$

---

[21] R.I. Yamilov. *Theor. Math. Phys.* **85:3** (1990) 1269–1275.

Символически,

$$\text{negative flow}(x,z;\alpha) = \frac{\text{Volterra chain}(n,z)}{\text{dressing chain}(n,x;\alpha)}.$$

Простейший пример:

Одевающая цепочка и цепочка типа Вольтерры

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = (v_{n+1} - v_n)^2 + \alpha, \qquad v_{n,z} = \frac{\beta}{v_{n+1} - v_{n-1}}$$

совместны; в силу этих уравнений переменная $v = v_n$ удовлетворяет НС для pot-KdV (6) с $\gamma = \beta^2$:

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \beta^2 = 0.$$

Символически,

$$\text{negative flow}(x,z;\alpha) = \frac{\text{Volterra chain}(\cancel{n},z)}{\text{dressing chain}(\cancel{n},x;\alpha)}.$$

Простейший пример:

Одевающая цепочка и цепочка типа Вольтерры

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = (v_{n+1} - v_n)^2 + \alpha, \qquad v_{n,z} = \frac{\beta}{v_{n+1} - v_{n-1}}$$

совместны; в силу этих уравнений переменная $v = v_n$ удовлетворяет НС для pot-KdV (6) с $\gamma = \beta^2$:

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \beta^2 = 0.$$

Отсюда становится понятно, что 3D-совместность негативных симметрий тесно связана с 3D-совместностью квад-уравнений, с которой мы начинали. Квад-уравнения определяют принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Бэклунда, то есть, для одевающих цепочек. Все уравнения распространяются на многомерную решетку.

Например, для одевающей цепочки возникает уравнение

$$(v - T_iT_j(v))(T_i(v) - T_j(v)) = \alpha_i - \alpha_j,$$

где $T_i : v(\dots, n_i, \dots) \mapsto v(\dots, n_i + 1, \dots)$. Эти уравнения определены на каждом 2D сечении многомерной решетки, а каждой переменной n_i отвечает своя пара цепочек

$$T_i(v_x) + v_x = (T_i(v) - v)^2 + \alpha_i, \quad v_{z_i} = \frac{\beta_i}{T_i(v) - T_i^{-1}(v)}.$$

В результате, с каждым координатным направлением n_i ассоциирована своя НС с переменной ∂_{z_i} и параметрами α_i, β_i, а их совместность является следствием совместности цепочек типа Вольтерры на квадратной решетке.

Следует отметить, что совместность цепочек типа Вольтерры с квад-уравнениями исследовалась во множестве работ. Однако, их интерпретация как НС, вроде бы, является новой.

---

[22] F.W. Nijhoff, V.G. Papageorgiou. *Phys. Lett. A* **153:6–7** (1991) 337–344.

[23] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 109–123.

[24] F.W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta. *Studies in Appl. Math.* **106:3** (2001) 261–314.

[25] A. Tongas, D. Tsoubelis, P. Xenitidis. *J. Math. Phys.* **42:12** (2001) 5762–5784.

[26] A. Tongas, D. Tsoubelis, P. Xenitidis. *Phys. Lett. A* **284:6** (2001) 266–274.

[27] D. Tsoubelis, P. Xenitidis. *J. Phys. A: Math. Theor.* **42:16** (2009) 165203.

[28] P.D. Xenitidis. *J. Phys. A: Math. Theor.* **44:43** (2011) 435201.

[29] P.D. Xenitidis. *Proc. R. Soc. A* **474** (2018) 20180340.

[30] R.N. Garifullin, I.T. Habibullin, R.I. Yamilov. *J. Phys. A: Math. Theor.* **48:23** (2015) 235201.

[31] R.N. Garifullin, I.T. Habibullin. *J. Phys. A: Math. Theor.* **54:20** (2021) 205201.

Уравнение Кричевера–Новикова

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - r(u))}{2u_x}, \quad r = 4u^3 - g_2 u - g_3.$$

Оператор рекурсии имеет порядок 4 и перепрыгивает через симметрии. Построенная по нему НС допускает понижение порядка и результат может быть записан в виде следующей системы:

$$u_z = \frac{u_x^2 q_x^2 - r(u) q^2}{(u-\alpha)q} - \frac{u-\alpha}{q}, \tag{19}$$

где q — нелокальная переменная, определяемая уравнениями

$$2qq_{xx} - q_x^2 + 2qq_x\left(\frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{u_x}{u-\alpha}\right) - q^2\left(\frac{r(u)}{u_x^2} - \frac{2\gamma}{u-\alpha}\right) + \frac{(u-\alpha)^2}{u_x^2} = 0,$$

$$q_t = -q_x\left(\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{u_{xx}^2 - r(u)}{2u_x^2} - \frac{2(u_{xx}-\gamma)}{u-\alpha}\right) - \frac{q}{u_x}\left(\frac{2(\gamma u_{xx} - r(u))}{u-\alpha} + r'(u)\right),$$

$$\gamma^2 = r(\alpha).$$

Это было показано в [12], стартуя с оператора рекурсии для системы Дринфельда–Соколова, для которой КН служит редукцией. Исключение q приводит к весьма громоздкому уравнению вида $u_{xxz} = \dots$
Другой вывод основан на совместной паре цепочек

$$u_{n,x}u_{n+1,x} = h(u_n, u_{n+1}), \quad u_{n,z} = \frac{h(u_n, u_{n+1})}{u_{n+1} - u_{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{\partial h(u_n, u_{n+1})}{\partial u_{n+1}}, \qquad (20)$$

где h — симметричный биквадратичный многочлен, дискриминант которого совпадает с $r(u)$:

$$h(u,v) = h(v,u), \quad h_{uuu} = 0, \quad r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}.$$

В частности, $r(u) = 4u^3 - g_2u - g_3$ отвечает

$$h = \frac{1}{\gamma}((uv + \alpha u + \alpha v + g_2/4)^2 - (u + v + \alpha)(4\alpha uv - g_3)), \quad \gamma^2 = r(\alpha).$$

Пара (20) совместна — это легко проверяется для любого h. Прямыми вычислениями можно доказать, что она эквивалентна системе (19). Но, по-видимому, в этом примере исключение сдвигов делать нецелесообразно и НС следует понимать просто как саму пару (20).

Неавтономные редукции для КдФ

Дополнительные симметрии

Уравнение КдФ имеет не одну затравочную симметрию, а две:

$$u_{t_0} = u_x, \qquad u_{\tau_0} = 6tu_x - 1 \ \ \text{(симметрия Галилея)}$$

Соответственно, оператор рекурсии $R = D^2 - 4u - 2u_xD^{-1}$ порождает две серии симметрий

$$u_{t_n} = R^n(u_x) = D(h_n), \qquad u_{\tau_n} = R^n(6tu_x - 1).$$

В частности, скейлинг и мастер-симметрия имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\tau_1} &= 3t(u_{xx} - 3u^2)_x + xu_x + 2u, \\ u_{\tau_2} &= 3t(u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3)_x + x(u_{xxx} - 6uu_x) \\ &\qquad + 4u_{xx} - 8u^2 - 2u_xD^{-1}(u). \end{aligned}$$

Коммутационные соотношения:

$$[\partial_{t_i}, \partial_{t_j}] = 0, \quad [\partial_{\tau_i}, \partial_{t_j}] = (4j+2)\partial_{t_{j+i-1}}, \quad [\partial_{\tau_i}, \partial_{\tau_j}] = 4(j-i)\partial_{\tau_{j+i-1}}$$

Струнные уравнения

Открытой задачей является исследование решений стационарных уравнений общего вида

$$A(R)(u_x) + B(R)(6tu_x - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad ?$$

Классические редукции:

$$u_{t_1} + u_{\tau_0} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{\xi\xi} = 6u^2 + \xi \qquad \mathrm{P}_1$$

$$u_{\tau_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{\xi\xi} = 2f^3 + \xi f + \alpha \qquad \mathrm{P}_2$$

Также изучаются их высшие аналоги:

$$\mathrm{P}_1^n: \quad u_{t_n} + u_{\tau_0} = 0, \qquad \mathrm{P}_2^n: \quad u_{t_n} + u_{\tau_1} = 0.$$

[32] G. Moore. *Comm. Math. Phys.* **133:2** (1990) 261–304.

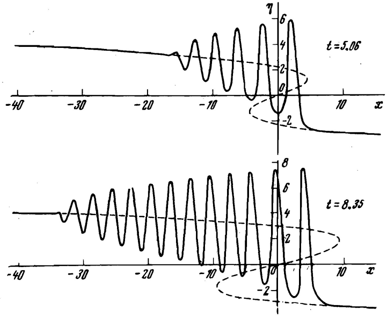
[33] N.A. Kudryashov. *Phys. Lett. A* **224:6** (1997) 353–360; *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 93–99.

[34] M. Mazzocco, M.Y. Mo. *Nonlinearity* **20:12** (2007) 2845–2882.

У этих уравнений есть специальные решения с нестандартной асимптотикой, важные с точки зрения физических приложений, хотя выделить их из решений общего вида крайне непросто. В частности, P_1^2

$$u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3 + 6tu + x = 0$$

содержит единственное решение с асимптотикой $10u^3 + 6tu + x = 0$, $x \to \pm\infty$, которое дает точное решение в задаче Гуревича–Питаевского [37] об опрокидывании фронта ударной волны [35, 36].



[35] B.I. Suleimanov. *JETP* ***78:5*** (1994) 583–587.

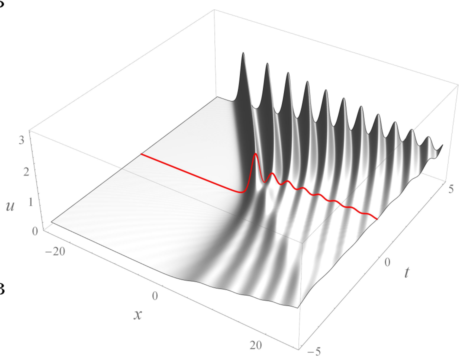
[36] B. Dubrovin. *Commun. Math. Phys.* **267** (2006) 117–139.

[37] A.V. Gurevich, L.P. Pitaevskii. *JETP Lett.* **17:5** (1973) 193–195; *Sov. Phys.-JETP* **38:2** (1974) 291–297.

В [38] было рассмотрено уравнение $u_{\tau_2} + au_{\tau_1} + bu_{\tau_0} = 0$:

$$\begin{aligned} &3t(u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3)_x \\ &\quad + x(u_{xxx} - 6uu_x) + 4u_{xx} - 8u^2 - 2u_x D^{-1}(u) \\ &\quad + a(3t(u_{xxx} - 6uu_x) + xu_x + 2u) + b(6tu_x - 1) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Численный счёт позволяет выделить в нем решения другой задачи Гуревича–Питаевского, о распаде ступеньки. Как видим, здесь уравнение выглядит довольно громоздко. Негативные симметрии дают способ выбрать разумные переменные. Это не позволяет выделить интересующие нас решения, но все же кажется шагом в правильном направлении.



[38] V.E. Adler. *J. Nonl. Math. Phys.* **27:3** (2020) 478–493.

Численный счёт для (21)

С учётом точечных замен, в (21) можно считать, не теряя общности, что $a=-4$ и $b=0$. Также сделаем замену $u\to -u$ (для наглядности, чтобы солитон был горбиком, а не ямкой). Тогда задача сводится к стационарному уравнению для суммы двух НС и симметрии Галилея, что эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 2qq_{xx}=q_x^2-4uq^2-\gamma_0,\\[2ex] 2pp_{xx}=p_x^2-4(u-1)p^2-\gamma_1,\\[2ex] u:=-\dfrac{x}{6t}+\dfrac{p+q}{3t}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} q_t=2uq_x-2u_xq,\\[2ex] p_t=2(u-1)p_x-2u_xp, \end{cases} \tag{23}$$

Эти системы совместны и в силу них выполнено уравнение $u_t=u_{xxx}+6uu_x$.

Из-за деления на t, прямая $t = 0$ особая. Решение общего положения имеет на ней сингулярность.

Простейший точный пример сингулярного решения: $u = -\dfrac{x}{6t}$.

В полуплоскости $t < 0$ (или $t > 0$) решение строится так:

Начальные данные в точке (x_0, t_0), $t_0 < 0$.

$\downarrow$

Решение системы (23) по t при $x = x_0$.

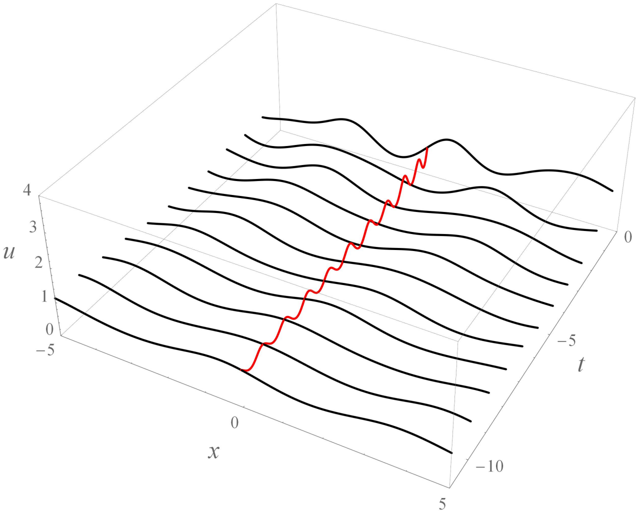
Это начальные данные для системы (22).

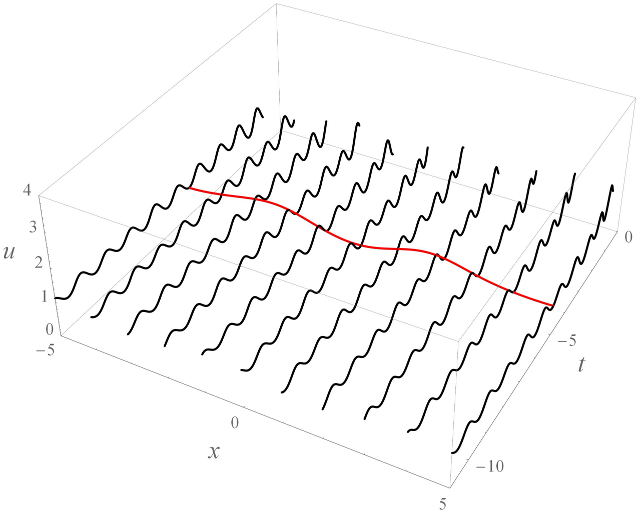
$\downarrow$

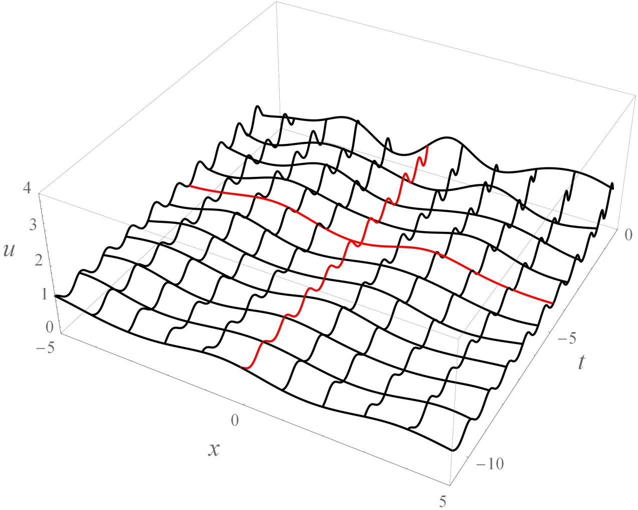
Решение системы (22) по x при всех $t \in (-\infty, 0)$.

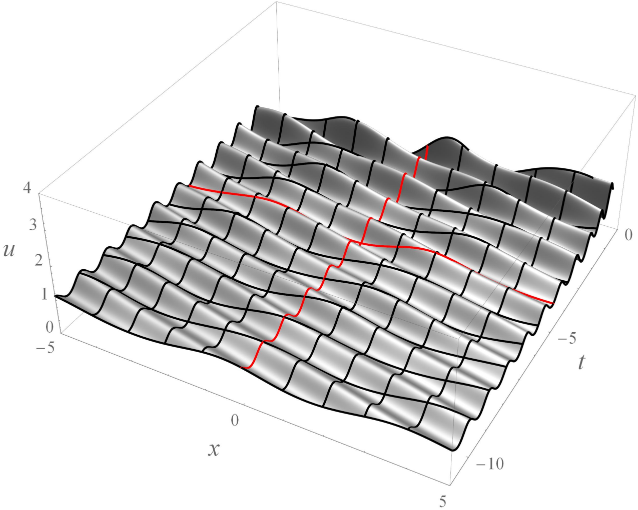
Или наоборот, можно сначала решить систему (22) при $t = t_0$, затем с этими начальными данными решать систему (23) при всех x.

Для некоторой области в пространстве начальных данных, решения не имеют особенностей при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_{<0}$. В этом случае оба способа построения решения дают одно и то же.

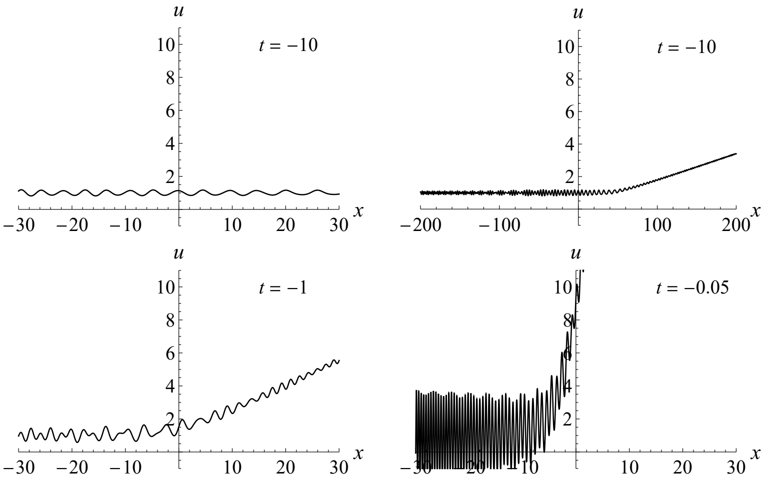

4
3
u
2
1
0
−5
0
x
5
0
−5
t
−10

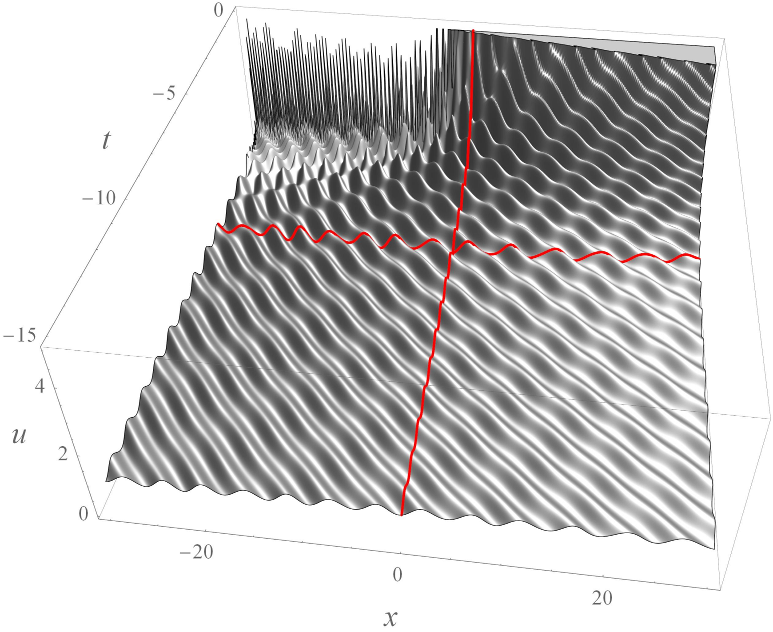

4
3
u
2
1
0
−5
0
x
5
0
−5
t
−10


4
3
2
1
0
u
−5
0
x
5
0
−5
t
−10


4
3
2
1
0
u
−5
0
5
x
0
−5
t
−10

При небольших x типичное решение выглядит, как осцилляции около $u = 1$, но, на самом деле, оно растет по x на одной полуоси. При уменьшении $|t|$ рост заметен уже при небольших x, а на другой полуоси усиливаются осцилляции. При $t \to 0$ возникает сингулярность.




0
−5
t
−10
−15
4
u
2
0
−20
0
20
x

Далее рассматриваем только решения, регулярные при $t=0$. Для них на этой прямой порядок уравнения падает: имеем $p+q=x/2$ и

$$\begin{gathered} qq_{xx}-q_x^2+4uq^2-\gamma_0=0,\\ 2(q-x/2)q_{xx}-(q_x-1/2)^2+4(u-1)(q-x/2)^2-\gamma_1=0. \end{gathered} \tag{24}$$

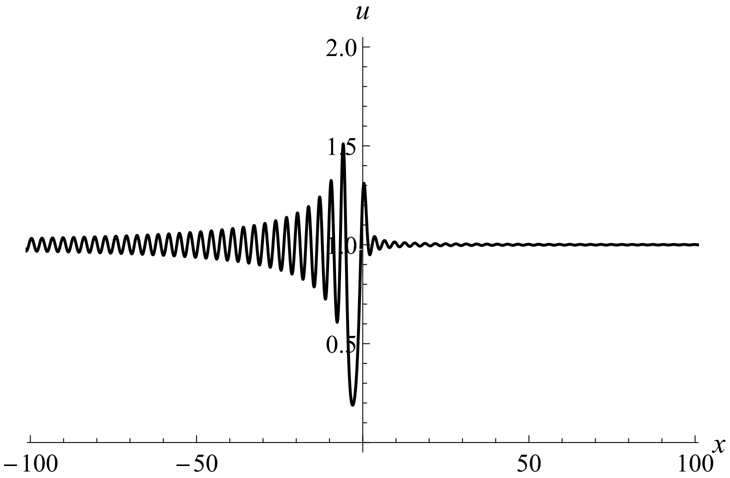
После исключения u, на q получается уравнение порядка 2, эквивалентное P_3.

В свою очередь, система (24) имеет особую точку $x=0$. Для решений, регулярных в этой точке, начальные условия определяются одним параметром

$$u(0,0)=2q_x(0,0)+1=c.$$

Таким образом, условие регулярности понижает размерность ещё на единицу. В окрестности $x=0$ регулярные решения строятся в виде рядов Тейлора, их радиус сходимости порядка 1. Дальше решение можно продолжить, численно решая (24).

Решения могут иметь полюсы и при $x \neq 0$. Однако, численные эксперименты показывают, что имеется область начальных данных, для которых решения регулярны на всей оси. Типичное такое решение имеет вид медленно затухающих (как x^{-1}) осцилляций около $u = 1$, разделенных провалом около 0, причем амплитуда осцилляций слева и справа разная.



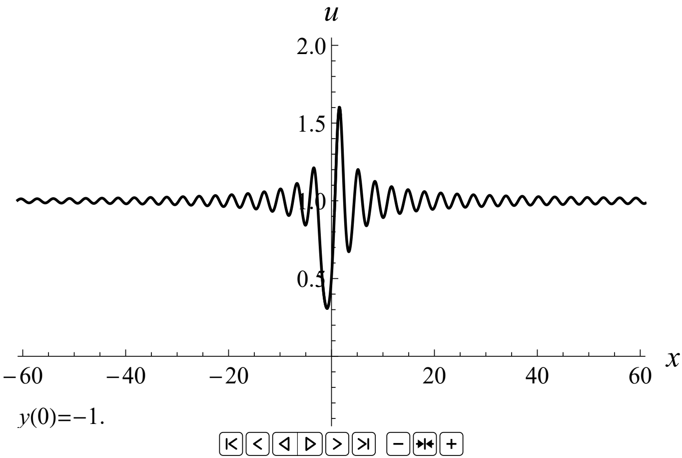
Итак, все регулярные решения наших уравнений параметризуются тремя числами: γ_0, γ_1 и единственным начальным данным c в точке $(0,0)$.

Сначала мы строим по ним решение при $t=0$, что оказывается не очень сложным с вычислительной точки зрения.

Дальше требуется продолжить его на все значения t. Это более сложный этап. Он тоже сводится к решению ОДУ, но из-за $1/t$ уравнения крайне неустойчивы (жесткие системы) и решения сбиваются на сингулярные. Поэтому, на практике, это работает, но не очень хорошо. Возможно, требуется какая-то нетривиальная замена переменных.

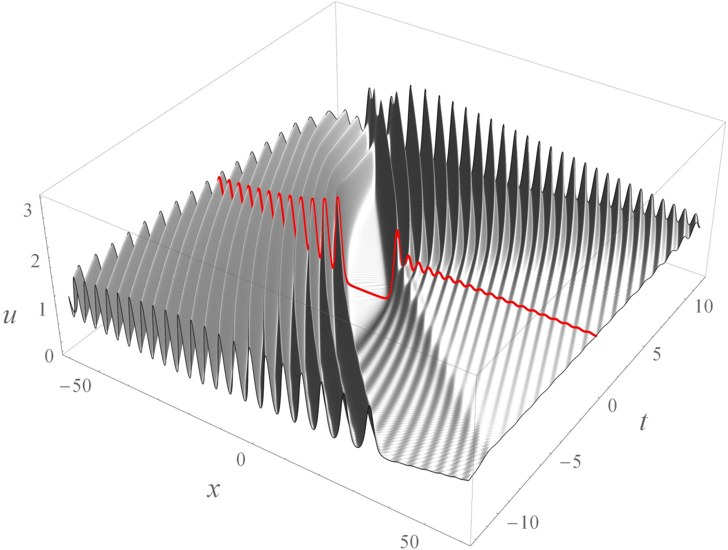
Тем не менее, считать можно.

Варьируя начальные данные для системы (24) (то есть, при $t=0$), можно заметить уширение центрального провала в момент, предшествующий образованию полюса. На одной полуоси решение практически не меняется, а на другой осцилляции отъезжают все дальше и дальше. Это напоминает предельный переход от кноидальной волны к солитону, но затрагивает лишь одну впадину. Применяя метод пристрелки для подбора начального значения, можно получить сепаратрисное решение в виде ступеньки.

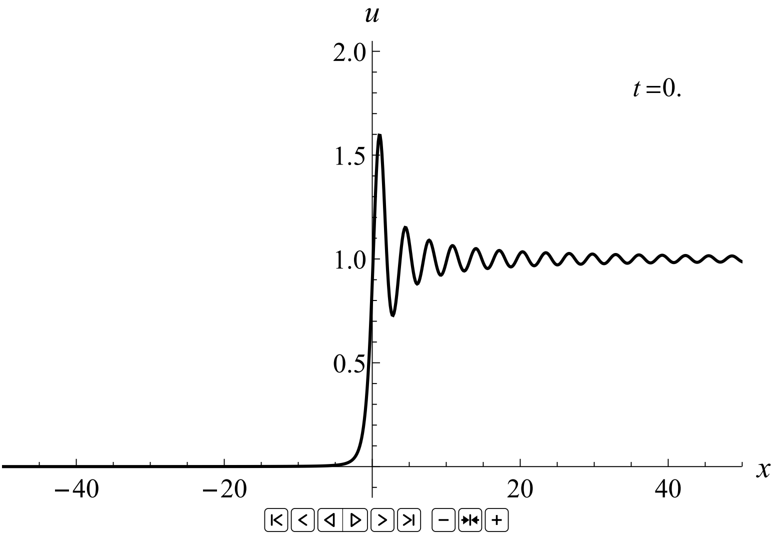


Гипотеза. Решения типа ступеньки с асимптотикой $u \to 0$, $x \to -\infty$, $u \to 1$, $x \to +\infty$ существуют при некоторых двух значениях c для любых значений $\gamma_0 > -1$ и $\gamma_1 < 0$.

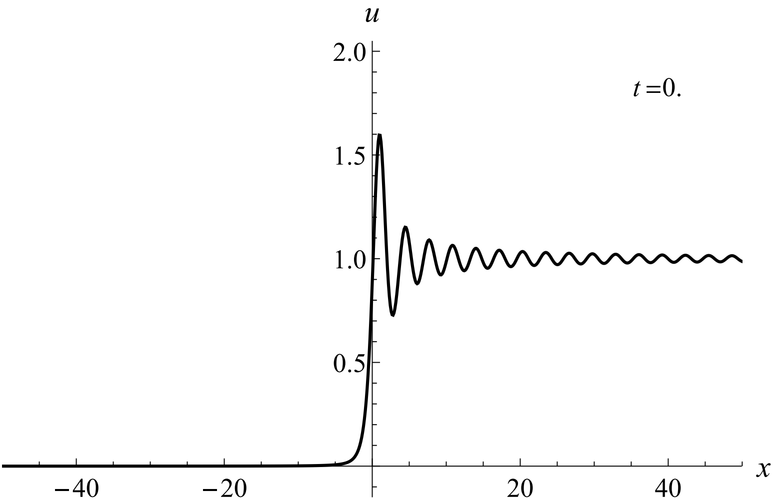
Промежуточное решение с широкой ямой:



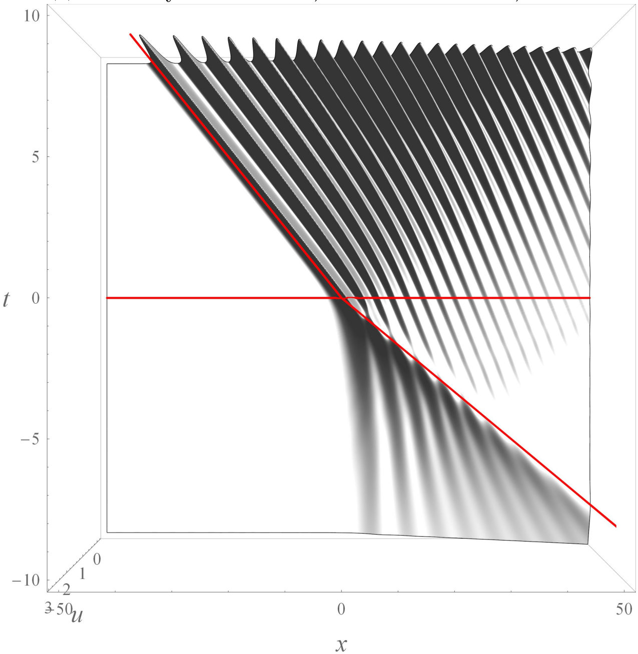
Волна сжатия (эволюция в сторону $t > 0$).



Волна разрежения (эволюция в сторону $t < 0$).



Вид сверху. Выделены лучи $x = -6t$, $t < 0$ и $x = -4t$, $t > 0$.



Итак, КдФ допускает решения, определяемые парой ОДУ (22) и (23). Численные эксперименты покзывают, что в этих ОДУ есть такая последовательность вырождений:

$$
\begin{gathered}
\text{решения общего положения (6 параметров)}\\
\downarrow\\
\text{решения, регулярные при } t=0 \text{ (4 параметра),}\\
\text{уравнение } \mathrm{P}_3\\
\downarrow\\
\text{решения, регулярные при } x=0, t=0 \text{ (3 параметра),}\\
\text{явное специальное начальное условие}\\
\downarrow\\
\text{сепаратрисные решения типа ступеньки (2 параметра),}\\
\text{неявное специальное начальное условие (пристрелка)}
\end{gathered}
$$

Эффективность выделения очередного подкласса падает на каждом шаге: численный счёт постоянно сбивается на решения более общего вида. Для двух последних классов решений нужна адекватная характеризация.

Тем не менее, обнадёживает сам факт, что для решений типа ступеньки удалось найти хоть какие-то дифференциальные уравнения.

n-компонентный аналог P_{34}

Пусть $\deg A \le \deg B = n$, $B = (R + 4\alpha_1)\cdots(R + 4\alpha_n)$, $\alpha_i \ne \alpha_j$.

Тогда уравнение $A(R)(u_x) + B(R)(6tu_x - 1) = 0$ эквивалентно системе

$$q_{j,xx} = \frac{q_{j,x}^2 - \beta_j^2}{2q_j} + 2(u - \alpha_j)q_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{25}$$

$$u := \frac{x}{6t} + \frac{1}{3t}(q_1 + \dots + q_n). \tag{26}$$

Векторное поле ∂_x коммутирует с ∂_t, заданным уравнением

$$q_{j,t} = 2u_x q_j - 2(u + 2\alpha_j)q_{j,x}. \tag{27}$$

Переменная u удовлетворяет КдФ в силу этих систем.

Если $\deg A - \deg B = r > 0$, то (25) и (27) не меняются, а связь (26) заменяется на

$$D^{-1}C(R)(u_x) + 6tu - x = 2q_1 + \dots + 2q_n, \quad \deg C = r.$$

Доказательство следует из формул для НС. Имеем

$$6tu_x - 1 = -B^{-1}A(u_x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(R + 4\alpha_j)^{-1}(u_x) = \sum_{j=1}^{n} 2q_{j,x},$$

где q_j удовлетворяют (5), что и даёт (25) и (27) с заменой γ_j на β_j^2. Постоянные $c_j = 2$ без потери общности, так как q_j можно умножать на постоянную.

При $n = 1$ уравнения сводятся к P_{34} (эквивалентно P_2), а $n = 2$ отвечает (21) (с учетом понижения порядка за счет двух первых интегралов).

Замечание. Если $B=0$, то связь (26) заменяется на $u=q_1+\dots+q_n$, система получается автономной и интегрируемой по Лиувиллю. Фактически, это система Гарнье (при подстановке $q_j=\psi_j\varphi_j$)

$$\begin{aligned}&\psi_{j,xx}=(u-\alpha_j)\psi_j,\\&\varphi_{j,xx}=(u-\alpha_j)\varphi_j,\\&u=\psi_1\varphi_1+\dots+\psi_n\varphi_n.\end{aligned}$$

и ее симметрия

$$\begin{aligned}\psi_{j,t}&=u_x\psi_j-2(u+2\alpha_j)\psi_{j,x},\\\varphi_{j,t}&=u_x\varphi_j-2(u+2\alpha_j)\varphi_{j,x}.\end{aligned}$$

[39] R. Garnier. *Rend. Circ. Mathem. Palermo* **43:4** (1919) 155–191.

[40] D.V. Choodnovsky, G.V. Choodnovsky. *Séminaire sur les équations non linéaires (Polytechnique)* (1977–1978), exp. no 6, p. 1–9.

[41] M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski. *Phys. Lett. A* **147:8–9** (1990) 455–462.

[42] M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski. *J. Phys. A: Math. Gen.* **24:21** (1991) 5043–5061.

Преобразования Бэклунда

Параметры β_j можно менять преобразованиями $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ (но все α_j фиксированы, с точностью до перестановок).

Преобразования A_k тривиальны и только меняют знак β_k, что фактически не меняет уравнения:

$$A_k: \quad \begin{cases} \tilde{q}_j = q_j, \\ \tilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k, \quad \tilde{\beta}_k = -\beta_k. \end{cases}$$

Преобразование B_k выводится из преобразования Дарбу для $-D^2 + u$, определяемого по вспомогательной функции $f_k = \psi_{k,x}/\psi_k$, где ψ_k отвечает $\lambda = \alpha_k$:

$$B_k: \quad \begin{cases} f_k = \dfrac{q_{k,x} + \beta_k}{2q_k}, \\ \tilde{q}_j = \dfrac{(q_{j,x} - 2q_j f_k)^2 - \beta_j^2}{4(\alpha_j - \alpha_k) y_j}, \quad \tilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k, \\ \tilde{q}_k = -q_k + 6t(f_k^2 + \alpha_k) - x - \displaystyle\sum_{j \neq k} (\tilde{q}_j + q_j), \quad \tilde{\beta}_k = 1 - \beta_k. \end{cases}$$

Преобразования A_j, B_k сохраняют вид уравнений (25), (26), (27). Эти преобразования инволютивны и перестановочны при $j \neq k$:

$$A_k^2 = \mathrm{id}, \quad A_j A_k = A_k A_j, \quad B_k^2 = \mathrm{id}, \quad B_j B_k = B_k B_j, \quad A_j B_k = B_k A_j, \quad j \neq k.$$

Группа, порожденная $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ изоморфна $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}^n$.

Негативная симметрия и неавтономные редукции для цепочки Вольтерры

Иерархия цепочки Вольтерры

Цепочка Вольтерры [43]:

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

Оператор рекурсии [45]:

$$R = u_n + u_n(u_{n+1}T^2 - u_{n-1}T^{-1})(T-1)^{-1}\frac{1}{u_n}, \qquad T: n \mapsto n+1$$

Высшие симметрии:

$$u_{n,t_i} = R^{i-1}(u_{n,x}) = u_n(T - T^{-1})(h_n^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $h_n^{(i)}$ — однородный многочлен от $u_{n-i+1}, \dots, u_{n+i-1}$.

[43] S.V. Manakov, JETP 40:2, 1975.

[44] D. Levi, J. Phys. A 14:5, 1981.

[45] W. Oevel, H. Zhang, B. Fuchssteiner, Progr. Theor. Phys. 81:2, 1989

В частности, система Леви [44] ассоциирована с потоками $\partial_x = \partial_{t_1}$ и $\partial_t = \partial_{t_2}$:

$$u_{n,t} = u_n(T - T^{-1})\big(u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1})\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$u_t = -u_{xx} + (2uv + u^2)_x, \quad v_t = v_{xx} + (2uv + v^2)_x,$$

где $u = u_n$, $v = u_{n+1}$.

Как и в случае КдФ, есть дополнительные некоммутативные симметрии

$$u_{n,\tau_j} = R^{j-1}(u_{n,\tau_1}).$$

Первые два потока локальны:

scaling	$u_{n,\tau} = u_{n,\tau_1} = u_n + xu_{n,x} + 2tu_{n,t} + 3t_3u_{n,t_3} + \dots$
master-symmetry	$u_{n,\tau_2} = xu_{n,t} + u_n((n+3)u_{n+1} + u_n - nu_{n-1})$,

следующие нелокальны.

Негативная симметрия

Делаем как для КдФ:

$$u_{n,z} = (R-\alpha)^{-1}(u_{n,x}) \quad \Leftrightarrow \quad (R-\alpha)(u_{n,z}) = u_n(u_{n+1}-u_{n-1}).$$

Член $(T-1)^{-1}$ в

$$R = u_n + u_n(u_{n+1}T^2 - u_{n-1}T^{-1})(T-1)^{-1}\frac{1}{u_n}$$

выдает $u_n(u_{n+1}-u_{n-1})$ с произвольной константой интегрирования, поэтому это можно заменить на

$$Ru_{n,z} = \alpha u_{n,z}.$$

Чтобы проинтегрировать, положим $u_{n,z} = u_n(G_{n+1}-G_n)$, тогда

$$u_n^2(G_{n+1}-G_n) + u_n(u_{n+1}G_{n+2} - u_{n-1}G_{n-1}) = \alpha u_n(G_{n+1}-G_n) \quad \Rightarrow$$

$$(T+1)(u_nG_{n+1} - u_{n-1}G_{n-1}) - \alpha(G_{n+1}-G_n) = 0.$$

Чтобы проинтегрировать еще раз, положим $G_n = q_n + q_{n-1}$, тогда

$$u_n(q_{n+1} + q_n) - u_{n-1}(q_{n-1} + q_{n-2}) - \alpha(q_n - q_{n-1}) + (-1)^n\beta = 0,$$

что допускает интегрирующий множитель $q_n + q_{n-1}$.

В результате, приходим к негативной симметрии

$$u_{n,z} = u_n(q_{n+1} - q_{n-1}),$$

где q_n — нелокальность, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} u_n(q_{n+1} + q_n)(q_n + q_{n-1}) = \alpha q_n^2 + (-1)^n\beta q_n + \gamma, \\ q_{n,t_i} = h^{(i)}_{n,z}. \end{cases}$$

Производящая функция для высших симметрий

Так как $u_{n,z}=(R-\alpha)^{-1}(u_{n,x})=-\alpha^{-1}u_{n,t_1}-\alpha^{-2}u_{n,t_2}-\dots$, где $u_{n,t_i}=u_n(T-T^{-1})(h^{(i)}_n)$, то q_n — производящая функция для $h^{(i)}_n$.

Многочлены $h^{(i)}_n(u_{n-i+1},\dots,u_{n+i-1})$, определяющие высшие симметрии VL, служат коэффициентами формального ряда

$$q_n=h^{(0)}_n+\frac{h^{(1)}_n}{\alpha}+\frac{h^{(2)}_n}{\alpha^2}+\dots,\quad h^{(0)}_n=\frac{1}{2},$$

удовлетворяющего уравнению

$$u_n(q_{n+1}+q_n)(q_n+q_{n-1})=\alpha q_n^2-\frac{\alpha}{4},$$

что равносильно явным рекуррентным соотношениям

$$h^{(i+1)}_n=u_n\sum_{s=0}^{i}\big(h^{(s)}_{n+1}+h^{(s)}_n\big)\big(h^{(i-s)}_n+h^{(i-s)}_{n-1}\big)-\sum_{s=1}^{i}h^{(s)}_n h^{(i+1-s)}_n. \qquad (28)$$

Дискретные струнные уравнения

Как и в непрерывном случае, общая связь

$$A[R](u_{n,x}) + B[R](u_{n,\tau}) = 0$$

эквивалентна (в предположении, что нули B простые) уравнению

$$u_{n,\tau} = (R-\alpha^1)^{-1}(u_{n,x}) + \dots + (R-\alpha^m)^{-1}(u_{n,x}).$$

Простейшие редукции Пенлеве-типа

$u_{n,\tau_1} = 0$:

$$4tu_n(u_{n+1}+u_n+u_{n-1}) + 2xu_n + n - \delta + (-1)^n\varepsilon = 0 \qquad (\mathrm{dP}_1)$$

$u_{n,\tau_2} - \alpha u_{n,\tau_1} - \delta u_{n,x} = 0$:

$$(q_{n+1}+q_n)(q_n+q_{n-1}) = 2x\frac{\alpha q_n^2 + (-1)^n\beta q_n + \gamma_n}{q_n - n + \delta - (-1)^n\varepsilon} \qquad (\mathrm{dP}_{34})$$

[46] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev. *Commun. Math. Phys.* **142** (1991) 313–344.

[47] V.E. Adler, A.B. Shabat. *Theoret. Math. Phys.* **201:1** (2019) 1442–1456.

n-компонентный аналог dP$_{34}$

Уравнение $A[R](u_{n,x}) + B[R](u_{n,\tau}) = 0$ эквивалентно неавтономной системе OΔE

$$u_n(q^j_{n+1} + q^j_n)(q^j_n + q^j_{n-1}) = \alpha^j (q^j_n)^2 + (-1)^n \beta^j q^j_n + \gamma^j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{29}$$

$$2\sum_{i=1}^{r} i t_i h^{(i)}_n + n - \delta + (-1)^n \varepsilon = q^1_n + \dots + q^m_n \tag{30}$$

где $h^{(i)}_n$ — многочлены, определенные рекуррентной формулой (28). Эта система совместна с дифференцированиями

$$u_{n,t_i} = u_n(h^{(i)}_{n+1} - h^{(i)}_{n-1}), \quad q^j_{n,t_i} = h^{(i)}_{n,z_j}.$$

При $r = 1$, связь (30) принимает вид

$$u_n = \frac{1}{2x}\left(q^1_n + \dots + q^m_n - n + \delta - (-1)^n \varepsilon\right).$$

Преобразования Бэклунда

Пусть все $\alpha^j \ne 0$, $\beta^j = 0$ и $\gamma^j = -\alpha^j(\omega^j)^2$. Определим преобразования

$$A_k: \quad \tilde\omega^k = -\omega^k;$$

$$B_k: \quad \begin{cases} \tilde u_n = u_n \dfrac{(q^k_{n+1} - \omega^k)(q^k_{n-1} + \omega^k)}{(q^k_n)^2 - (\omega^k)^2}, \quad \tilde\omega^k = 1 - \omega^k, \quad \tilde\varepsilon = -\varepsilon, \\ \tilde q^j_n = \dfrac{1}{\alpha^j - \alpha^k}\Bigg((\alpha^j + \alpha^k) q^j_n - \alpha^k (q^k_n + \omega^k) \dfrac{q^j_{n+1} + q^j_n}{q^k_{n+1} + q^k_n} \\ \qquad\qquad - \alpha^k (q^k_n - \omega^k) \dfrac{q^j_n + q^j_{n-1}}{q^k_n + q^k_{n-1}} \Bigg), \quad j \ne k, \\ \tilde q^k_n = -\displaystyle\sum_{j \ne k} \tilde q^j_n + 2 \sum_{i=1}^{r} i t_i h^{(i)}_n(\tilde u_{n-i+1}, \dots, \tilde u_{n+i-1}) + n - \delta - (-1)^n \varepsilon. \end{cases}$$

Преобразования A_k, B_k сохраняют уравнения (29), (30) и удовлетворяют тождествам

$$A_k^2 = \mathrm{id}, \quad A_jA_k = A_kA_j, \quad B_k^2 = \mathrm{id}, \quad B_jB_k = B_kB_j, \quad A_jB_k = B_kA_j, \quad j \neq k.$$

Группа порожденная $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ изоморфна $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}^n$.