Цепочки Богоявленского и обобщённые числа Каталана

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау

2 декабря 2022

arXiv:2202.02555

План

1. распад ступеньки при обрыве цепочки Богоявленского BL_p
2. детерминантные формулы, тау-функции, гипергеометрия
3. обобщённые числа Каталана
4. симметрийные редукции

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & \\
 & 2 \arrow[u] & \\
3 \arrow[ur, <->] & & 4 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$p = 1$, цепочка Вольтерры:
Кулаев, Шабат 2019 (1)
Адлер, Шабат 2018 (3) $\leftrightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1)
Адлер, Шабат 2019 (4) $\rightarrow$ (2)

Обобщённые числа Каталана

$$C^p_{j,n}=\frac{j}{pn+j}\binom{(p+1)n+j-1}{n}=\frac{j}{(p+1)n+j}\binom{(p+1)n+j}{n}$$

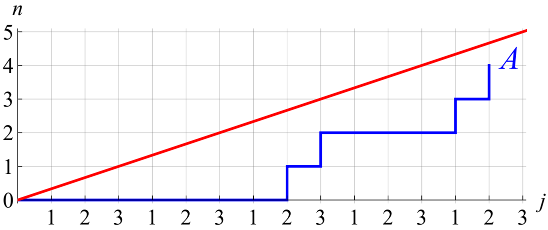
p	$j\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7		OEIS
1	1	1	1	2	5	14	42	132	429	...	A000108
2	1	1	1	3	12	55	273	1428	7752	...	A001764
	2	1	2	7	30	143	728	3876	21318	...	A006013
3	1	1	1	4	22	140	969	7084	53820	...	A002293
	2	1	2	9	52	340	2394	17710	135720	...	A069271
	3	1	3	15	91	612	4389	32890	254475	...	A006632
4	1	1	1	5	35	285	2530	23751	231880	...	A002294

...

- первая строчка, $p = j = 1$: числа Каталана (Catalan 1838)
- строчки $j = 1$ при $p > 1$: числа Пфаффа–Фусса–Каталана или последовательности Реньи (Fuss 1791, Graham, Knuth & Patashnik 1990)
- вся таблица: Hilton & Pedersen 1991
- ОЧК определены при всех j, но обычно рассматривают только j от 1 до p или до $p + 1$

Одна из многих комбинаторных интерпретаций:

> $C^p_{j,n}$ равно числу путей из точки $(0,0)$ в точку $(pn+j,n)$, лежащих строго ниже прямой $j=pn$, если разрешено двигаться только на единицу вправо или вверх.



В точку $A=(3\cdot 4+2,4)$ ведёт $C^3_{2,4}=340$ путей

Приложения (помимо комбинаторных):

- Статфизика, теория случайных матриц. Ансамбль из $n \times n$ матриц G, элементы которых — независимые комплексные случайные числа с гауссовским распределением $N(0,1/n)$, имеет, при $n \to \infty$, равномерное распределение спектра по единичному кругу (Ginibre 1965). Для матриц $GG^\dagger$ спектр положителен и при $n \to \infty$ описывается распределением Марченко–Пастура (1967). Его моменты — ЧК. Для произведения $G_1 \cdots G_p (G_1 \cdots G_p)^\dagger$ возникает распределение, моменты которого равны ОЧК (Penson & Życzkowski 2011).
- В работах Kodama & Pierce 2009, Takasaki 2018 ЧК связываются с бездисперсионной цепочкой Тоды.
- ЧК и многочлены Чебышева:
  Артисевич, Бычков, А.Б. Шабат 2020, Бычков, Г.Б. Шабат 2021.

Производящая функция

Обобщенный гипергеометрический ряд (у нас будет $q = p$):

$$
{}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!},
$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$. Если $p < q+1$, то ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$.

Утверждение 1

При фиксированном p и $j = \overline{1, p+1}$, EGF последовательности $C^p_{j,n}$ равна

$$
\begin{aligned}
f_j(t) &= C^p_{j,0} + C^p_{j,1} t + C^p_{j,2} \frac{t^2}{2!} + \dots + C^p_{j,n} \frac{t^n}{n!} + \dots \\
&= {}_pF_p \left(\frac{j}{p+1}, \dots, \widehat{1}, \dots, \frac{j+p}{p+1}; \frac{j+1}{p}, \dots, \frac{j+p}{p}; \frac{(p+1)^{p+1}}{p^p} t \right),
\end{aligned}
$$

где $\widehat{1}$ в первой группе параметров обозначает исключённое значение (то есть, числители изменяются от j до $j+p$ с пропуском $p+1$).

Детерминантные тождества

Отображение Ханкеля для чисел Каталана — единичная последовательность.

Утверждение 2 (Aigner 1999)

Числа Каталана $c_n = C^1_{1,n}$ $(1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots)$ удовлетворяют равенствам (и однозначно определяются ими)

$$c_0 = c_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dots$$
$$= \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \dots & \dots & \dots \\ c_k & \dots & c_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k+1} & \dots & c_{2k+1} \end{vmatrix} = \dots = 1.$$

Для $p > 1$ тоже есть обобщение.

Утверждение 3 (Krattenthaler, 2010)

Числа $C^p_{j,n}$ удовлетворяют равенствам (и однозначно определяются ими)

$$\det\left(C^p_{1+(i+k-1)\bmod p,\,\lfloor\frac{i+k-1}{p}\rfloor+n}\right)\Big|_{k,n=0}^{m}=1,\quad \text{при}\quad i=\overline{1,p+1}.$$

Например (опуская верхний индекс $p=3$),

$$1=C_{1,0}=C_{2,0}=C_{3,0}=C_{1,1}$$
$$=\begin{vmatrix}C_{1,0}&C_{2,0}\\C_{1,1}&C_{2,1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{2,0}&C_{3,0}\\C_{2,1}&C_{3,1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{3,0}&C_{1,1}\\C_{3,1}&C_{1,2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{1,1}&C_{2,1}\\C_{1,2}&C_{2,2}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}C_{1,0}&C_{2,0}&C_{3,0}\\C_{1,1}&C_{2,1}&C_{3,1}\\C_{1,2}&C_{2,2}&C_{3,2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{2,0}&C_{3,0}&C_{1,1}\\C_{2,1}&C_{3,1}&C_{1,2}\\C_{2,2}&C_{3,2}&C_{1,3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{3,0}&C_{1,1}&C_{2,1}\\C_{3,1}&C_{1,2}&C_{2,2}\\C_{3,2}&C_{1,3}&C_{2,3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_{1,1}&C_{2,1}&C_{3,1}\\C_{1,2}&C_{2,2}&C_{3,2}\\C_{1,3}&C_{2,3}&C_{3,3}\end{vmatrix}=\dots$$

и эти равенства однозначно определяют последовательность

$$C_{1,0},\ C_{2,0},\ C_{3,0},\ C_{1,1},\ C_{2,1},\ C_{3,1},\ C_{1,2},\ C_{2,2},\ C_{3,2},\ C_{1,3},\ C_{2,3},\ C_{3,3},\ \dots$$

Цепочки Богоявленского

Цепочка Богоявленского порядка p имеет вид

$$u_j' = u_j(u_{j+p} + \dots + u_{j+1} - u_{j-1} - \dots - u_{j-p}), \quad j \in \mathbb{Z}, \qquad (\mathrm{BL}_p)$$

где $u_j = u_j(t) \in \mathbb{R}$, $u' = du/dt$.

- $p = 1$ (цепочка Вольтерры, ленгмюровская цепочка): Манаков 1974, Kac & van Moerbeke 1975
- $p > 1$: Narita 1982, Itoh 1987, Богоявленский 1988, 1991

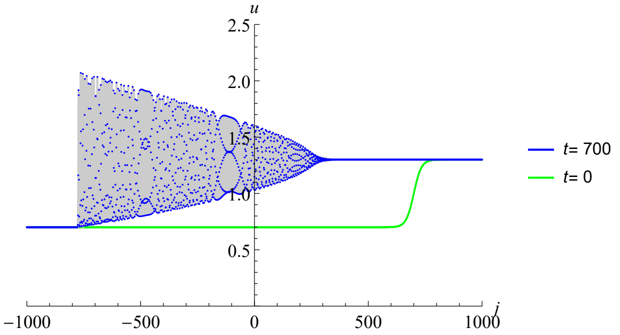
Интерпретация «хищники–жертвы»

Переменная u_j — численность вида j в подходящих единицах.

Вид j питается видами $j+1, \dots, j+p$ и, соответственно, служит пищей для видов $j-p, \dots, j-1$. Поэтому цепочки с $p > 1$ иногда называют «голодными цепочками Вольтерры».

Распадные решения

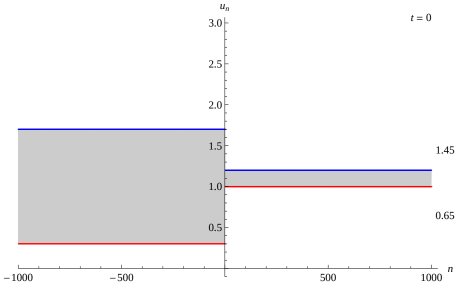
Любая константа — стационарное решение цепочки. Что произойдет с начальными данными, равными разным постоянным при $n \to -\infty$ и $n \to +\infty$? Это довольно сложная задача. Непрерывный предел не работает.



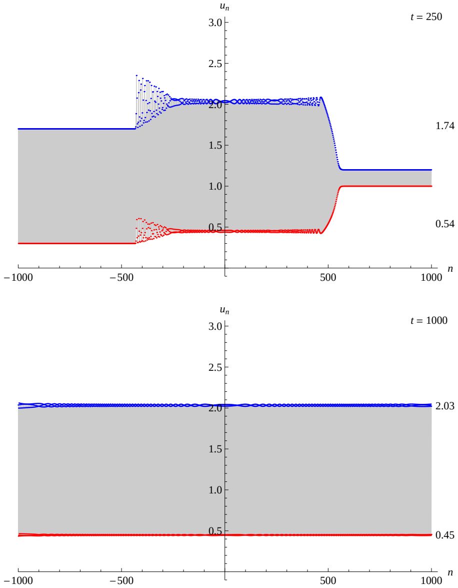
Концептуально, это напоминает задачу Гуревича–Питаевского о ступеньке для КдФ.

Можно также чередовать константы в четных и нечетных узлах (есть и более сложные стационарные решения). Есть некоторые результаты (1-зонная асмиптотика) для $p = 1$ (Верещагин 1997).

Численный пример ($p = 1$); разные константы для четных (красные) и нечетных n (синие).



Решение при $t = 250$ и $t = 1000$:

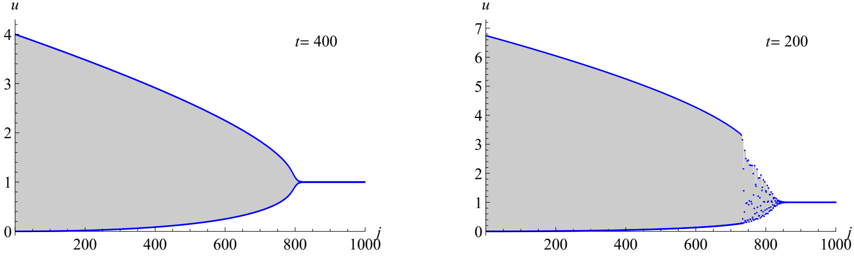


Нулевой обрыв

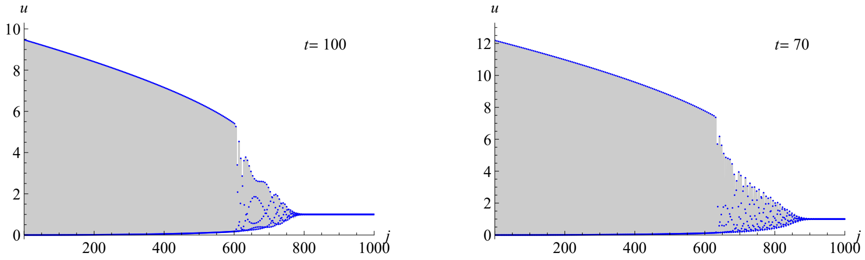
Ситуация упрощается при ограничении на полупрямую. Основная задача — исследовать распад **единичной ступеньки**

$$\dots = u_{-2}(t) = u_{-1}(t) = u_0(t) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0) = \dots = 1.$$

У u_1 враги исчезли, а пища осталась. Значит, u_1 будет быстро расти и пожирать $u_2, \dots, u_{p+1}$. В результате, через некоторое время начнёт расти u_{p+2}, и так далее, по принципу домино.
Если сравнивать с задачей ГП, это напоминает задний край волны сжатия. Но оказывается проще, благодаря обрыву на полупрямую.



$p = 1,\ u_1 \to 4$ $\qquad$ $p = 2,\ u_1 \to 6.75$



$p = 3,\ u_1 \to 9.5$ $\qquad$ $p = 4,\ u_1 \to 12.2$

- К какой константе стремятся переменные $u_{1+(p+1)k}(t)$ при $t \to +\infty$?
- С какой скоростью растет распадная зона?

Результаты

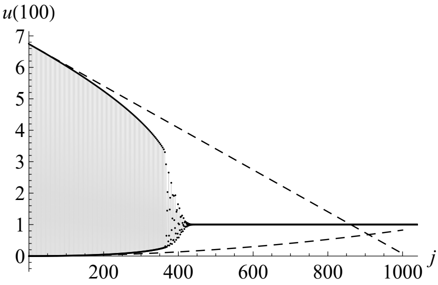
- В случае единичной ступеньки задача Коши является точно-решаемой, в том смысле, что функции $u_1(t),\dots,u_p(t)$ определяются точно. Именно, эти функции — рациональные выражения от гипергеометрических функций типа ${}_pF_p$, служащих экспоненциальными производящими функциями для ОЧК.

- Отсюда можно найти асимптотику для $u_1(t),\dots,u_p(t)$ и далее распространить её на все $j>0$. В частности,

$$u_{1+(p+1)k}(t)\to\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p},\qquad t\to+\infty.$$

- Оценка для скорости распадной точки $j=vt$:

$$v<\frac{(p+1)^{p+2}}{2p^p}.$$



Первый подход: детерминантные формулы

Вычислительный эксперимент. Будем строить решение в виде ряда

$$u_j(t) = u_j(0) + u_j'(0)t + u_j''(0)\frac{t^2}{2} + \dots + u_j^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Производная $u_j^{(n)}(t)$ вычисляется в силу цепочки как многочлен от $u_{j-rn}, \dots, u_{j+rn}$, после чего остаётся подставить $t = 0$. Это не очень эффективно, но несколько коэффициентов ряда Тейлора найти несложно.

Единичная ступенька — это «волшебные» начальные данные, приводящие к чему-то известному для $u_1(t)$. Оказывается, что

$$u_1 = \frac{w_1'}{w_1},$$

где w_1 — EGF для $C^p_{1,n}$.

Чтобы доказать это и обобщить для всех j, нужно сравнить детерминантные формулы для цепочки с Утверждениями 2 и 3.

Тау-функции для цепочки

Утверждение 4

Решение цепочки Богоявленского представляется в виде

$$u_j = \frac{w'_j}{w_j} - \frac{w'_{j-1}}{w_{j-1}},$$

где w_j удовлетворяет билинейной цепочке

$$w_{j-1}w'_j - w'_{j-1}w_j = w_{j-p-1}w_{j+p}. \tag{1}$$

Нулевому обрыву $u_j(t) = 0$, $j \le 0$, отвечает обрыв

$$w_{-2p}(t) = \dots = w_{-p-1}(t) = 0, \quad w_{-p}(t) = \dots = w_0(t) = 1.$$

В свою очередь, общее решение билинейной цепочки выражается через определители, построенные по p произвольным функциям по той же схеме, что определители из Утверждения 3.

Утверждение 5

Общее решение (1) на полупрямой $j > 0$ имеет вид

$$w_j = \det\left(f_{1+(i+k-1) \bmod p}^{(\lfloor \frac{i+k-1}{p} \rfloor + n)}\right)\Big|_{k,n=0}^{m} \quad \text{при} \quad j = i + m(p+1), \; i = \overline{1, p+1},$$

где $f_1, \dots, f_p$ произвольные гладкие функции от t.

Пример при $p = 1$ ($f = f_1$):

$$w_1 = f, \quad w_2 = f', \quad w_3 = \begin{vmatrix} f & f' \\ f' & f'' \end{vmatrix}, \quad w_4 = \begin{vmatrix} f' & f'' \\ f'' & f''' \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$w_{2k+1} = \begin{vmatrix} f & \dots & f^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)} & \dots & f^{(2k)} \end{vmatrix}, \quad w_{2k+2} = \begin{vmatrix} f' & \dots & f^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k+1)} & \dots & f^{(2k+1)} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Пример при $p = 3$: выписываем последовательность

$$\underline{f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad f_1'}, \quad f_2', \quad f_3', \quad f_1'', \quad f_2'', \quad f_3'', \quad f_1''', \quad f_2''', \quad f_3''', \quad \dots \tag{2}$$

и строим вронскианы группами по $p + 1 = 4$, с подчёркнутыми элементами в левом верхнем углу:

$$w_1 = f_1, \quad w_2 = f_2, \quad w_3 = f_3, \quad w_4 = f_1',$$

$$w_5 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}, \quad w_6 = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ f_2' & f_3' \end{vmatrix}, \quad w_7 = \begin{vmatrix} f_3 & f_1' \\ f_3' & f_1'' \end{vmatrix}, \quad w_8 = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix},$$

$$w_9 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}, \quad w_{10} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & f_1' \\ f_2' & f_3' & f_1'' \\ f_2'' & f_3'' & f_1''' \end{vmatrix}, \quad w_{11} = \begin{vmatrix} f_3 & f_1' & f_2' \\ f_3' & f_1'' & f_2'' \\ f_3'' & f_1''' & f_2''' \end{vmatrix}, \quad w_{12} = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Элементы в правом нижнем углу образуют исходную последовательность (2). Если все $w_j \neq 0$, то преобразование от (2) к w_j обратимо.

Следствие

Решение билинейной цепочки, построенное по EGF $f_1, \dots, f_p$ для ОЧК (Утверждение 1) удовлетворяет начальным данным $w_j(0) = 1$ при всех $j \ge -p$.

Функции $u_j = \dfrac{w_{j-p-1} w_{j+p}}{w_{j-1} w_j}$ дают решение цепочки Богоявленского начальным условием $u_0 = 0$, $u_j(0) = 1$, $j > 0$.

Второй подход: симметрийные редукции

Цепочку можно превратить в конечномерную систему, наложив связь, совместную с динамикой. Если возможно подобрать связь так, чтобы выполнялось нужное нам начальное условие при $t=0$, то решение с таким начальным условием удовлетворяет связи при всех t.

Стандартный источник редукций — стационарные уравнения для симметрий. Пусть $u_t=f[u]$ и $u_\tau=g[u]$ симметрии, то есть

$$[\partial_t,\partial_\tau]=0.$$

Тогда стационарное уравнение $g=0$ определяет инвариантное подмногообразие:

$$\partial_t(g)=0\big|_{g=0}.$$

$p = 1$: редукция для цепочки Вольтерры

Цепочка Вольтерры

$$u_{j,t} = u_j(u_{j+1} - u_{j-1})$$

имеет следующие симметрии:

$$\begin{aligned}
\text{высшая симметрия:}\quad & u_{j,t_2} = u_j(T - T^{-1})\big(u_j(u_{j+1} + u_j + u_{j-1})\big),\\
\text{скейлинг:}\quad & u_{j,\tau_0} = tu_{j,t} + u_j,\\
\text{мастер-симметрия:}\quad & u_{j,\tau_1} = tu_{j,t_2} + u_j\big((j + \tfrac{3}{2})u_{j+1} + u_j - (j - \tfrac{3}{2})u_{j-1}\big).
\end{aligned}$$

Стационарное уравнение

$$u_{j,\tau_1} - 4au_{j,\tau_0} - du_{j,t} = 0$$

— 5-точечное разностное уравнение, но порядок понижается до 3-точечного.

Утверждение 6 (Адлер, Шабат 2019)

Цепочка Вольтерры совместна со связью

$$(q_{j+1}+q_j)(q_j+q_{j-1})u_j-4(aq_j^2+(-1)^j bq_j+c)=0, \tag{3}$$

где $q_j:=2tu_j+j-d$.

- это дискретное уравнение Пенлеве dP_{34} (Grammaticos, Ramani 2014);
- связь (3) превращает цепочку Вольтерры, для каждой переменной u_j, в ОДУ эквивалентное P_5 (при $a\ne0$) или P_3 (при $a=0$);
- при дополнительном ограничении на полупрямую Пенлеве вырождается в гипергеометрию.

При $t=0$ связь (3) превращается в явное уравнение

$$u_j(0)=\frac{4a(j-d)^2+(-1)^j b(j-d)+c}{4(j-d)^2-1}.$$

Решение цепочки Вольтерры с такими специальными начальными данными удовлетворяет связи (3) при всех t.

При выборе $a=1$, $b=0$, $d=-1/2$ и $c=-1/4$ получаем обрыв в нуле и единичную ступеньку: $u_0(0)=0$, $u_j(0)=1$, $j>0$.

При этом уравнение цепочки при $j=1$ сводится к уравнению Риккати

$$u_1'+u_1^2+\Big(\frac{2}{t}-4\Big)u_1-\frac{2}{t}=0,\quad u_1(0)=1,$$

и линеаризуется подстановкой $u_1=f'/f$:

$$f''+\Big(\frac{2}{t}-4\Big)f'-\frac{2}{t}f=0,\quad f(0)=1,\quad f'(0)=1.$$

Это и определяет гипергеометрическую функцию

$$f(t)={}_1F_1(\tfrac{1}{2},2,4t).$$

$p > 1$: редукция для BL_p

Сложность задачи в катастрофическом усложнении мастер-симметрии. Уже при $p = 2$ она нелокальна (Zhang, Tu, Oevel & Fuchssteiner 1991). Формально, её можно записать, как результат применения оператора рекурсии R к скейлингу $u_{j,\tau_0} = u_j$:

$$u_{j,\tau_1} = R(u_j),$$

но сам R очень сложен (Wang 2012):

$$R = u_j(T - T^{-p})(T-1)^{-1} \prod_{i=1}^{\overset{\curvearrowright}{p}} (T^{p+1-i}u_j - u_j T^{-i})(T^{p-i}u_j - u_j T^{-i})^{-1}.$$

При $p = 2$ можно выписать, при помощи компьютера, громоздкую 9-точечную связь, и проверить, что она действительно обслуживает единичную ступеньку. Вытащить из неё гипергеометрию можно, но очень трудно. При $p = 3$ вычисления безнадёжны.

Тем не менее, нужная связь может быть записана в новых переменных. Перейдем к модифицированной цепочке Богоявленского

$$v'_j = (c - v_j)v_j(v_{j+1} \cdots v_{j+p} - v_{j-1} \cdots v_{j-p}),$$

связанной с BL_p подстановкой типа Миуры

$$u_j = v_j \cdots v_{j+p-1}(c - v_{j+p}).$$

Утверждение 7

Эта цепочка совместна с $(2p+1)$-точечным разностным уравнением

$$G_j = t(c - v_j)\left(\sum_{s=0}^{p} v_{j-p+s} \cdots v_{j+s} - c\sum_{s=1}^{p} v_{j-p+s} \cdots v_{j+s-1}\right) + b_j v_j - ca_j = 0,$$

где b_j, a_j — параметры такие, что $b_{j+p} = b_j + 1$, $a_{j+p+1} = a_j + 1$.

Это обобщение дискретного уравнения Пенлеве для случая $p = 1$.

При дополнительном обрыве на полупрямую уравнения линеаризуются.

Утверждение 8

Пусть параметры $c \neq 0$, $a_0 = 0$, $a_j \neq 0$, $b_j \neq 0$ при $j > 0$. Тогда решение цепочки BL_p с обрывом $u_j = 0$ при $j \leq 0$ и начальными данными

$$u_1(0) = c^{p+1}\frac{a_j \cdots a_{j+p-1}}{b_j \cdots b_{j+p-1}}, \quad u_j(0) = c^{p+1}\frac{(b_{j-1} - a_{j-1})a_j \cdots a_{j+p-1}}{b_{j-1} \cdots b_{j+p-1}}, \quad j > 1,$$

строится по детерминантным формулам с функциями

$$f_j = {}_pF_p(a_j, \dots, \widehat{1}, \dots, a_{j+p}; b_j, \dots, b_{j+p-1}; c^{p+1}t), \quad j = 1, \dots, p,$$

где $\widehat{1}$ обозначает исключённое значение $a_{p+1} = 1$ в первой группе параметров.

В частности, единичная ступенька получается при выборе

$$a_j = j/(p+1), \quad b_j = (j+1)/p, \quad c^{p+1} = (p+1)^{p+1}/p^p.$$

Заключение

1 распад ступеньки
2 детерминантные формулы, тау-функции, гипергеометрия
3 обобщённые числа Каталана
4 симметрийные редукции

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ & 2 \arrow[u] & \\ 3 \arrow[ur, leftrightarrow] & & 4 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- Путь (3) $\to$ (2) $\to$ (1) основан на детерминантном тождестве для ОЧК.
- Путь (4) $\to$ (2) $\to$ (1) более общий: больше параметров, детерминанты фактически не нужны. Наоборот, это даёт альтернативное доказательство тождества для ОЧК.
- С другой стороны, если бы не ОЧК, вряд ли бы эта редукция была замечена.