# Некоторые результаты о уравнениях типа Пенлеве порядков 4 и 5

*Реферативный доклад по статьям Cosgrove*

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау

Семинар сектора матфизики · 15 сентября 2021

# Классификация после Пенлеве

- Уравнения $y'' = R(x,y,y')$, рациональные по $y, y'$
  - Painlevé, Gambier (1906): классификация
- Уравнения $y''' = R(x,y,y',y'')$, при разных предположениях
  - Chazy (1907): примеры (все сводятся к Пенлеве)
  - Bureau (1964): частичная классификация
- Уравнения $(y'')^2 = A(x,y,y')y'' + B(x,y,y')$, рациональные по $y, y'$
  - Chazy (1909): примеры (10, все сводятся к Пенлеве)
  - Bureau (1972): частичная классификация
  - Cosgrove & Scoufis (1993): классификация при $A = 0$

C.M. Cosgrove. Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. *Studies in Appl. Math.* **104:3** (2000) 171–228.

C.M. Cosgrove. Chazy's second-degree Painlevé equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 11955–11971.

- Уравнения $y^{(4)} = \dots$ полиномиальные по $y$ и производным
  - Bureau (1964), Exton (1971), Мартынов (1973): частичная классификация
  - Cosgrove (2000): классификация для символа $P2$
  - Cosgrove (2006): классификация для символа $P1$
- Уравнения $y^{(5)} = \dots$, полиномиальные по $y$ и производным
  - Cosgrove (2000): классификация для символа $P2$

Символ Бюро $Pk$ означает, что ряд Лорана начинается с $(x - x_0)^{-k}$.
⚠ В частности, $\mathrm{P}_1$ имеет символ $P2$, а $\mathrm{P}_2$ — символ $P1$.

Проверено, что в полиномиальных уравнениях порядков 4, 5 других символов не бывает; в рациональных и алгебраических по старшей производной — бывают.

C.M. Cosgrove. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol $P2$. *Studies in Appl. Math.* **104:1** (2000) 1–65.

C.M. Cosgrove. Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II. Bureau symbol $P1$. *Studies in Appl. Math.* **116:4** (2006) 321–413.

В этих же и последующих работах для полученных уравнений довольно подробно исследованы преобразования Бэклунда и семейства специальных решений.

**Дополнительная литература**

P.R. Gordoa, A. Pickering. On a new non-isospectral variant of the Boussinesq hierarchy. *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 557–567.

P.R. Gordoa, A. Pickering. New integrable equations of fourth order and higher degree related to Cosgrove's equation. *J. Math. Phys.* **42:4** (2001) 1697–1707.

N.A. Kudryashov. Fourth-order analogies to the Painlevé equations. *J. Phys. A* **35** (2002) 4617–4632.

F. Jrad, U. Muğan. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painlevé test. *Z. Naturforsch.* **60a** (2005) 387–400.

Далее в докладе я опишу некоторые результаты Косгрова для уравнений порядков 4 и 5 (в основном лишь для символа $P2$), и добавлю собственные замечания:

— упрощенная иллюстрация анализа резонансов на *Mathematica*,

— операторные представления $[A, L] = 1$ для некоторых уравнений,

— связь Fif-II с матричным $\mathrm{P}_1$.

# Типы уравнений

Разбиение по виду редуцированного уравнения (= главная часть по однородности).

Символ $P2$ (однородность $y : D = 2 : 1$, где $D = d/dx$)

- $y^{(4)} = ayy'' + b(y')^2 + cy^3$
  уравнения F-I, II, III, IV, V, VI
- $y^{(5)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'$
  уравнения Fif-I, II, III, IIIb, IV, IVb, IVc

Символ $P1$ (однородность $y : D = 1 : 1$)

- $y^{(4)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'' + dy(y')^2 + ey^3y' + fy^5$
  уравнения F-VII,...,F-XIX

В символах коэффициенты постоянны, но в полных уравнениях они могут быть функциями от $x$, плюс добавляются младшие члены.

# Символ Бюро $P2$

Однородность $y : D = 2 : 1$

## Уравнения с главной частью $y^{(4)} = ayy'' + b(y')^2 + cy^3$

$$y^{(4)} = 12yy'' + 12(y')^2 + (\alpha x + \beta)y' + 2\alpha y - \tfrac{1}{6}(\alpha x + \beta)^2, \qquad \text{F-I}$$

$$y^{(4)} = 3yy'' - 4(y')^2, \qquad \text{F-II}$$

$$y^{(4)} = 15yy'' + \tfrac{45}{4}(y')^2 - 15y^3 + \alpha y + \beta, \qquad \text{F-III}$$

$$y^{(4)} = 30yy'' - 60y^3 + \alpha y + \beta, \qquad \text{F-IV}$$

$$y^{(4)} = 20yy'' + 10(y')^2 - 40y^3 + \alpha y + \kappa x + \beta, \qquad \text{F-V}$$

$$y^{(4)} = 18yy'' + 9(y')^2 - 24y^3 + \alpha y^2 + \tfrac{1}{9}\alpha^2 y + \kappa x + \beta. \qquad \text{F-VI}$$

Этот список не нужно воспринимать так же серьезно, как канонический список $P_1$–$P_6$, так как здесь не все уравнения одинаково интересны. Скорее, это аналог невычищенного списка из 50 уравнений в книге Айнса:

- порядок F-I понижается до второго и общее решение выражается через $P_4$, $P_2$ или $P_1$, в зависимости от значений параметров. Это уравнение было найдено Шази (1911). Оно может быть получено редукцией из уравнения Буссинеска.
- F-II, или *Bureau barrier equation*, включено в список несмотря на то, что оно не обладает свойством Пенлеве, просто автор считает его важным.
- F-III и F-IV автономны и решаются в гипер-эллиптических функциях рода 2; это же верно для F-V и F-VI при $\kappa = 0$ (Косгров).
- лишь F-V и F-VI при $\kappa \neq 0$ определяют новые трансценденты.
- F-V хорошо известно — это знаменитое струнное уравнение = стационар КдФ-5 + Галилей (Мур, Сулейманов & Кудашев, Дубровин и др.), член иерархии $P_1$.
- F-VI было открыто Косгровом в процессе классификации. Вскоре было показано, что оно получается редукцией из иерархии уравнений типа Буссинеска (Gordoa & Pickering 2000).

## Уравнения с главной частью $y^{(5)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'$

$$y^{(5)} = 15yy''' + \tfrac{75}{2}y'y'' - 45y^2y' + (\lambda x + \alpha)y' + 2\lambda y, \qquad \text{Fif-I}$$

$$y^{(5)} = 30yy''' + 30y'y'' - 180y^2y' + (\lambda x + \alpha)y' + 2\lambda y, \qquad \text{Fif-II}$$

$$y^{(5)} = 20yy''' + 40y'y'' - 120y^2y' + (\lambda x + \alpha)y' + 2\lambda y + \kappa, \qquad \text{Fif-III}$$

$$(D - x^{-1})\big(y^{(4)} - 20yy'' - 10(y')^2 + 40y^3 - \alpha y - \beta\big) = 0, \qquad \text{Fif-III.b}$$

$$\begin{aligned}(D - x^{-1})\big(y^{(4)} - 18yy'' - 9(y')^2 + 24y^3 - 3\lambda y' + \kappa\big)\\ = \tfrac{1}{2}\lambda x(5y''' - 36yy') - \tfrac{1}{2}\lambda^2 x(2xy' + y),\end{aligned} \qquad \text{Fif-IV}$$

$$D\big(y^{(4)} - 18yy'' - 9(y')^2 + 24y^3 - \alpha y^2 - \tfrac{1}{9}\alpha^2 y - \kappa x - \beta\big) = 0, \qquad \text{Fif-IV.b}$$

$$(D - x^{-1})\big(y^{(4)} - 18yy'' - 9(y')^2 + 24y^3 - \alpha y^2 - \tfrac{1}{9}\alpha^2 y - \beta\big) = 0. \qquad \text{Fif-IV.c}$$

- Здесь тоже есть «лишние» уравнения: очевидно, порядок уравнений Fif-III.b, IV.b и IV.c понижается, в результате Fif-III.b сводится к F-V, а Fif-IV.b и Fif-IV.b сводятся к F-VI.
- На самом деле, и у остальных уравнений порядок понижается до четвертого, однако первый интеграл не записывается как полиномиальное уравнение, так что больше пересечений с предыдущим списком нет. Уравнения Fif-I, II, III и IV определяют новые трансценденты (при $\lambda \neq 0$).
- Большую часть параметров можно убить линейными преобразованиями $x$ и $y$.
- Fif-I (было у Шази) — автомодельная редукция уравнения Каупа–Купершмидта.
- Fif-II — автомодельная редукция уравнения Савады–Котеры.
- Fif-I и Fif-II связаны преобразованием Бэклунда (композиция подстановок типа Миуры Fif-I $\leftarrow$ F-XVIII $\rightarrow$ Fif-II).
- Fif-III — автомодельная редукция КдФ-5 (иерархия $\mathrm{P}_2$).
- Fif-IV — как и F-VI, получается редукцией из уравнений типа Буссинеска.

# Тест Ковалевской–Пенлеве

Во всех деталях классификации разобраться непросто. Что-то можно уловить на упрощённом примере, считая, что вид уравнений уже определён с точностью до постоянных:

$$y^{(4)} = ayy'' + b(y')^2 + cy^3 + k_1yy' + k_2y^2 + k_3y' + k_4y + k_5x + k_6$$

(мы увидим, что для определения резонансов важны только $a, b, c$, поэтому и в общем случае анализ должен проводиться примерно так же).

Ищем решение в виде ряда

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{r_{-1}}{x} + r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots$$

Делаем разложение в 0 за счёт сдвига $x$, при этом свободный член $k_6$ играет роль дополнительной постоянной, кроме него должно быть ещё три. А коэффициент при $x^{-2}$ считаем равным 1 за счет растяжения.

Подстановка в уравнение дает в главном члене

$$6a + 4b + c = 120.$$

**Замечание.** После исключения $c$, коэффициент $p$ в разложении $y = p/x^2 + \dots$ определяется, при заданных $a$ и $b$, из уравнения

$$(p-1)((3a+2b-60)p-60) = 0.$$

Мы анализируем только первую ветвь.

Следующие соотношения имеют вид

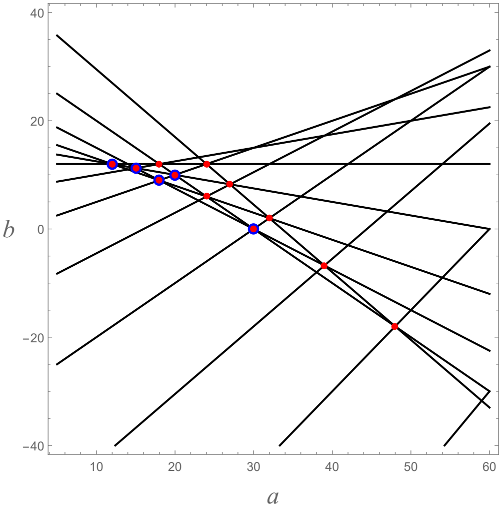
$$\alpha_j(a,b)r_j = F_j(r_{-1},\dots,r_{j-1};a,b,k_1,\dots,k_6), \quad j = -1,0,1,\dots, \tag{1}$$

где $\alpha_j$ — линейные функции от $a$ и $b$:

$$5a+4b-168, \quad a+b-30, \quad 3a+4b-90, \quad a+2b-36,$$
$$a+4b-60, \quad b-12, \quad a-4b+30, \quad a-2b, \quad 3a-4b-48, \quad \dots$$

Так как нам нужно набрать три резонанса, то нас интересуют такие значения $a, b$, при которых сразу три из этих $\alpha_j$ обращаются в 0.

Это очень просто изобразить графически: на плоскости $(a, b)$ нужно выбрать такие точки, в которых пересекаются по три прямых из нашего семейства. Есть ли вообще такие точки? Оказывается, да — 12 штук.



Далее необходимо прямым перебором, для каждой из этих 12 точек, проверить, разрешима ли система (1). Это сводится к следующему:

- те уравнения, где нет резонансов, разрешаем относительно соответствующих $r_j$. В результате, коэффициенты ряда оказываются выраженными через какие-то три выделенных коэффициента $r_{j_1}$, $r_{j_2}$, $r_{j_3}$ и коэффициенты уравнения $k_1, \dots, k_6$;
- подставляем это в уравнения

$$F_{j_1} = F_{j_2} = F_{j_3} = 0,$$

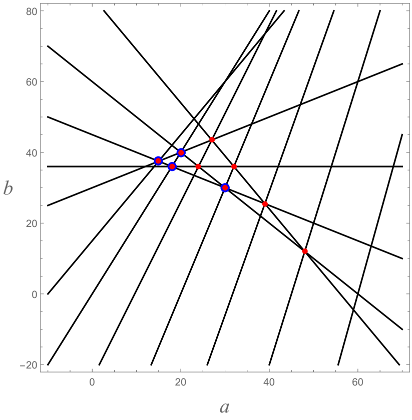
  отвечающие резонансам. Так как $r_{j_1}$, $r_{j_2}$ и $r_{j_3}$ должны быть произвольными, то расщепляем эти уравнения по этим переменным;
- решаем получившуюся нелинейную систему для $k_1, \dots, k_6$. Если нет решения, значит резонансы были «ложными». Это случается для 7 точек из 12. Если решение есть — тест прошел (на предыдущем рис. такие точки обведены).

В результате, получаются в точности уравнения F-I и III,…,VI (а F-II, как мы помним, в списке лишнее).

Аналогично, можно провести тест для семейства

$$y^{(5)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y' + k_1xy' + k_2y' + k_3y + k_4$$

(из списка Fif, сюда относятся только первые три уравнения, то есть, здесь я ещё больше упрощаю). Здесь в ряде должно быть 4 резонанса.




Но, оказывается, что один из них — всегда $r_4$, при любых $a, b$, поэтому в плоскости $(a, b)$ по прежнему нужно смотреть на пересечения трех прямых. Из 9 точек выживают 4, отвечающие Fif-I, II, III и «обгрызенному» F-IV.

# Операторные представления $[L,A]=1$

Хорошо известно, что уравнение $\mathrm{P}_1$

$$y''=6y^2+x$$

(точнее, его следствие $y'''=12yy'+1$) эквивалентно так называемому струнному уравнению (см. напр. Гриневич и Новиков 1994)

$$[L,A]=1,\quad L=D^2-2y,\quad A=2D^3-6yD-3y'.$$

Аналогичные представления:

- F-V: $\quad y^{(4)}=20yy''+10(y')^2-40y^3+\alpha y+\kappa x+\beta,$

$$[L,A]=\kappa,\qquad L=D^2-2y,$$
$$A=8D^5-40D^3-60y'D^2-(50y''-60y^2+\tfrac{1}{2}\alpha)D-15y'''+60yy';$$

- F-VI: $y^{(4)} = 18yy'' + 9(y')^2 - 24y^3 + \alpha y^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 y + \kappa x + \beta, \quad \alpha := 6\mu$

$$[L, A] = -\kappa, \qquad L = 2D^3 - (6y + \mu)D - 3y',$$
$$A = 3D^5 - (12y - \mu)D^2 - 12y'D - 5y'' + 6y^2 - 4\mu y;$$

- Fif-III: $y^{(5)} = 20yy''' + 40y'y'' - 120y^2y' + (\lambda x + \alpha)y' + 2\lambda y + \kappa$

$$[L, A] = 1, \quad L = D^2 - 2y, \quad A = 2D^3 - 6yD - 3y' + pD^{-1}q,$$

где (с учетом скейлинга, без потери общности)

$$p'' = (2y - \mu)p, \quad q'' = (2y - \mu)q, \quad \lambda = -4, \quad \alpha = \frac{24}{5}\mu^2, \quad \kappa = \frac{12}{5}\mu.$$

**Замечание 1.** Для Fif-III фактически получается система на $y$ и $g$ из следующего раздела.

**Замечание 2.** Представления для $\mathrm{P}_1$ и F-V без изменений переносятся на неабелев случай, но для F-VI и Fif-III это не проходит.

# Понижение порядка для Fif-I, II и III

Как уже было сказано, все Fifы сводятся к уравнениям четвертого порядка. Для Fif-I, II и III, ответ удобно записывать в виде системы общего вида (Косгров)

$$u'' = 6u^2 + x - 2g, \quad 2gg'' = (g')^2 + 2(au+b)g^2 - c^2. \tag{2}$$

Параметр $c^2$ играет роль постоянной интегрирования. Дифференцируя второе уравнение, имеем

$$g''' = 2(au+b)g' + au'$$

и если подставить $g$ из первого, получается

$$u^{(5)} = 2((a+6)u+b)u''' + (a+36)u'u'' - 30au^2u' - 24buu' - axu' - 2au - 2b.$$

Соответствие с тремя случаями такое:

$$\begin{array}{rlllll}
\text{Fif-I}: & a=\frac{3}{2}, & b=0, & u=y, & \lambda=-\frac{3}{2}, & \alpha=0;\\
\text{Fif-II}: & a=24, & b=0, & u=\frac{1}{2}y, & \lambda=-24, & \alpha=0;\\
\text{Fif-III}: & a=4, & & u=y-\frac{b}{10}, & \lambda=-4, & \alpha=\frac{6}{5}b^2, \quad \kappa=-\frac{6}{5}b.
\end{array}$$

# Модифицированные уравнения (символ Бюро $P1$)

$$y^{(4)} = 10y^2y'' + 10y(y')^2 - 6y^5 - 10\delta(y'' - 2y^3) + (\lambda x + \mu)y + \gamma, \qquad \text{F-XVII}$$

$$y^{(4)} = -5y'y'' + 5y^2y'' + 5y(y')^2 - y^5 + (\lambda x + \alpha)y + \gamma. \qquad \text{F-XVIII}$$

- F-XVII — автомодельная редукция мКдФ-5
- преобразования Миуры F-XVII $\to$ Fif-III:

$$2u = \pm y' + y^2 - \delta,$$

  где $u$ удовлетворяет Fif-III с $\kappa = \delta\lambda$, $\alpha = 30\delta^2 + \mu$
- F-XVIII — автомодельная редукция мКК-СК
- преобразования Миуры Fif-I $\leftarrow$ F-XVIII $\to$ Fif-II:

$$3u = 2y' - y^2, \quad 6v = y' + y^2,$$

  где $u$ удовлетворяет Fif-I, $v$ удовлетворяет Fif-II. Преобразование Бэклунда $u \leftrightarrow v$ бирационально [Cosgrove 2000, (4.19)–(4.22)].

# Вывод Fif-I из матричного $\mathrm{P}_1$

Из (2) ясно, что в 5-параметрическом семействе общих решений Fif-I, II и III есть 2-параметрические подсемейства, выражающиеся через произвольное решение $\mathrm{P}_1$ — достаточно положить $g = c = 0$.

Для Fif-III эти решения можно размножать преобразованием Бэклунда (меняющим параметр $c$).

А для Fif-I и Fif-II оказывается, что есть 4-параметрические подсемейства, выражающиеся через *два* независимых друг от друга решения $\mathrm{P}_1$. Косгров приводит формулы

$$\text{Fif-I}: \quad y = \frac{(u_1' - u_1')^2}{(u_1 - u_2)^2} - 4(u_1 + u_2), \qquad \text{Fif-II}: \quad y = u_1 + u_2,$$

где $u_i$ удовлетворяют уравнению $u'' = 6u^2 - \frac{1}{24}(\lambda x + \alpha)$. Эти решения связаны преобразованием Бэклунда, но не очень понятно, как получить хотя бы одно (Косгров исходит из аналогии с формулами сложения для эллиптических функций, которые работают в автономном случае $\lambda = 0$).

Мое объяснение основано на интересном (хотя, видимо, случайном) совпадении — Fif-II эквивалентно матричному $\mathrm{P}_1$

$$U'' = 6U^2 + xI, \tag{3}$$

где $U$ — матрица $2 \times 2$ и $I$ — единичная матрица.

Напомним, что (3) проходит тест Ковалевской–Пенлеве для матриц любого размера (Баландин и Соколов 1998), причем с матричным свободным членом. Но, нам это обобщение не понадобится. Итак, пусть

$$U = \begin{pmatrix} u+\chi & \psi \\ \phi & u-\chi \end{pmatrix},$$

тогда (3) эквивалентно

$$\begin{aligned} u'' &= 6u^2 + x + 6(\psi\phi + \chi^2), \\ \psi'' &= 12u\psi, \\ \phi'' &= 12u\phi, \\ \chi'' &= 12u\chi. \end{aligned} \tag{4}$$

Функции $\psi, \phi, \chi$ удовлетворяют уравнению Шрёдингера на нулевом уровне энергии (понятно, что они линейно зависимы). Для любой квадратичной формы от них, в частности, $g = -3(\psi\phi + \chi^2)$, имеем

$$g''' = 48ug + 24u'g.$$

Интегрируя, получаем систему (2) с $a = 24$ и $b = 0$:

$$u'' = 6u^2 + x - 2g, \quad 2gg'' = (g')^2 + 48ug^2 - c^2, \tag{5}$$

что эквивалентно Fif-II (с точностью до растяжения $u$ и $\lambda$). Постоянная $c$ выражается через вронскианы:

$$c^2 = 9w(\psi, \phi)^2 - 36w(\psi, \chi)w(\phi, \chi), \quad w(a, b) := ab' - a'b.$$

Наоборот, чтобы восстановить (4) из (5), нужно найти пару линейно независимых решений уравнения $\psi'' = 12u\psi$ по формуле

$$\psi_\pm = \exp\left(\int \frac{g' \pm c}{2g} dx\right)$$

и взять в качестве $\psi, \phi$ и $\chi$ их произвольные линейные комбинации (при $c = 0$ в качестве $\psi_-$ можно принять $\psi_- = \psi_+ \int \psi_+^{-2} dx$).

Очевидно, что матричное $\mathrm{P}_1$ допускает решение вида $U=\mathrm{diag}(u_1,u_2)$, для которого $2u=u_1+u_2$, $2\chi=u_1-u_2$ и $\psi=\phi=0$, то есть,

$$u=\frac{1}{2}(u_1+u_2),\quad g=-\frac{3}{4}(u_1-u_2)^2,$$

где $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют скалярному $\mathrm{P}_1$ $u''=6u^2+x$. Это 4-параметрическое семейство определяет общее решение системы (5) при $c=0$ и частное при $c\neq 0$.

# Символ Бюро $P1$

Здесь однородность равна $y : D = 1 : 1$ и редуцированное уравнение в четвертом порядке имеет вид

$$y^{(4)} = ayy''' + by'y'' + cy^2y'' + dy(y')^2 + ey^3y' + fy^5$$

(в полном уравнении добавляются младшие полиномиальные члены и коэффициенты считаются аналитическими $x$). Классификация в этом случае очень тяжелая. Например, в наиболее сложном случае $f \neq 0$ при анализе резонансов возникает диофантово уравнение

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{24}$$

у которого имеется 202511 решений, не считая бесконечных серий, когда $n_i = 24$ или $1/n_i + 1/n_j = 1/24$. Тем не менее, ответ получен и состоит из списка уравнений F-VII, ..., F-XIX, два из которых мы уже видели.

Большинство остальных ответов довольно громоздкие. Многие содержат произвольные аналитические функции в коэффициентах, что связано с линеаризуемостью. Например:

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} = -\frac{3f'}{f}y''' - \frac{ff''+(f')^2}{f^2}y'' \\
&- \frac{4}{f^2}\big(3c_1x^2(xy'-y) + c_2x(3xy'-2y) \\
&\quad + c_3(3xy'-y) + 3c_4y' + c_5x^2 + c_6x + c_7\big)y'' \\
&- \frac{2}{f^2}\big(3c_1(xy'-y)^2 + 2c_2y'(xy'-y) + c_3(y')^2 \\
&\quad + 2c_5(xy'-y) + c_6y' + c_8\big),
\end{aligned}
\qquad \text{F-VII}
$$

где $f = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$,

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} &= -2yy''' - 6y'y'' + A(x)(y''' + 2yy'' + 2(y')^2) \\
&\quad + B(x)(y'' + 2yy') + C(x)(y' + y^2) + D(x).
\end{aligned}
\qquad \text{F-VIII}
$$

- Уравнение F-VII интегрируется до одного из уравнений Шази третьего порядка и далее, в зависимости от значений параметров — к одному из шести уравнений Пенлеве или эллиптическим функциям. То есть, это все уравнения Пенлеве в одном.
- Уравнение F-VIII эквивалентно

$$w = y' + y^2, \quad w''' = A(x)w'' + B(x)w' + C(x)w + D(x),$$

  то есть, это линеаризуемый случай. Таких в списке несколько.
- Уравнение XIX не удовлетворяет тесту Пенлеве, но включено в список, так как решается точно в терминах функции Ламэ (Clarkson & Olver).