

Интегрируемые дискретные уравнения на треугольной решетке и эволюционные цепочки порядка 2

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау

Черноголовка · 10 апреля 2020

За последние несколько лет получены некоторые классификационные результаты для интегрируемых цепочек второго порядка по сдвигам

$$\dot{u}_n = f(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

В докладе представлены примеры таких цепочек из

[1] В.А. ТМФ **195:1** (2018) [27–43](#).

Они связаны с дискретными уравнениями на треугольной решетке. Показано, что определенная линейная комбинация непрерывных симметрий таких уравнений, ограниченная на одну из осей решётки, может быть записана в виде (1). Хотя это довольно специальная конструкция, она позволила существенно расширить список известных примеров.

Общее описание цепочек (1) остаётся очень сложной открытой задачей.

$$\dot{u}_n = f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$$

Теорема. (Ямилов, 1983) Уравнение $\dot{u}_n = f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, обладающее высшими симметриями и законами сохранения, приводится точечной заменой к одному из следующего списка:

$$\dot{u} = P(u)(u_1 - u_{-1}), \quad (V_1)$$

$$\dot{u} = P(u^2) \left(\frac{1}{u_1 + u} - \frac{1}{u + u_{-1}} \right), \quad (V_2)$$

$$\dot{u} = Q(u) \left(\frac{1}{u_1 - u} + \frac{1}{u - u_{-1}} \right), \quad (V_3)$$

$$\dot{u} = \frac{R(u_1, u, u_{-1}) + \nu(R(u_1, u, u_1)R(u_{-1}, u, u_{-1}))^{1/2}}{u_1 - u_{-1}}, \quad \nu = 0, \pm 1, \quad (V_4)$$

... (+ еще 7 случаев),

где $\deg P \leq 2$, $\deg Q \leq 4$,

$$R(u, v, w) = (\alpha v^2 + 2\beta v + \gamma)uw + (\beta v^2 + \lambda v + \delta)(u + w) + \gamma v^2 + 2\delta v + \varepsilon.$$

Если кроме точечных замен рассматривать также подстановки типа преобразования Миуры, то весь список оказывается эквивалентным всего двум уравнениям:

- цепочке Вольтерра (тип V_1)

$$\dot{u} = u(u_1 - u_{-1}),$$

- цепочке V_4 с $\nu = 0$

$$\dot{u} = \frac{R(u_1, u, u_{-1})}{u_1 - u_{-1}},$$

которая служит дифференциально-разностным аналогом уравнения Кричевера–Новикова $u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - r(u))}{2u_x}$, $\deg r \leq 4$.

(Если r имеет кратный корень, то КН сводится к КдФ. Точно так же, V_4 в специальных случаях сводится к V_1).

$$\dot{u}_n = f(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

До недавнего времени примеры исчерпывались цепочкой Богоявленского

$$\dot{u} = u(u_2 + u_1 - u_{-1} - u_{-2}) \quad (2)$$

и ее модификациями при помощи подстановок типа Миуры. Ряд новых уравнений найден в работах

- [2] VA, V.V. Postnikov. *J. Phys. A* **44** (2011) [415203](#)
- [3] Р.Н. Гарифуллин, А.В. Михайлов, Р.И. Ямилов. *ТМФ* **180:1** (2014) [17–34](#)
- [4] VA. *Funct. Anal. Appl.* **50:4** (2016) [257–267](#)
- [5] R.N. Garifullin, R.I. Yamilov, D. Levi. *J. Phys. A* **50:12** (2017) [125201](#); **51:6** (2018) [065204](#)

Получена классификация в некоторых частных постановках (линейность по $u_{\pm 2}$, инвариантность относительно дробно-линейных замен), но в общем виде задача слишком сложна. По сравнению с первым порядком, ответ содержит больше неэквивалентных уравнений (с точностью до точечных замен и подстановок).

Кроме (2), известны еще такие примеры (скорее всего, список неполный):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2(u_2 u_1 - u_{-1} u_{-2}) - u(u_1 - u_{-1}), \\ \dot{u} &= (u_1 u - 1)(u u_{-1} - 1)(u_2 - u_{-2}), \\ \dot{u} &= (u^2 + 1)\left(u_2 \sqrt{u_1^2 + 1} - u_{-2} \sqrt{u_{-1}^2 + 1}\right), \\ \dot{u} &= (u + 1)\left(u_2 \left(\frac{1}{u_1} + 1\right)u - u \left(\frac{1}{u_{-1}} + 1\right)u_{-2} + u_1 - u_{-1}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

$$\dot{u} = \frac{H(u_{-1}, u)H(u, u_1)(u_2 - u_{-2})}{P(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1)P(u_{-1}, u, u_1, u_2)},\tag{4}$$

где $P(u_{-1}, u, u_1, u_2)$ — многочлен степени 1 по каждой переменной, с группой симметрии квадрата

$$P(u_{-1}, u, u_1, u_2) = P(u_2, u_1, u, u_{-1}) = P(u_1, u, u_{-1}, u_2),$$

и $H(u, u_1) = H(u_1, u)$ симметричный биквадратичный многочлен

$$H(u, u_1) = \partial_{-1}(P)\partial_2(P) - \partial_{-1}\partial_2(P)P.$$

Цепочка (4) найдена в [1] на основе конструкции из старых работ

[6] VA. *Funct. Anal. Appl.* **34:1** (2000) 1–9

[7] VA. *J. Nonl. Math. Phys.* **7:1** (2000) 34–56

[8] VA. Yu.B. Suris. *Intl. Math. Res. Notices* (2004) 2523–2553.

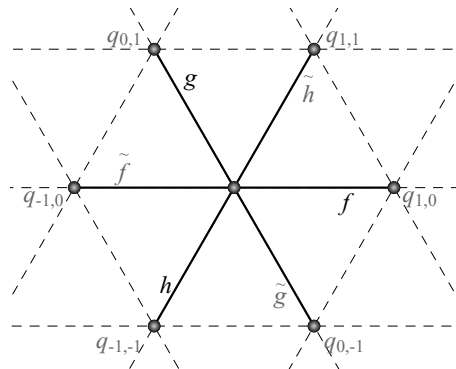
связанных с дискретными уравнениями на треугольной решетке. В специальных случаях эта цепочка сводится к (3).

Уравнения на решетке

В [6,7,8] получен некоторый список дискретных уравнений на $\mathbb{Z}^2$ вида

$$E = f(q, q_{1,0}) - \tilde{f}(q, q_{-1,0}) + g(q, q_{0,1}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) + h(q, q_{-1,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1}) = 0, \quad (5)$$

допускающих вложение в $\mathbb{Z}^3$ (что можно интерпретировать как наличие дискретных симметрий типа преобразований Бэклунда). Сейчас мы не будем рассматривать эти дискретные симметрии, вместо них рассмотрим непрерывные.

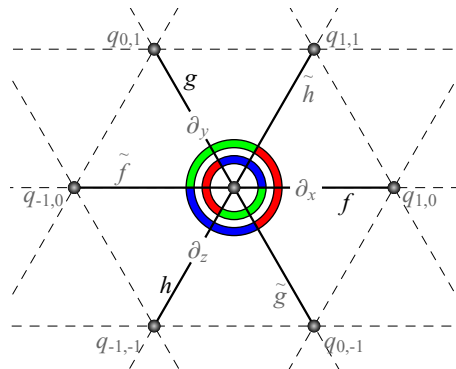


Уравнения на решетке

В [6,7,8] получен некоторый список дискретных уравнений на $\mathbb{Z}^2$ вида

$$E = f(q, q_{1,0}) - \tilde{f}(q, q_{-1,0}) + g(q, q_{0,1}) - \tilde{g}(q, q_{0,-1}) + h(q, q_{-1,-1}) - \tilde{h}(q, q_{1,1}) = 0, \quad (5)$$

допускающих вложение в $\mathbb{Z}^3$ (что можно интерпретировать как наличие дискретных симметрий типа преобразований Бэклунда). Сейчас мы не будем рассматривать эти дискретные симметрии, вместо них рассмотрим непрерывные.



Непрерывные симметрии

Оказывается, что все уравнения из списка совместны с дифференцированиями вида

$$q_{,x} = a(q, f - \tilde{g} - \tilde{h}) = a(q, \tilde{f} - g - h),$$

$$q_{,y} = b(q, -\tilde{f} + g - \tilde{h}) = b(q, -f + \tilde{g} - h),$$

$$q_{,z} = c(q, -\tilde{f} - \tilde{g} + h) = c(q, -f - g + \tilde{h}),$$

с некоторыми функциями a, b, c (своими для каждого уравнения). Два выражения для каждого дифференцирования совпадают в силу уравнения $E = 0$, а совместность означает, что выполняются тождества

$$\partial_x(E)|_{E=0} = 0, \quad \partial_y(E)|_{E=0} = 0, \quad \partial_z(E)|_{E=0} = 0.$$

Более того, дифференцирования совместны и друг с другом:

$$[\partial_x, \partial_y] = [\partial_x, \partial_z] = [\partial_y, \partial_z] = 0 \quad \text{при} \quad E = 0.$$

Ограничение на прямую

Рассмотрим уравнения вдоль одной из осей решетки, например $(n, 0)$. Переменные на параллельной прямой $(n, 1)$ обозначим через p_n . Тогда ∂_y и ∂_z запишутся в виде 2-компонентных цепочек:

$$q_{,y} = b(q, -\tilde{f}(q, q_{-1}) + g(q, p) - \tilde{h}(q, p_1)),$$

$$p_{,y} = b(p, -f(p, p_1) + \tilde{g}(p, q) - h(p, q_{-1})),$$

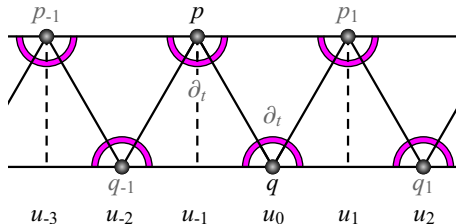
$$q_{,z} = c(q, -f(q, q_1) - g(q, p) + \tilde{h}(q, p_1)),$$

$$p_{,z} = c(p, -\tilde{f}(p, p_{-1}) - \tilde{g}(p, q) + h(p, q_{-1}))$$

(про второй индекс можно забыть, он фиксирован). Переобозначив

$$u_{2k} = q_k = q_{k,0}, \quad u_{2k-1} = p_k = q_{k,1},$$

получим цепочки второго порядка, но не автономные, а «мигающие» — с разными уравнениями для чётных и нечётных узлов. Однако, при определённых условиях симметрии, уравнения можно сделать одинаковыми, рассмотрев линейную комбинацию ∂_y и ∂_z .



Утверждение. Пусть рассматриваемые уравнения таковы, что

$$b(u, v) = c(u, v), \quad g(u, v) = h(u, v), \quad \tilde{g}(u, v) = \tilde{h}(u, v),$$

тогда сумма потоков $\partial_t = \partial_y + \partial_z$ описывается автономной эволюционной цепочкой второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & b(u, -\tilde{f}(u, u_{-2}) + g(u, u_{-1}) - \tilde{g}(u, u_1)) \\ & + b(u, -f(u, u_2) - g(u, u_{-1}) + \tilde{g}(u, u_1)). \end{aligned}$$

Самый простой пример

Дискретное уравнение:

$$\frac{\alpha}{q_{1,0} - q} - \frac{\alpha}{q - q_{-1,0}} + \frac{\beta}{q_{0,1} - q} - \frac{\beta}{q - q_{0,-1}} + \frac{\gamma}{q_{-1,-1} - q} - \frac{\gamma}{q - q_{1,1}} = 0,$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Дифференцирование:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\partial_x(q)} &= \frac{\alpha}{q_{1,0} - q} - \frac{\beta}{q - q_{0,-1}} - \frac{\gamma}{q - q_{1,1}} \\ &= \frac{\alpha}{q - q_{-1,0}} - \frac{\beta}{q_{0,1} - q} - \frac{\gamma}{q_{-1,-1} - q} \end{aligned}$$

и аналогично для ∂_y , ∂_z (по циклу).

Самый простой пример

Условие симметричности (чтобы не было «мигания» в уравнениях для u) приводит к ограничению $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$, при этом поток $\partial_t = \partial_y + \partial_z$ описывается уравнением

$$\dot{u} = \frac{1}{\frac{2}{u_2-u} + \frac{1}{u-u_1} + \frac{1}{u-u_{-1}}} - \frac{1}{\frac{2}{u_{-2}-u} + \frac{1}{u-u_1} + \frac{1}{u-u_{-1}}}.$$

Можно показать, что оно приводится к виду (4) с многочленами

$$H = (u_1 - u)^2, \quad P = \frac{1}{2}(u_2 + u)(u_1 + u_{-1}) - u_{-1}u_1 - uu_2$$

и переходит в уравнение (3) для $\tilde{u}$ при подстановке

$$\tilde{u} = \frac{1}{2 \frac{(u_3-u_2)(u_1-u)}{(u_3-u_1)(u_2-u)} - 1}.$$

Дальше идёт ещё около 10 примеров...

Самый сложный пример

Дискретное уравнение (в мультипликативной форме):

$$f(q, q_{1,0}; \alpha) f(q, q_{-1,0}; \alpha) f(q, q_{0,1}; \beta) f(q, q_{0,-1}; \beta) \\ \times f(q, q_{-1,-1}; \gamma) f(q, q_{1,1}; \gamma) = 1,$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и

$$f(q, p; \alpha) = \frac{\sigma(q + p + \alpha) \sigma(q - p + \alpha)}{\sigma(q + p - \alpha) \sigma(q - p - \alpha)},$$

σ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Дифференцирование:

$$\frac{q_{,x} + 1}{q_{,x} - 1} = f(q, q_{1,0}; \alpha) f(q, q_{0,-1}; \beta) f(q, q_{1,1}; \gamma) \\ = f(q, q_{-1,0}; -\alpha) f(q, q_{0,1}; -\beta) f(q, q_{-1,-1}; -\gamma),$$

и аналогично для ∂_y, ∂_z .

Самый сложный пример

При $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$ поток $\partial_t = \partial_y + \partial_z$ описывается уравнением

$$\dot{u} = \frac{1}{f(u, u_2; 2\gamma)f(u, u_1; -\gamma)f(u, u_{-1}; -\gamma) - 1} - \frac{1}{f(u, u_1; -\gamma)f(u, u_{-1}; -\gamma)f(u, u_{-2}; 2\gamma) - 1}.$$

В результате замены

$$\wp(u) = \tilde{u}$$

оно приводится к виду (4) с многочленом P , коэффициенты которого выражаются явными, но довольно громоздкими формулами через параметр γ и модули g_2, g_3 . Можно показать, что это многочлен общего положения (следует отметить, что всего в P имеется 6 произвольных коэффициентов, но 3 убиваются дробно-линейными преобразованиями u).