

Цепочка Вольтерра и числа Каталана

В.Э. Адлер, А.Б. Шабат

Модельная задача о распаде ступеньки для цепочки Вольтерра формулируется в виде задачи Коши с начальным условием, равным 0 в одном узле и 1 в остальных. Показано, что эта задача допускает точное решение в терминах функций Бесселя. Возникающие здесь ряды Тейлора связаны с экспоненциальной производящей функцией для чисел Каталана. Получены асимптотические формулы для решения. [arXiv:1810.13198](https://arxiv.org/abs/1810.13198)

ИТФ им. Л.Д. Ландау · Черноголовка · 21 декабря 2018

Задача о распаде ступеньки для цепочки Вольтерра

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad u_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leq 0, \\ 1 & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Качественно, это напоминает задачу Гуревича–Питаевского для КдФ. Более общие начальные данные изучались в [Верещагин 1997] при помощи метода усреднения.

Наш случай допускает точное решение. Мы используем подход из [Кулаев, Шабат 2018], основанный на разложении $u_1(t)$ в ряд Тейлора при $t = 0$. Оказывается, что

- коэффициенты ряда связаны с числами Каталана,
- u_n , как функции от t , выражаются через функции Бесселя,
- для u_n можно получить асимптотические формулы при $t \rightarrow \pm\infty$.

Производящие функции

Производные $u_1^{(k)}$ — многочлены от $u_1, \dots, u_{k+1}$. В принципе, можно вычислить производные любого порядка по начальным данным $u_j(0) = 1$ и найти $u_1(t)$ как ряд Тейлора:

$$u_1(t) = t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{0}{4!}t^4 - \frac{4}{5!}t^5 - \frac{10}{6!}t^6 + \frac{15}{7!}t^7 + \frac{210}{8!}t^8 + \dots$$

Как ответ, это не годится: радиус сходимости ≈ 2 . Однако, сами коэффициенты ряда оказываются замечательными, последовательность

$$1, 1, 1, 0, -4, -10, 15, 210, 504, -3528, -34440, \dots$$

зарегистрирована в OEIS ([A302197](#)) и допускает некие комбинаторные интерпретации.

Ещё более замечательную последовательность можно получить при помощи следующего простого преобразования.

Вместе с цепочкой Вольтерра удобно рассматривать модифицированную цепочку

$$v'_n = v_n^2(v_{n+1} - v_{n-1}), \quad v_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leq 0, \\ 1 & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решения этой и исходной задачи связаны подстановкой

$$u_n = v_n v_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, функции u_1 и v_1 связаны заменой

$$u_1 = \frac{v'_1}{v_1}.$$

Здесь вычисление старших производных $v_1^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, приводит к числам Каталана ([A000108](#))

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \dots$$

Числа Каталана можно определить явной формулой

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n, \quad c_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда, для экспоненциальной производящей функции

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + \frac{c_n}{n!} t^n + \dots$$

получаем

$$t f''(t) + 2(1-2t)f'(t) - 2f(t) = 0, \quad f(0) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$f(t) = e^{2t}(I_0(2t) - I'_0(2t)),$$

где $I_0(z)$ функция Бесселя мнимого аргумента.

Детерминантные формулы

Чтобы доказать, что $v_1^{(k)}(0) = c_k$ и, следовательно, $v_1(t) = f(t)$, достаточно сопоставить два утверждения.

1. Преобразование Ханкеля для чисел Каталана [Layman 2001]

Пусть

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{2k} \end{pmatrix}, \quad H_{2k+1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det H_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство получается по индукции с применением еще одной рекуррентной формулы

$$c_{n+1} = c_0 c_n + \dots + c_n c_0, \quad c_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Общее решение цепочки Вольтерра с обрывом $v_0 = 0$ [Лезнов 1980]

Пусть $v_1 = f(t)$ — произвольная функция, тогда

$$v_n = \frac{w_{n-3}w_{n-1}}{w_{n-2}^2}, \quad u_n = \frac{w_{n-3}w_n}{w_{n-2}w_{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $w_{-3} = 0$, $w_{-2} = w_{-1} = 1$ и $w_n = \det W_n$ при $n \geq 0$,

$$W_{2k} = \begin{pmatrix} f & f' & \dots & f^{(k)} \\ f' & f'' & \dots & f^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k)} & f^{(k+1)} & \dots & f^{(2k)} \end{pmatrix}, \quad W_{2k+1} = \begin{pmatrix} f' & f'' & \dots & f^{(k+1)} \\ f'' & f''' & \dots & f^{(k+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k+1)} & f^{(k+2)} & \dots & f^{(2k+1)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство следует из тождества Якоби для вронскианов

$$w(A, b) \frac{d}{dt} w(A, c) - \frac{d}{dt} w(A, b) w(A, c) = w(A) w(A, b, c),$$

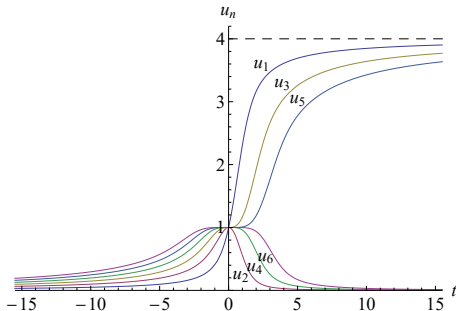
где $A = a_1, \dots, a_n$, b, c — произвольные гладкие функции.

Асимптотика решения

Формулы из предыдущего утверждения позволяют продолжить решение за радиус сходимости рядов Тейлора. В частности,

$$u_1(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{I_0(2t) - I_2(2t)}{I_0(2t) - I_1(2t)}$$

При $t \rightarrow +\infty$ переменные $u_n(t)$ с нечётными номерами растут к 4, с чётными убывают к 0; при $t \rightarrow -\infty$ все переменные стремятся к 0.



Используем известные формулы для $I_0(z) = I_0(-z)$:

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{16z^2} + \dots \right), \quad z \rightarrow +\infty.$$

При замене $f(t) = e^{2t}(I_0(2t) - I'_0(2t))$ получаем экспоненциальный рост при $t > 0$ и степенное убывание при $t < 0$:

$$v_1(t) = f(t) = \begin{cases} \frac{e^{4t}}{8\sqrt{\pi t^3}} \left(1 + \frac{3}{16t} + \frac{45}{512t^2} + \dots \right), & t \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{-\pi t}} \left(1 + \frac{1}{16t} - \frac{3}{512t^2} + \dots \right), & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Коэффициенты находятся из уравнения второго порядка для f .

Асимптотические разложения для $u_1(t)$ проще найти, переходя к уравнению Риккати

$$u_1' + u_1^2 - \left(4 - \frac{2}{t} \right) u_1 - \frac{2}{t} = 0.$$

Подставляя $u_1 = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots$, находим $a_0 = 4$ или $a_0 = 0$, остальные коэффициенты вычисляются однозначно. Эти два решения и

отвечают асимптотикам при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$u_1(t) = \begin{cases} 4 - \frac{3}{2t} - \frac{3}{16t^2} - \frac{9}{64t^3} - \dots, & t \rightarrow +\infty, \\ -\frac{1}{2t} - \frac{1}{16t^2} + \frac{1}{64t^3} + \dots, & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Непосредственно из уравнений цепочки можно по индукции найти асимптотику для всех u_n . В главных членах получаем

$$\begin{cases} u_{2j-1}(t) = 4 - \frac{4j-1}{2t} + O(t^{-2}), \\ u_{2j}(t) = \frac{j(2j+1)}{8t^2} + O(t^{-3}), \end{cases} \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$u_n(t) = -\frac{n}{2t} + O(t^{-2}), \quad t \rightarrow -\infty.$$

Дальнейшие обобщения

Рассмотренное решение не является исключительным случаем, когда коэффициенты рядов Тейлора допускают замкнутое выражение или комбинаторную интерпретацию. Наиболее близкий пример связан с цепочками Богоявленского порядка m

$$v'_n = v_n^2(v_{n+m} \cdots v_{n+1} - v_{n-1} \cdots v_{n-m}),$$

с начальными данными $v_0(0) = 0$, $v_n(0) = 1$ при $n > 0$. Здесь возникают так называемые числа Пфаффа–Фусса–Каталана

$$v_1^{(k)}(0) = C_k^{(m+1)} = \frac{1}{mk+1} \binom{(m+1)k}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

также можно получить детерминантные формулы и аналог преобразования Ханкеля (возможно, это новый результат).