Интегрируемые Мёбиус-инвариантные эволюционные цепочки второго порядка

В.Э. Адлер

Получен полный список интегрируемых цепочек $\dot{u} = f(u_{-2}, \dots, u_2)$, инвариантных относительно группы дробно-линейных преобразований. Он содержит 5 уравнений, 3 из них ранее не рассматривались. Найдены подстановки типа Миуры, связывающие их с известными полиномиальными цепочками. Приведены некоторые классификационные результаты для цепочек общего вида. [arXiv:1605.00018v1]

ИТФ им. Л.Д. Ландау · Черноголовка · 20–22 июня 2016

1 Введение

Рассматриваются дифференциально-разностные уравнения

$$\dot{u} = f(u_{-m}, \dots, u_m), \quad u_j = u(t, n+j).$$

Самая известная интегрируемая модель — цепочка Вольтерра [Manakov 1975; Kac, Moerbeke 1975]

$$\dot{u} = u(u_1 - u_{-1}).$$

Другие примеры: цепочки Богоявленского [Narita 1982; Itoh 1987; Bogoyavlensky 1988, 1991],

$$\dot{u} = u(u_m + \dots + u_1 - u_{-1} - \dots - u_{-m}),$$

их модификации, связанные подстановками типа Миуры [Suris 2003; Svinin 2011; Berkeley, Igonin 2015] и некоторые обобщения [Adler, Postnikov 2011; Garifullin, Yamilov 2012].

При $m = 1$, полная классификация была получена Ямиловым [Yamilov 1983, 2006], однако, уже случай $m = 2$ оказывается существенно сложнее и до сих пор остается открытым.

Теорема [Ямилов]. Интегрируемые уравнения

$$u_t = f(u_{-1}, u, u_1)$$

исчерпываются следующим списком (с точностью до замен $\tilde{u} = \phi(u)$):

$$u_t = P(u)(u_1 - u_{-1}), \tag{1}$$

$$u_t = P(u^2)\left(\frac{1}{u_1 + u} - \frac{1}{u + u_{-1}}\right), \tag{2}$$

$$u_t = Q(u)\left(\frac{1}{u_1 - u} + \frac{1}{u - u_{-1}}\right), \tag{3}$$

$$u_t = \frac{R(u_1, u, u_{-1}) + \nu R(u_1, u, u_1)^{1/2} R(u_{-1}, u, u_{-1})^{1/2}}{u_1 - u_{-1}}, \tag{4}$$

$$u_t = y(u_1 - u) + y(u - u_{-1}), \quad y' = P(y), \tag{5}$$

$$u_t = y(u_1 - u)y(u - u_{-1}) + \mu, \quad y' = P(y)/y, \tag{6}$$

$$u_t = (y(u_1 - u) + y(u - u_{-1}))^{-1} + \mu, \quad y' = P(y^2), \tag{7}$$

$$u_t = (y(u_1 + u) - y(u + u_{-1}))^{-1}, \quad y' = Q(y), \tag{8}$$

$$u_t = \frac{y(u_1 + u) - y(u + u_{-1})}{y(u_1 + u) + y(u + u_{-1})}, \quad y' = P(y^2)/y, \tag{9}$$

$$u_t = \frac{y(u_1+u)+y(u+u_{-1})}{y(u_1+u)-y(u+u_{-1})}, \quad y' = Q(y)/y, \qquad 10$$

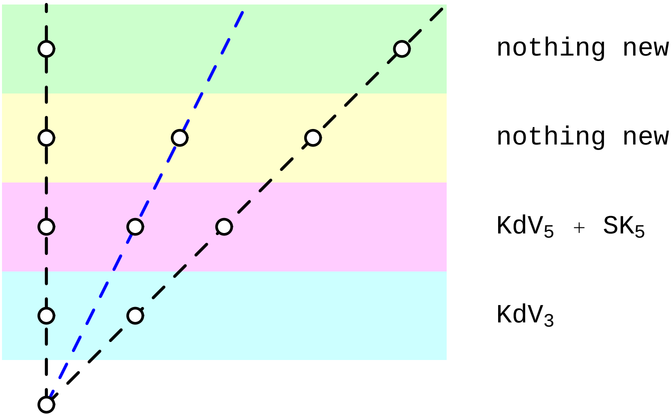
$$u_t = \frac{(1-y(u_1-u))(1-y(u-u_{-1}))}{y(u_1-u)+y(u-u_{-1})} + \mu, \quad y' = \frac{P(y^2)}{1-y^2}, \qquad 11$$

где

$$P(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma,$$
$$Q(u) = \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon,$$
$$R(u,v,w) = (\alpha v^2 + 2\beta v + \gamma)uw + (\beta v^2 + \lambda v + \delta)(u+w) + \gamma v^2 + 2\delta v + \varepsilon,$$

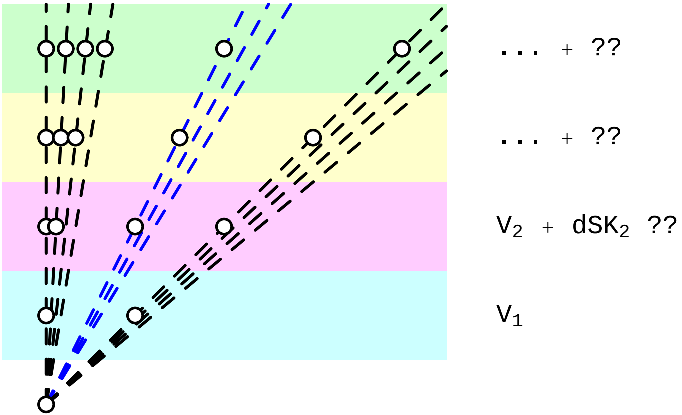
$\nu = 0, \pm 1$ и μ произвольная постоянная.

Цель доклада — описать некоторые предварительные результаты для $m = 2$, включая классификацию цепочек, инвариантных относительно дробно-линейных преобразований переменной u. Для решения этой задачи применяется симметрийный подход.



Классификация в непрерывном случае

[Шабат, Свинолупов, Соколов 80–85]



Классификация в дискретном случае

[$m=1$: Ямилов 83]

План

- Необходимые условия интегрируемости
- Приведение к функциям от трёх переменных
- Классификация Мёбиус-инвариантных цепочек
- Подстановки типа Миуры
- Некоторые обобщения

Обозначения

- D_t эволюционное дифференцирование в силу уравнения
- $f_j = \partial f / \partial u_j$
- $T : u_j \to u_{j+1}$ оператор сдвига

2 Необходимые условия интегрируемости

Пусть цепочка

$$\dot{u} = f(u_{-m}, \ldots, u_m), \quad u_j = u(t, n+j), \tag{1}$$

обладает обобщёнными симметриями и законами сохранения сколь угодно высокого порядка. Тогда разрешимы уравнения

$$D_t(G) = [f_*, G], \qquad D_t(R) + f_*^\dagger R + R f_* = 0, \tag{2}$$

где:

- G и R формальные ряды Лорана по степеням T или T^{-1}, с коэффициентами, зависящими от динамических переменных u_j;
- $f_* = f_m T^m + f_{m-1} T^{m-1} + \cdots + f_{-m} T^{-m}$ оператор линеаризации уравнения (1);
- сопряжение определяется формулой $(aT^j)^\dagger = T^{-j} a$.

[Mikhailov, Shabat, Yamilov 1987; Levi, Yamilov 1997; Yamilov 2006].

Более того, начальные члены ряда G можно выбрать, без потери общности, такими же, как у оператора f_* [Adler 2014]:

$$G = f_* + \sigma + \theta T^{-1} + \omega T^{-2} + \dots,$$
$$\tilde{G} = f_* + \tilde{\sigma} + \tilde{\theta} T + \tilde{\omega} T^2 + \dots,$$
$$R = rT^l + sT^{l-1} + \dots\ , \quad r \neq 0,$$

с показателем l в интервале $0 \le l \le m-1$, причём $\tilde{G}^\dagger R = -RG$.

Необходимые условия интегрируемости $=$ разрешимость уравнений (2) относительно коэффициентов этих рядов.

В случае $m = 1$, для выделения интегрируемых цепочек достаточно, согласно [Yamilov 1983], учитывать условия всего для 3 коэффициентов:

$$\begin{aligned} &D_t(\log f_1) = (T-1)(\sigma), \\ &T(rf_{-1}) + rf_1 = 0, \\ &D_t(\log r) + 2f_0 = (T-1)(\mu). \end{aligned} \tag{3}$$

Мы рассматриваем случай $m = 2$,

$$\dot{u} = f(u_{-2}, u_{-1}, u, u_1, u_2). \tag{4}$$

Условия невырожденности:

$$f_{-2} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad (f_{-1} \neq 0 \quad \text{или} \quad f_1 \neq 0).$$

В нескольких первых порядках по T получаем следующие условия.

Утверждение 1. Если цепочка (4) интегрируема, то существуют функции σ, θ, ω, r, s, μ от переменных u_j, и показатель $l = 0$ или 1, такие, что выполняются соотношения:

$$D_t(f_2) = f_2(T^2 - 1)(\sigma), \tag{5a}$$

$$D_t(f_1) - f_1(T - 1)(\sigma) = f_2 T^2(\theta) - T^{-1}(f_2)\theta, \tag{5b}$$

$$D_t(f_0 + \sigma) - (T - 1)(T^{-1}(f_1)\theta) = (T^2 - 1)(T^{-2}(f_2)\omega), \tag{5c}$$

$$T^2(rf_{-2}) + rT^l(f_2) = 0, \tag{5d}$$

$$T^2(sf_{-2}) + sT^{l-1}(f_2) + T(rf_{-1}) + rT^l(f_1) = 0, \tag{5e}$$

$$D_t(\log r) + 2f_0 = (T - 1)(\mu). \tag{5f}$$

Замечания

- Если положить $f_2 = f_{-2} = 0$ и $l = 0$, то условия (5) переходят в условия (3) для цепочек 1-го порядка плюс одно «лишнее» условие $D_t(f_0 + \sigma) = (T - 1)(\nu)$.
- Можно предположить, что условия (5) не только необходимы, но и достаточны, аналогично условиям (3) для $m = 1$. Ответить на этот вопрос позволит только полная классификация.
- Примеры показывают, что уменьшить этот набор условий нельзя. Так, цепочка

$$\dot{u} = u_2 - u_{-2} + c(u_1 - u_{-1})^2, \quad c \neq 0$$

удовлетворяет всем условиям, кроме (5c).

- Благодаря соотношению $\tilde{G}^\dagger = -RGR^{-1}$, уравнения для коэффициентов $\tilde{G}$ можно не учитывать. Иногда, удобно использовать замену

$$(\sigma, \theta, \omega) \to (\tilde{\sigma}, \tilde{\theta}, \tilde{\omega}), \quad \partial_i \to \partial_{-i}, \quad T^i \to T^{-i}. \tag{6}$$

3 Приведение к функциям от трёх переменных

Тестирование условий интегрируемости для заданного уравнения не представляет принципиальных затруднений (см. алгоритм в [Adler (2016)]).

Однако, классификация требует анализа этих условий с неопределенной функцией f. Эта задача гораздо сложнее, вид f уточняется последовательно. Опишем лишь первый шаг.

Следствие 2. Для $\rho = \log f_2$ выполняются следующие соотношения:

$$\rho_{-2,2} = 0, \tag{7a}$$

$$T^2(\rho_{-2,1})f_{-2} + \rho_{-2,1}T(f_2) = 0, \tag{7b}$$

$$T(\rho_{-1,2})f_{-2} + T^{-1}(\rho_{-1,2})T(f_2) = 0. \tag{7c}$$

Доказательство. Нужны только условия (5a), (5b), (5d). Подсчёт переменных в левых частях (5a) и (5b) показывает, что σ и θ могут зависеть только от $u_{-4}, \dots, u_2$. Тогда, применяя $\partial_{-2}\partial_4$ к (5a) и $\partial_{-3}\partial_3$ к (5b), получаем

$$T^2(f_2)\rho_{-2,2} = T^2(\sigma_{-4,2}), \qquad f_1T(\sigma_{-4,2}) = 0.$$

Отсюда следует $f_1\rho_{-2,2}=0$. Используя симметрию (6), получаем также $f_{-1}\tilde\rho_{-2,2}=0$, где $\tilde\rho=\log f_{-2}$. Из (5d) следует, что если одна из функций $\rho_{-2,2}$, $\tilde\rho_{-2,2}$ равна 0, то это же верно и для второй. Используя условие невырожденности $f_{-1}\neq0$ или $f_1\neq0$, получаем (7a).

Для доказательства (7b), (7c), частично проинтегрируем условие (5a): подставим $\sigma=\hat\sigma-\rho_{-1}T^{-1}(f)-\rho_{-2}T^{-2}(f)$, это даст эквивалентное уравнение с функцией $\hat\sigma$ от меньшего числа переменных:

$$(T^2(\rho_{-2})+\rho_0)f+(T^2(\rho_{-1})+\rho_1)T(f)+\rho_2T^2(f)=(T^2-1)(\hat\sigma(u_{-2},\dots,u_2)).$$

Применение $\partial_{-2}\partial_3$ и $\partial_{-1}\partial_4$ даёт искомые равенства. ■

Аналогичными выкладками можно извлечь ещё несколько полезных следствий, например, из условия (5b) получаем

$$T(\rho_{-2,1})f_1+T(\rho_{-2})f_{1,2}-T^{-1}(\tilde\rho_2)f_{-1,2}=0, \tag{7d}$$

$$T^{-1}(\tilde\rho_{-1,2})f_{-1}+T^{-1}(\tilde\rho_2)f_{-2,-1}-T(\rho_{-2})f_{-2,1}=0. \tag{7e}$$

Условие (5d) и Следствие 2 позволяют выделить несколько основных типов цепочек (разбиение не является взаимоисключающим).

Теорема 3. Любая интегрируемая цепочка (4) относится к одному из следующих типов ($l=0$ для типов I, II и $l=1$ для остальных):

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & \dot u = b(T(a_{-1}) - T^{-1}(a_1)) + c,\\
\text{II} & \dot u = b\exp\big(k(u)(T(a_{-1}) - T^{-1}(a_1))\big) + c,\\
\text{III} & \dot u = T^{-1}(p)a_{-1}T(b) - pT^{-1}(a)b_1 + c,\\
\text{IV} & \dot u = \dfrac{T^{-1}(p)a_{-1}}{a+T(b)} - \dfrac{pb_1}{T^{-1}(a)+b} + c,\\
\text{V} & \dot u = \dfrac{a_{-1,1}}{T^{-1}(A)A} + b, \quad A = T(a_{-1}) - a_1,\\
\text{VI} & \dot u = \dfrac{a_{-1,1}}{T^{-1}(A)A} + b, \quad A = \exp\big(p(T(a_{-1}) - a_1)\big) - \dfrac{\alpha}{p}, \quad \alpha = \mathrm{const}\,.
\end{array}$$

Здесь, a,b,c обозначают функции от u_{-1},u,u_1; $p=p(u,u_1)$.

Дальнейший анализ требует рассмотрения перечисленных случаев по отдельности. Окончательный ответ в этой задаче пока неизвестен.

4 Классификация Мёбиус-инвариантных цепочек

Далее, мы рассматриваем упрощённую постановку: предполагается, что цепочка инвариантна относительно группы дробно-линейных замен

$$u_j \to \frac{\alpha u_j + \beta}{\gamma u_j + \delta}.$$

Такие цепочки имеют общий вид

$$\dot{u} = f = YF(X, T(X)), \tag{8}$$

где

$$X = \frac{(u_1 - u)(u_{-1} - u_{-2})}{(u_1 - u_{-1})(u - u_{-2})}, \quad Y = \frac{(u_1 - u)(u - u_{-1})}{u_1 - u_{-1}}.$$

Решение классификационной задачи заключается в уточнении функции $F(X, T(X))$, исходя из условий интегрируемости. По сравнению с общим случаем, здесь имеем радикальное упрощение: функция 2 переменных вместо 5.

Замечание. Фундаментальными инвариантами группы служат величины

$$X, \qquad \frac{\dot u}{Y}, \qquad \frac{\dot u_1 \dot u}{(u_1-u)^2}, \qquad \frac{\ddot u}{\dot u}+\frac{2\dot u}{u_1-u}, \qquad \frac{\dddot u}{\dot u}-\frac{3\ddot u^2}{2\dot u^2}.$$

Все функционально независимые инварианты получаются отсюда сдвигами T и дифференцированиями d/dt. Для эволюционных цепочек важны только два первых инварианта.

Среди цепочек первого порядка имеется ровно одна Мёбиус-инвариантная цепочка

$$\dot u = Y = \frac{(u_1-u)(u-u_{-1})}{u_1-u_{-1}}, \tag{9}$$

то есть, никакой классификационной задачи нет. Эта цепочка оказывается интегрируемой (так называемая шварцианная цепочка Вольтерра).

Для цепочек второго порядка, аналог общей Теоремы 3 довольно просто доказывается из условия (5d)

$$T^2(rf_{-2}) + rT^l(f_2) = 0.$$

Утверждение 4. С точностью до постоянных множителей, все решения уравнения (5d) имеют вид:

$$(l=0) \qquad F = g(X+T(X)), \qquad r = \frac{1}{Y^2 g'(X+T(X))},$$

$$(l=1) \qquad F = g(X)+g(T(X)), \qquad r = \frac{1}{(u_1-u)^2},$$

$$(l=1) \qquad F = \frac{1}{g(X)g(T(X))}+\delta, \quad r = \frac{g(T(X))}{(u_1-u)^2}, \quad \delta = \mathrm{const}\,.$$

Теперь задача сведена к определению функции g от одной переменной. Использование соотношений (7) позволяет найти её с точностью до нескольких констант. Например, в последнем из указанных случаев находим $g = X^k + \gamma$ или $g = \log X + \gamma$.

Дальше, довольно трудоёмкая, но прямая подстановка в условия (5) отсеивает часть решений и уточняет значения параметров. Окончательно, приходим к следующему классификационному результату.

Теорема 5. Уравнения вида (8), удовлетворяющие необходимым условиям интегрируемости (5), исчерпываются следующим списком:

$$\dot u = Y(X + T(X) + c), \quad c = \mathrm{const}, \tag{S$_1$}$$

$$\dot u = \frac{Y}{(X-1)(T(X)-1)}, \tag{S$_2$}$$

$$\dot u = \frac{4Y(1-X-T(X))}{(2X-1)(2T(X)-1)}, \tag{S$_3$}$$

$$\dot u = \frac{Y(1-X-T(X))}{(X-1)(T(X)-1)}, \tag{S$_4$}$$

$$\dot u = \frac{Y}{(X^{1/2}+\varepsilon)(T(X^{1/2})+\varepsilon)}, \quad \varepsilon^2 = 1. \tag{S$_5$}$$

Во всех случаях, $l = 1$, для уравнения (S_1) также и $l = 0$.

5 Подстановки типа Миуры

Первые два уравнения из списка известны, три последних являются новыми. Однако, и они сводятся к известным, посредством разностных подстановок типа Миуры. Точнее:

- уравнение (S_1) служит симметрией второго порядка для шварцианной цепочки Вольтерра (9);
- уравнение (S_2) это шварцианная цепочка Богоявленского [Papageorgiou, Nijhoff 1996; Nijhoff 1996];
- уравнение (S_3) связано преобразованием Бэклунда с цепочкой Гарифуллина–Ямилова [Garifullin, Yamilov 2012; Garifullin, Mikhailov, Yamilov 2014];
- оба уравнения (S_4) и (S_5) связаны преобразованиями Миуры с дискретным аналогом уравнения Савады–Котеры [Hu, Clarkson, Bullough 1997; Adler, Postnikov 2011].

Рассмотрим эти замены подробнее.

(S_1), симметрия шварцианной цепочки Вольтерра

$$u_{,t_1} = Y, \quad u_{,t_2} = Y(X + T(X) + c).$$

Произвольный параметр c отвечает за добавление младшей симметрии. При выборе $c = -1$ правая часть факторизуется на линейные множители:

$$\begin{aligned} u_{,t_1} &= \frac{(u_1 - u)(u - u_{-1})}{u_1 - u_{-1}}, \\ u_{,t_2} &= -\frac{(u_1 - u)^2(u - u_{-1})^2(u_2 - u_{-2})}{(u_1 - u_{-1})^2(u_2 - u)(u - u_{-2})}. \end{aligned}$$

Подстановка

$$v = X = \frac{(u_1 - u)(u_{-1} - u_{-2})}{(u_1 - u_{-1})(u - u_{-2})}$$

приводит к цепочке Вольтерра и её симметрии:

$$\begin{aligned} v_{,t_1} &= v(v_1 - v_{-1}), \\ v_{,t_2} &= v(v_1(v_2 + v_1 + v) - v_{-1}(v + v_{-1} + v_{-2})) - 2v(v_1 - v_{-1}). \end{aligned}$$

(S_2), шварцианная цепочка Богоявленского

$$\dot u = \frac{Y}{(X-1)(T(X)-1)}$$

или, в развёрнутом виде,

$$\dot u = \frac{(u_2-u)(u_1-u_{-1})(u-u_{-2})}{(u_2-u_{-1})(u_1-u_{-2})}. \tag{11}$$

Это уравнение связано с модифицированной цепочкой Богоявленского

$$\dot v = v(v+1)(v_2v_1 - v_{-1}v_{-2})$$

любой из следующих подстановок:

$$v = \frac{X}{1-X} = \frac{(u_1-u)(u_{-1}-u_{-2})}{(u_1-u_{-2})(u-u_{-1})}, \quad v = \frac{u_{-1}-u_1}{u_2-u_{-1}}, \quad v = \frac{u-u_2}{u_2-u_{-1}}.$$

Этот пример допускает обобщение на цепочки Богоявленского произвольного порядка.

(S$_3$), шварцианная цепочка Гарифуллина–Ямилова

$$\dot{u} = \frac{4Y(1-X-T(X))}{(2X-1)(2T(X)-1)} = -2Y\left(\frac{1}{2X-1} + \frac{1}{2T(X)-1}\right).$$

Подстановки

$$w = \frac{1}{2X-1} = \frac{(u_1-u_{-1})(u-u_{-2})}{(u_1-u)(u_{-1}-u_{-2})-(u_1-u_{-2})(u-u_{-1})}$$
$$= vv_1$$

определяют преобразования Миуры

$$(\mathsf{S}_3) \longrightarrow (12) \longleftarrow (13)$$

между (S$_3$) и уравнениями

$$\dot{w} = (w+1)\left(\frac{w(w_1+1)w_2}{w_1} - \frac{w(w_{-1}+1)w_{-2}}{w_{-1}} + w_1 - w_{-1}\right), \qquad (12)$$

$$\dot{v} = (v_1v+1)(vv_{-1}+1)(v_2-v_{-2}). \qquad (13)$$

(S_4), шварцианная дискретизация уравнения Савады–Котеры

$$\dot u=\frac{Y(1-X-T(X))}{(X-1)(T(X)-1)}=\frac{(u_1-u)(u-u_{-1})(u_2-u_{-2})}{(u_2-u_{-1})(u_1-u_{-2})}.$$

Подстановка

$$v=\frac{u-u_1}{u_2-u_{-1}}$$

приводит к дискретизации уравнения Савады–Котеры

$$\dot v=v^2(v_2v_1-v_{-1}v_{-2})-v(v_1-v_{-1}). \tag{14}$$

Ещё одна модифицированная цепочка (ср. с (12))

$$\dot w=(w+1)\Big(\frac{w(w_1+1)^2w_2}{w_1}-\frac{w(w_{-1}+1)^2w_{-2}}{w_{-1}} \\ +(2w+1)(w_1-w_{-1})\Big) \tag{15}$$

связана с (S_4) подстановкой

$$w = \frac{1}{X-1} = -\frac{(u_1-u_{-1})(u-u_{-2})}{(u_1-u_{-2})(u-u_{-1})}.$$

Цепочка (S_5) (пусть, для определённости, $\varepsilon=-1$)

$$\dot u = \frac{Y}{(X^{1/2}-1)(T(X^{1/2})-1)},$$

также связана с (15), подстановкой $w=1/(X^{1/2}-1)$.

Таким образом, все перечисленные уравнения связаны подстановками типа Миуры:

$$(\mathsf{S}_5) \longrightarrow (15) \longleftarrow (\mathsf{S}_4) \longrightarrow (14)$$

6 Некоторые обобщения

Ограничение Мёбиус-инвариантным случаем носит искусственный характер. Найденные примеры не являются изолированными ответами, они содержатся в более общих семействах уравнений, содержащих произвольные параметры. Мёбиус-инвариантные уравнения выделяются в этих семействах лишь расширением алгебры классических симметрий, но ничем не отличаются с точки зрения высших симметрий.

Например, шварцианная цепочка Богоявленского (11) является частным случаем интегрируемой цепочки

$$\dot{u} = \frac{(u_2 - au)(u_1 - au_{-1})(u - au_{-2})}{(u_2 - bu_{-1})(u_1 - bu_{-2})}.$$

Для неё Мёбиус-инвариантность нарушена, но подстановка в модифицированную цепочку Богоявленского выживает и принимает вид

$$\dot{v} = v(bv + a)(v_2 v_1 - v_{-1} v_{-2}), \quad v = \frac{au_{-1} - u_1}{u_2 - bu_{-1}}.$$

Пример (S_4) также является частным случаем уравнения

$$\dot{u} = \frac{(u_1 - au)(u - au_{-1})(u_2 - a^2 u_{-2})}{a(u_2 - au_{-1})(u_1 - au_{-2})},$$

связанного с (14) посредством замены

$$v = \frac{au - u_1}{u_2 - au_{-1}}. \tag{16}$$

В обоих примерах, указанные подстановки имеют вид линейного уравнения относительно u. Фактически, это уравнение Лакса для цепочки в переменных v, причём a служит спектральным параметром, а u играет роль волновой функции. Таким образом, рассмотрение этих более общих семейств цепочек совершенно естественно с точки зрения соответствующих спектральных задач.

Оба примера обобщаются на цепочки произвольного порядка. Аналогичные обобщения имеются и для других уравнений списка.