О комбинаторике некоторых интегрируемых иерархий

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау · Черноголовка · 16 января 2015

Введение

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1\\
u_{t_3} &= u_3 + 6uu_1\\
u_{t_5} &= u_5 + (10uu_3 + 20u_1u_2) + 30u^2u_1\\
u_{t_7} &= u_7 + (14uu_5 + 42u_1u_4 + 70u_2u_3)\\
&\quad + (70u^2u_3 + 280uu_1u_2 + 70u_1^3) + 140u^3u_1\\
u_{t_9} &= u_9 + (18uu_7 + 72u_1u_6 + 168u_2u_5 + 252u_3u_4)\\
&\quad + (126u^2u_5 + 756uu_1u_4 + 1260uu_2u_3 + 966u_1^2u_3 + 1302u_1u_2^2)\\
&\quad + (420u^3u_3 + 2520u^2u_1u_2 + 1260uu_1^3) + 630u^4u_1
\end{aligned}
$$

Интегрируемая иерархия КдФ, $w(u_j) = j + 2$

Постановка задачи

Правильные вопросы

1) О пользе для народного хозяйства
2) Что такое интегрируемость
3) Как решить эти уравнения

Неправильные вопросы

1) Что это за странные коэффициенты
2) Чему они равны
3) Как их вычислить

Для нас основным будет вопрос 1), в такой формулировке:

Гипотеза. Коэффициенты перечисляют некоторые комбинаторные объекты. Многочлены задают их статистику.

Мы хотим найти определение объектов по заданной статистике — это обратная задача перечислительной комбинаторики.

Кроме КдФ, мы рассмотрим иерархии Бюргерса и Ибрагимова–Шабата.

Ответы

На правильные вопросы ответы известны.

1) *Что это за странные коэффициенты*

Увы, для КдФ этого пока никто не знает. Однако, мы установим комбинаторный смысл одной последовательности многочленов, непосредственно связанных с многочленами КдФ. Возможно, это позволит прояснить и природу последних. То же самое — для ИШ.

Дальнейшее содержание доклада

иерархия		комбинаторные объекты, их количества
pot-Бюргерс	$=$	разбиения множеств, полиномы Белла, числа Стирлинга 2-го рода, числа Белла
Бюргерс	$=$	разбиения без выделенных синглетов
Ибрагимов–Шабат	$\approx$	разбиения типа B, B-аналоги чисел Стирлинга 2-го рода, числа Доулинга
КдФ	$\approx$	неперекрывающиеся разбиения, числа Бесселя

новые результаты

В комбинаторике, некоторые объекты из правой части таблицы изучены очень хорошо, другие не очень. О левой части таблицы комбинаторы не подозревают, насколько мне известно.

В теории интегрируемых уравнений изучена, естественно, левая часть. Комбинаторная интерпретация отмечалась только в простейшем случае, для pot-Бюргерса, см. напр. Lambert et al. (1994), а об остальном матфизики не подозревают, насколько мне известно. Несколько лучше изучена комбинаторика решений (разложения для τ-функций и т.п.), но мы её не коснёмся.

2) *Чему они равны*

«Явные» формулы для коэффициентов нас не будут интересовать. Отметим всё же, что для pot-КдФ такие формулы действительно существуют. Одна из них получена ещё Гельфандом и Диким (1975), в ней коэффициент при данном мономе выражен через некоторый многократный интеграл. Другую формулу вывел Schimming (1995). Она без интегралов, но тоже очень сложная. Лишь в случае pot-Бюргерса формулу для коэффициентов действительно можно назвать явной.

3) *Как их вычислить*

Я обманул, этот вопрос тоже из числа правильных, ответ давно известен. No problemo: неопределённые коэффициенты, лаксова пара, дробные степени дифференциальных операторов, разложение ψ-функции, оператор рекурсии, мастер-симметрия…

Конкретно, для КдФ будет использоваться уравнение Риккати (обращение преобразования Миуры). См.напр. ГД (1975).

Мораль

— Теория интегрируемых уравнений изучает производящие функции.
— Комбинаторика изучает производящие функции.
— Поэтому, совпадения не так уж удивительны.
— Если они часты, то можно ожидать и пользы для народного хозяйства (например, можно уволить половину учёных).

Потенциальная иерархия Бюргерса

Она получается из иерархии уравнения теплопроводности

$$\psi_{t_n} = \psi_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

в результате точечной замены $\psi = e^v$:

$$v_{t_n} = e^{-v} D^n(e^v) = (D + v_1)^n(1) = Y_n(v_1, \ldots, v_n). \tag{1}$$

Из ничего возникает содержательная комбинаторика!

$$v_{t_0} = 1$$
$$v_{t_1} = v_1$$
$$v_{t_2} = v_2 + v_1^2$$
$$v_{t_3} = v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3$$
$$v_{t_4} = v_4 + (4v_1v_3 + 3v_2^2) + 6v_1^2v_2 + v_1^4$$
$$v_{t_5} = v_5 + (5v_1v_4 + 10v_2v_3) + (10v_1^2v_3 + 15v_1v_2^2) + 10v_1^3v_2 + v_1^5$$

Иерархия pot-Бюргерса, $w(v_j) = j$

Многочлены Y_n играют фундаментальную роль во многих науках и известны под названием [полные экспоненциальные] многочлены Белла, см. напр. Comtet (1974). Для них моментально пишется экспоненциальная производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} D^n(e^v) \frac{z^n}{n!} = e^{v(x+z)-v(x)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{z^n}{n!}\right),$$

откуда следует явная формула

$$Y_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1}\ldots(r!)^{k_r} k_1!\ldots k_r!}\, v_1^{k_1}\ldots v_r^{k_r}. \tag{2}$$

Её комбинаторная интерпретация очевидна:

— моному отвечает разбиение числа n;

— коэффициент при мономе считает разбиения множества $[n] = \{1, \ldots, n\}$ на подмножества (или блоки) предписанного размера. Разбиение рассматривается как неупорядоченное множество (элементами которого служат блоки), то есть, нумерация блоков не играет роли.

Теорема 1. В иерархии pot-Бюргерса, коэффициент при мономе $v_1^{k_1}\ldots v_r^{k_r}$ равен числу разбиений множества из $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r$ элементов на k_1 1-блоков, k_2 2-блоков, . . . , k_r r-блоков.

$n=2:$	v_2	v_1^2
	2	$1+1$
	12	$1\|2$

$n=3:$	v_3	$3v_1v_2$	v_1^3
	3	$1+2$	$1+1+1$
	123	$1\|23$	$1\|2\|3$
		$2\|13$	
		$3\|12$	

$n=4:$	v_4	$4v_1v_3$	$3v_2^2$	$6v_1^2v_2$	v_1^4
	4	$1+3$	$2+2$	$1+1+2$	$1+1+1+1$
	1234	$1\|234$	$12\|34$	$1\|2\|34$	$1\|2\|3\|4$
		$2\|134$	$13\|24$	$1\|3\|24$	
		$3\|124$	$14\|23$	$1\|4\|23$	
		$4\|123$		$2\|3\|14$	
				$2\|4\|13$	
				$3\|4\|12$	

Можно огрубить статистику, забыв про размеры блоков и интересуясь только их числом в данном разбиении. Очевидно, для этого достаточно сложить коэффициенты членов одной степени, то есть, рассмотреть многочлен Белла от одной переменной

$$B_n(u) = Y_n(u, \ldots, u) = (u\partial_u + u)^n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} u^k.$$

Коэффициент при u^k равен числу разбиений множества $[n]$ на k блоков и называется числом Стирлинга второго рода (OEIS:A048993):

1							**1**
0	1						**1**
0	1	1					**2**
0	1	3	1				**5**
0	1	7	6	1			**15**
0	1	15	25	10	1		**52**
0	1	31	90	65	15	1	**203**

Суммы по строкам, числа Белла $B_n = B_n(1) = Y_n(1, \ldots, 1)$, дают общее число разбиений (OEIS:A000110).

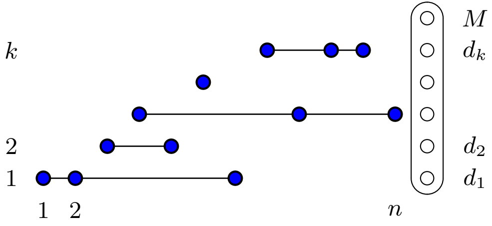
Доказательство Теоремы 1.

Один способ следует непосредственно из явной формулы (2) для коэффициентов. Однако, мы не всегда будем иметь такую формулу. Более концептуальным является следующее рассуждение.

Пусть $\Pi_{n,k}$ обозначает множество разбиений $[n]$ на k блоков, Π_n множество всех разбиений. Рассмотрим операции

$$d_j : \Pi_{n,k} \to \Pi_{n+1,k}, \quad j = 1, \ldots, k, \qquad M : \Pi_{n,k} \to \Pi_{n+1,k+1},$$

определяемые, как добавление элемента $n+1$ в j-й блок (номер блока можно задать, например, упорядочением по минимальным элементам) или в качестве нового синглета.



Стартуя с разбиения $\{\varnothing\}$ множества $[0] = \varnothing$, можно породить операциями d_j, M любое разбиение множества $[n]$, причём единственным способом. Действительно, последовательность операций однозначно восстанавливается удалением элементов в обратном порядке $n, \ldots, 1$.

Напомним, что в теореме разбиению π на k_1 1-блоков, ..., k_r r-блоков сопоставлен моном $p(\pi) = v_1^{k_1} \ldots v_r^{k_r}$.

Дифференцирование $D(p(\pi))$ по правилу Лейбница состоит в замене v_i на v_{i+1} поочерёдно для каждого сомножителя, с учётом кратности. На языке разбиений, это означает поочерёдное наращивание одного из блоков новым элементом. В результате, мы получаем сумму мономов $p(d_j(\pi))$ для всех допустимых значений j.

Умножение монома $p(\pi)$ на v_1 даёт моном $p(M(\pi))$.

Таким образом, многочлены

$$P_n = \sum_{\pi \in \Pi_n} p(\pi)$$

связаны рекуррентным соотношением $P_{n+1} = (D + v_1)(P_n)$, и так как $P_1 = v_1$, то $P_n = Y_n(v_1, \ldots, v_n)$. $\blacksquare$

Иерархия Бюргерса

Так как правые части уравнения (1) не содержат v, то можно сделать подстановку $u = v_1$. Это приводит к иерархии Бюргерса

$$u_{t_n} = D(Y_n(u, \ldots, u_{n-1})), \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Какую интерпретацию имеют коэффициенты в этом случае?

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1 \\
u_{t_2} &= u_2 + 2uu_1 \\
u_{t_3} &= u_3 + (3uu_2 + 3u_1^2) + 3u^2u_1 \\
u_{t_4} &= u_4 + (4uu_3 + 10u_1u_2) + (6u^2u_2 + 12uu_1^2) + 4u^3u_1 \\
u_{t_5} &= u_5 + (5uu_4 + 15u_1u_3 + 10u_2^2) + (10u^2u_3 + 50uu_1u_2 + 15u_1^3) \\
&\qquad + (10u^3u_2 + 30u^2u_1^2) + 5u^4u_1
\end{aligned}$$

Иерархия Бюргерса, $w(u_j) = j + 1$

Это легко понять на следующем примере, для $n = 3$:

$$
\begin{array}{ccc}
v_3 & 3v_1v_2 & v_1^3 \\
u_2 & 3uu_1 & u^3 \\
123 & 1|23 & 1|2|3 \\
 & 2|13 & \\
 & 3|12 &
\end{array}
\quad \xrightarrow{D} \quad
\begin{array}{cccc}
u_3 & \multicolumn{2}{c}{3uu_2 + 3u_1^2} & 3u^2u_1 \\
1234 & 1|234 & 14|23 & 1|2|34 \\
 & 2|134 & 24|13 & 1|24|3 \\
 & 3|124 & 34|12 & 14|2|3
\end{array}
$$

$$
\nearrow
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
u_3 & 3uu_2 & 3u_1^2 & 3u^2u_1 & u^4 \\
1234 & 1|234 & 12|34 & 1|2|34 & \cancel{1|2|3|4} \\
 & 2|134 & 13|24 & 1|3|24 & \\
 & 3|124 & 14|23 & \cancel{1|4|23} & \\
 & \cancel{4|123} & & 2|3|14 & \\
 & & & \cancel{2|4|13} & \\
 & & & \cancel{3|4|12} &
\end{array}
$$

Переобозначение $v_j \to u_{j-1}$, конечно, не влияет на комбинаторику.

Дифференцирование, как мы знаем, заключается в поочерёдном наращивании одного из блоков новым элементом, а новый блок мы на этот раз не добавляем. То есть, рассматриваемые разбиения строятся так же, как и раньше, но на последнем шаге не используется операция M.

В результате, из разбиений Π_n мы получаем разбиения Π_{n+1}, но не все, а только те, в которых элемент $n+1$ не является синглетом.

Теорема 2. В иерархии Бюргерса, коэффициент при мономе $u^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_r^{k_r}$ равен числу разбиений множества с одним выделенным элементом на k_0 1-блоков, ..., k_r $(r+1)$-блоков, при дополнительном ограничении, что выделенный элемент не входит в 1-блоки.

Как и раньше, можно огрублять статистику. Например, полагая $u = 1$, получаем общее число рассматриваемых разбиений множества $[n+1]$:

$$D(Y_n(u, \dots, u_{n-1}))|_{u_j=1} = B'_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Эти числа образуют последовательность ‘2-Bell numbers’

$$1,\ 3,\ 10,\ 37,\ 151,\ 674,\ 3263,\ 17007,\ 94828,\ 562595,\ \ldots$$

Согласно (OEIS:A005493), она характеризуется также многими другими способами, в частности, как число разбиений $[n]$ с выделенным блоком или как общее число блоков во всех разбиениях $[n]$. Эти интерпретации также очевидны, так как выделение блока можно истолковать как его наращивание при дифференцировании, и эта операция применяется ровно столько раз, сколько имеется блоков.

Иерархия Ибрагимова–Шабата

Рекуррентные соотношения

Напомним последовательность точечных замен и потенцирований между уравнением $\psi_{t_3} = \psi_3$ и уравнением Ибрагимова–Шабата (1980)

$$u_{t_3} = u_3 + 3u^2 u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4 u_1.$$

$$\psi_{t_3} = \psi_3 \qquad\qquad u_{t_3} = u_3 + 3u^2 u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4 u_1$$

$$\updownarrow \psi^2 = s \qquad\qquad \updownarrow u^2 = v$$

$$s_{t_3} = D\left(s_2 - \frac{3s_1^2}{4s}\right) \qquad\qquad v_{t_3} = D\left(v_2 - \frac{3v_1^2}{4v} + 3vv_1 + v^3\right)$$

$$\uparrow s = q_1 \qquad\qquad \uparrow v = w_1$$

$$q_{t_3} = q_3 - \frac{3q_2^2}{4q_1} \quad \xleftrightarrow{q=e^{2w}} \quad w_{t_3} = w_3 - \frac{3w_2^2}{4w_1} + 3w_1 w_2 + w_1^3$$

Линеаризация уравнения ИШ

Эти замены портят чётные потоки $\psi_{t_{2m}} = \psi_{2m}$. Действительно, замена $\psi^2 = s$ приводит к уравнению $s_{t_n} = \dots$ с полной производной в правой части лишь при нечётных n:

$$s_{t_n} = 2\psi\psi_n = D(2\psi\psi_{n-1} - 2\psi_1\psi_{n-2} + 2\psi_2\psi_{n-3} + \dots \pm \psi^2_{(n-1)/2}). \quad (3)$$

В аналогичной формуле для чётных n слагаемое $\psi^2_{n/2}$ остаётся за знаком производной, то есть $s_{t_n} \notin \operatorname{Im} D$, поэтому дальнейшая подстановка $s = q_1$ выводит из класса эволюционных уравнений.

Утверждение. Иерархия ИШ эквивалентна уравнению

$$D_t(u) = \frac{1}{2u} D(A\bar{A}) = \frac{1}{2z}(A - \bar{A}) - uA\bar{A}, \quad (4)$$

где $A = A(z)$, $\bar{A} = A(-z)$,

$$D_t = \partial_{t_1} + z^2\partial_{t_3} + z^4\partial_{t_5} + \dots\ , \qquad A = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\ ,$$

и

$$z(D + u^2)(A) = A - u. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi = \psi + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots$$

и положим $\Psi = \sqrt{2} e^w A$. Уравнение (5) следует из равенств

$$zD(\Psi) = \Psi - \psi, \quad \psi = \sqrt{q_1} = \sqrt{2e^{2w} w_1} = \sqrt{2} e^w u.$$

Далее, пусть $\bar{\Psi} = \Psi(-z)$, тогда имеем (ср. с (3))

$$\begin{aligned} D(\Psi\bar{\Psi}) &= z^{-1}(\Psi - \psi)\bar{\Psi} - z^{-1}\Psi(\bar{\Psi} - \psi) \\ &= z^{-1}\psi(\Psi - \bar{\Psi}) = 2\psi(\psi_1 + \psi_3 z^2 + \dots) = 2\psi D_t(\psi) = D_t(s). \end{aligned}$$

Применяя D^{-1}, получаем $\Psi\bar{\Psi} = D_t(q) = 2e^{2w} D_t(w)$, откуда

$$2uD_t(u) = D_t(v) = DD_t(w) = \frac{1}{2} D(e^{-2w}\Psi\bar{\Psi}) = D(A\bar{A}).$$

Второе равенство в (4) следует при замене производных из (5). ∎

Уравнение (5) эквивалентно рекуррентным соотношениям

$$a_0 = u, \quad a_n = a_n(u, \ldots, u_n) = (D + u^2)(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \,, \tag{6}$$

которые и будут предметом изучения. Попробуем найти комбинаторную интерпретацию этой рекурсии.

$$\begin{aligned}
a_0 &= u \\
a_1 &= u_1 + u^3 \\
a_2 &= u_2 + 4u^2u_1 + u^5 \\
a_3 &= u_3 + (5u^2u_2 + 8uu_1^2) + 9u^4u_1 + u^7 \\
a_4 &= u_4 + (6u^2u_3 + 26uu_1u_2 + 8u_1^3) + (14u^4u_2 + 44u^3u_1^2) + 16u^6u_1 + u^9 \\
a_5 &= u_5 + (7u^2u_4 + 38uu_1u_3 + 26uu_2^2 + 50u_1^2u_2) \\
&\quad + (20u^4u_3 + 170u^3u_1u_2 + 140u^2u_1^3) \\
&\quad + (30u^6u_2 + 140u^5u_1^2) + 25u^8u_1 + u^{11}
\end{aligned}$$

Многочлены a_n, $w(u_j) = 2j + 1$

Эксперимент

В отличие от случая Бюргерса, мы не знаем явной формулы для коэффициентов a_n. И даже если бы знали — как догадаться, какие комбинаторные объекты подсчитываются?

Огрубим статистику, объединяя члены одной степени. В многочленах $a_n(u, \ldots, u) = (u\partial_u + u^2)^n(u)$ есть только нечётные степени, коэффициенты при них образуют известный треугольник из так называемых B-аналогов чисел Стирлинга 2-го рода (OEIS:A039755)

1							**1**
1	1						**2**
1	4	1					**6**
1	13	9	1				**24**
1	40	58	16	1			**116**
1	121	330	170	25	1		**648**
1	364	1771	1520	395	36	1	**4088**

Суммы по строкам, то есть, полные суммы коэффициентов $a_n(1, \ldots, 1)$ образуют последовательность (OEIS:A007405) B-аналогов чисел Белла, или чисел Доулинга. Ура! А что это такое?

Разбиения типа B (signed set partitions, $\mathbb{Z}_2$-partitions)

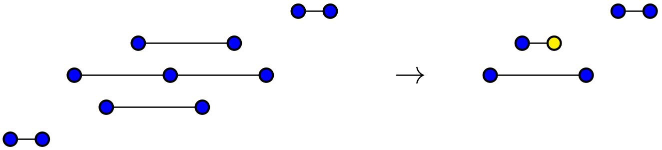
Разбиения могут использовать ту или иную структуру на множестве. Разбиения типа B (Dowling 1973) используют отражение $j \to -j$.

Разбиение π множества $\{-n, \ldots, n\}$ является разбиением типа B, если

1) $\pi = -\pi$, то есть, для каждого блока $\beta \in \pi$ также $-\beta \in \pi$;
2) в π имеется лишь один блок $\pi_0 \in \pi$, такой что $\pi_0 = -\pi_0$.

Будем обозначать все такие разбиения Π_n^B, разбиения с k блочными парами $\Pi_{n,k}^B$.

Для краткости, в 0-блоке не пишут отрицательные элементы, а из блочной пары оставляют тот блок, у которого наименьший по модулю элемент положителен; минус изображается чертой сверху:



$$-5, -4 | -3, 0, 3 | -2, 1 | -1, 2 | 4, 5 \quad \to \quad 03 | 1\bar{2} | 45$$

Порождающие операции

Для блока β обозначим через $|\beta|$ число его положительных элементов:

$$|\beta| = \#\{i \in \beta : i > 0\}.$$

Ясно, что число отрицательных элементов равно $|\bar{\beta}|$.

Пусть разбиение $\pi \in \Pi^B_{n,k}$ состоит из 0-блока π_0 и блочных пар $\pi_1, \bar{\pi}_1, \ldots,$ $\pi_k, \bar{\pi}_k$, причём в блоках π_j наименьший по модулю элемент положителен. Сопоставим такому разбиению моном

$$p(\pi) = u_{|\pi_0|} \cdot u_{|\pi_1|-1} u_{|\bar{\pi}_1|} \cdots u_{|\pi_k|-1} u_{|\bar{\pi}_k|}.$$

Теорема 3. Многочлены (6) равны

$$a_n = \sum_{\pi \in \Pi^B_n} p(\pi).$$

Таким образом, многочлены a_n являются $\mathbb{Z}_2$-аналогами полных экспоненциальных многочленов Белла Y_n.

Пример: $n = 3$

u_3	$5u^2u_2$	$8uu_1^2$	$9u^4u_1$	u^7
0123	$0\|123$	$0\|12\bar{3}$	$0\|12\|3$	$1\|2\|3\|4$
	$0\|1\bar{2}\bar{3}$	$0\|1\bar{2}3$	$0\|1\bar{2}\|3$	
	$012\|3$	$01\|23$	$0\|13\|2$	
	$013\|2$	$01\|2\bar{3}$	$0\|1\bar{3}\|2$	
	$023\|1$	$02\|13$	$0\|23\|1$	
		$02\|1\bar{3}$	$0\|2\bar{3}\|1$	
		$03\|12$	$01\|2\|3$	
		$03\|1\bar{2}$	$02\|1\|3$	
			$03\|1\|2$	

Доказательство. Обозначим сумму в правой части p_n. Очевидно, $p_0 = u = a_0$, и надо лишь доказать, что p_n удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и a_n, то есть, $p_n = (D + u^2)(p_{n-1})$.

Заметим, что удаление элементов $\pm n$ из любого разбиения Π_n^B приводит к разбиению из Π_{n-1}^B. Следовательно, Π_n^B получается из Π_{n-1}^B добавлением $\pm n$ всеми возможными способами. Они очевидны:

$d_0 : \Pi^B_{n-1,k} \to \Pi^B_{n,k}$, добавление обоих элементов $\pm n$ в 0-блок;

$d_j : \Pi^B_{n-1,k} \to \Pi^B_{n,k}$, $j = 1, \ldots, k$, добавление $\pm n$ в блоки $\pm\pi_j$;

$\bar{d}_j : \Pi^B_{n-1,k} \to \Pi^B_{n,k}$, $j = 1, \ldots, k$, добавление $\pm n$ в блоки $\mp\pi_j$;

$M : \Pi^B_{n-1,k} \to \Pi^B_{n,k+1}$, добавление новой блочной пары $\{-n\}$, $\{n\}$.

Стартуя с тривиального разбиения множества $\{0\}$, этими операциями можно породить, единственным способом, любое разбиение B-типа. Проследим, что при этом происходит с мономом $p(\pi)$, $\pi \in \Pi^B_{n-1,k}$.

d_0: множитель $u_{|\pi_0|}$ заменяется на $u_{|\pi_0|+1}$;

d_j: множитель $u_{|\pi_j|-1}$ заменяется на $u_{|\pi_j|}$;

$\bar{d}_j$: множитель $u_{|\bar{\pi}_j|}$ заменяется на $u_{|\bar{\pi}_j|+1}$;

M: добавляются два множителя u.

Таким образом, применение всех возможных операций приводит к замене монома $p(\pi)$ на сумму мономов $(D + u^2)(p(\pi))$. ∎

Иерархия Кортевега–де Фриза

Рекуррентные соотношения

Вот самый эффективный способ вычисления потоков КдФ (без доказательства). Уравнение Риккати

$$D(f) + f^2 = \lambda - u, \quad \lambda = z^2/4 \tag{7}$$

определяет производящую функцию

$$f(z) = -\frac{z}{2} + \frac{f_1(u)}{z} + \frac{f_2(u, u_1)}{z^2} + \cdots + \frac{f_n(u, \ldots, u_{n-1})}{z^n} + \cdots .$$

Положим

$$g(z) = \frac{1}{2(f(z) - f(-z))} = -\frac{1}{2z} - \frac{g_1}{z^3} - \frac{g_3}{z^5} - \cdots - \frac{g_{2m-1}}{z^{2m+1}} - \cdots ,$$

тогда иерархия КдФ имеет вид

$$u_{t_{2m+1}} = D(g_{2m+1}) = u_{2m+1} + \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Уравнение (7) даёт рекуррентные соотношения

$$f_1 = u, \quad f_{n+1} = D(f_n) + \sum_{s=1}^{n-1} f_s f_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots\ , \tag{8}$$

которые и будут для нас основными. Уравнение для $g(z)$ эквивалентно

$$g_1 = u, \quad g_{2m+1} = f_{2m+1} + 2\sum_{s=1}^{m} g_{2s-1} f_{2m-2s+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= u \\
f_2 &= u_1 \\
f_3 &= u_2 + u^2 \\
f_4 &= u_3 + 4uu_1 \\
f_5 &= u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) + 2u^3 \\
f_6 &= u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) + 16u^2u_1 \\
f_7 &= u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) + (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4
\end{aligned}$$

Многочлены f_n, $w(u_j) = j + 2$

Первая интерпретация: нераскрытые мономы

Рассмотрим выражения φ, построенные из символа u и операций $M(a,b)$, $d_j(a)$, $1 \le j \le \deg a$, где $\deg a$ равно числу вхождений u в a.

Значение выражения $\mathrm{expand}(\varphi)$ вычисляется по следующим правилам:
— независимо от порядка операций, сначала применяются d_j, затем M;
— действие $d_j(a)$ состоит в замене j-го вхождения u_i в a на u_{i+1} (как обычно, u отождествляется с u_0);
— $M(a,b)$ заменяется на произведение ab.

Пусть Φ_n множество всех выражений, в которых общее число символов u, d, M равно n. Например:

	выражения	значения
$n=1$	u	u
$n=2$	$d_1(u)$	u_1
$n=3$	$d_1(d_1(u)),\quad M(u,u)$	$u_2,\quad u^2$
$n=4$	$d_1(d_1(d_1(u)))$,	u_3,
	$d_1(M(u,u)),\quad d_2(M(u,u))$	$uu_1,\ uu_1$
	$M(d_1(u),u),\quad M(u,d_1(u))$	$uu_1,\ uu_1$

Теорема 4. В многочленах f_n, коэффициент при каждом мономе равен числу способов, которыми можно получить данный моном при помощи операций M, d_j. Иначе говоря,

$$f_n = \sum_{\varphi \in \Phi_n} \operatorname{expand}(\varphi). \tag{9}$$

Доказательство. Очевидны свойства

$$\sum_{j=1}^{\deg a} \operatorname{expand}(d_j(a)) = D(\operatorname{expand}(a)),$$

$$\operatorname{expand}(M(a,b)) = \operatorname{expand}(a) \operatorname{expand}(b).$$

Так как любое выражение из Φ_{n+1}, $n > 0$, имеет вид $d_j(a)$, где $a \in \Phi_n$, $1 \leq j \leq \deg a$, либо $M(a,b)$, где $a \in \Phi_s$, $b \in \Phi_{n-s}$, то многочлены (9) удовлетворяют рекуррентному соотношению (8). ■

Установленная интерпретация довольно наглядна, но хочется сравнить её с чем-то более стандартным.

Эксперимент

Как всегда, объединим в f_n члены одной степени. Это даёт числовой треугольник, которого нет в OEIS. Однако, последовательность полных сумм коэффициентов оказывается известной: $f_{n+1}[1]$ равно числу неперекрывающихся разбиений множества $[n]$, или числу Бесселя B_n^* (OEIS:A006789).

$$\begin{array}{llllllll}
1 & & & & & & & \mathbf{1} \\
1 & & & & & & & \mathbf{1} \\
1 & 1 & & & & & & \mathbf{2} \\
1 & 4 & & & & & & \mathbf{5} \\
1 & 11 & 2 & & & & & \mathbf{14} \\
1 & 26 & 16 & & & & & \mathbf{43} \\
1 & 57 & 80 & 5 & & & & \mathbf{143} \\
1 & 120 & 324 & 64 & & & & \mathbf{509} \\
1 & 247 & 1170 & 490 & 14 & & & \mathbf{1922} \\
1 & 502 & 3948 & 2944 & 256 & & & \mathbf{7651} \\
1 & 1013 & 12776 & 15403 & 2730 & 42 & & \mathbf{31965}
\end{array} \tag{10}$$

Отметим, что уравнение $u\partial_u(f) + f^2 = \lambda - u$ действительно сводится к уравнению Бесселя. Кроме того, в треугольнике можно усмотреть числа Эйлера (OEIS:A000295), числа Каталана (OEIS:A000108) и степени 4.

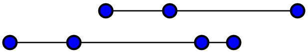
Вторая интерпретация: неперекрывающиеся разбиения

Этот тип разбиений (Flajolet, Schott 1990) использует отношение порядка на разбиваемом множестве $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

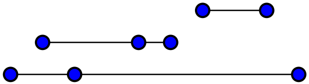
Блоки α и β разбиения π перекрываются, если

$$\min \alpha < \min \beta < \max \alpha < \max \beta.$$

Разбиение неперекрывающееся (non-overlapping partition, NOP), если в нём не перекрывается ни одна пара блоков. Все NOP множества $[n]$ будем обозначать Π_n^*.



перекрывающиеся блоки



неперекрывающиеся блоки

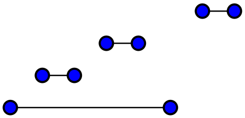
Носителем блока α называется интервал $[\min \alpha, \max \alpha]$. Определение NOP эквивалентно тому, что носители любых двух блоков либо не пересекаются, либо содержатся один в другом.

Более сильное условие non-crossing запрещает $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$. NCP популярнее, но нам не понадобятся. Отметим простейшие свойства NOP:

— При $n = 0, 1, 2, 3$ имеем $\Pi_n^* = \Pi_n$. Из Π_4 выкидывается лишь одно разбиение $13|24$.

— Синглеты ни с какими блоками не перекрываются.

— NOP, содержащие только дуплеты, легко отождествляются с правильными скобочными структурами:



$$\rightarrow \qquad (\,(\,)\,(\,)\,)\,(\,)$$

Это поясняет, откуда в треугольнике числа Каталана. Рекурсия для «бездисперсионных членов» получается, если убрать дифференцирование:

$$f_1 = u, \quad f_{n+1} = \cancel{D(f_n)} + \sum_{s=1}^{n-1} f_s f_{n-s} \quad \rightarrow \quad u, 0, u^2, 0, 2u^3, 0, 5u^4, 0, \ \ldots$$

А как установить соответствие с NOP общего вида?

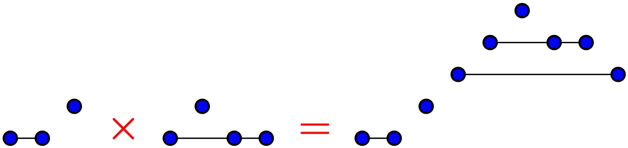
Порождающие операции

Отождествим переменную u с разбиением $\{\varnothing\}$ и определим действие операций M и d_j на разбиениях, так, чтобы выражения Φ_{n+1} оказались во взаимно-однозначном соответствии с Π_n^*.

Степень. Положим $\deg \pi = k$, если π содержит $k-1$ мультиплет.

Операция M. Пусть $\rho \in \Pi_r^*$, $\sigma \in \Pi_s^*$. Обозначим через $(\sigma)_{r+1}$ разбиение множества $\{r+2, r+s+1\}$, получающееся из σ сдвигом всех элементов на $r+1$, и положим

$$M(\rho,\sigma) = \rho \cup \{\{r+1, r+s+2\}\} \cup (\sigma)_{r+1} \in \Pi_{r+s+2}^*.$$



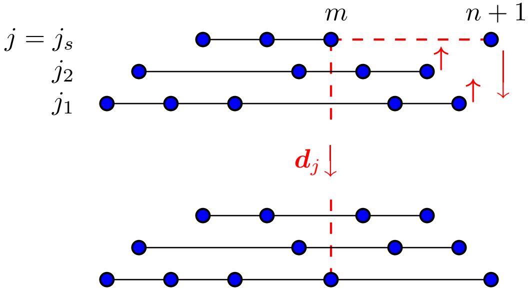
В частности, если $\rho = \{\varnothing\}$, то $(\sigma)_1$ окаймляется дуплетом $\{1, s+2\}$, а если $\sigma = \{\varnothing\}$, то к ρ добавляется дуплет $\{r+1, r+2\}$.

Заметим, что $\deg M(\rho,\sigma) = \deg\rho \deg\sigma$.

Операция d_j. Добавление к $\pi \in \Pi_n^*$ элемента $n+1$.

Если $j = 1$, то элемент добавляется в виде синглета.

Если $1 < j \le k = \deg \pi$, то обозначим через $\mu_2, \ldots, \mu_k$ все мультиплеты в π, в порядке возрастания минимальных элементов. Рассмотрим те из них, носители которых содержат μ_j, и пусть им отвечают номера $j_1 < \cdots < j_s = j$. Операция d_j меняет все эти блоки, как показано на рисунке, а остальные блоки не затрагиваются.



Более формально: разобьём μ_{j_r} на левую и правую части относительно $m = \max \mu_j$

$$\mu_{j_r}^{-} = \{i \in \mu_{j_r} : i < m\}, \quad \mu_{j_r}^{+} = \{i \in \mu_{j_r} : i \geq m\}$$

и перейдём к новым блокам

$$\tilde{\mu}_{j_1} = \mu_{j_1}^{-} \cup \{m, n+1\}, \quad \tilde{\mu}_{j_r} = \mu_{j_r}^{-} \cup \mu_{j_{r-1}}^{+}, \quad r = 2, \ldots, s.$$

Теорема 5. Операции M, d_j порождают любое неперекрывающееся разбиение, причём единственным образом.

Доказательство. Последняя из операций, приведших к данному разбиению, однозначно определяется при рассмотрении блока β, содержащего максимальный элемент разбиения. Если это синглет, то последняя операция была d_1; если дуплет, то M; если мультиплет, то d_j, где j максимальный номер мультиплета, носитель которого содержит предпоследний элемент β. Применяя обратную операцию, приходим к неперекрывающимся разбиениям из меньшего числа элементов. ∎

Установленная биекция позволяет сопоставить каждому NOP некоторый моном, правда, не очень эффективным способом: сначала нужно построить выражение $\varphi \in \Phi_n$ отвечающее $\pi \in \Pi^*_{n-1}$, затем вычислить $\mathrm{expand}(\varphi)$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_n & \leftrightarrow & \Pi^*_{n-1} \\ \mathrm{expand}\downarrow & \swarrow & \\ f_n & & \end{array}$$

Легко проследить только за степенью монома, на единицу большей числа мультиплетов в разбиении. Это даёт следующую интерпретацию числового треугольника (10), при нумерации строк и столбцов с 0: в n-й строке и k-м столбце написано число NOP из n элементов, содержащих k мультиплетов.

Заключение

- Что, если каждой полиномиальной (?) интегрируемой иерархии отвечает какой-то тип комбинаторных объектов, возможно неизвестный? Какая комбинаторика связана с мКдФ, уравнениями 5-го порядка, нелинейным уравнением Шрёдингера и т.д.?
- Сомнительно, что, наоборот, любому из известных типов комбинаторных объектов отвечает интегрируемая иерархия. Мы не знаем, откуда берутся определения в комбинаторике.
- Поэтому: что такое интегрируемость непосредственно в комбинаторных терминах (а не для производящих функций)?
- У нас пока слишком мало примеров, чтобы делать далеко идущие выводы.

Мой метод состоял в следующем. Сначала я вел счет глазами и записывал результат. Затем, взяв окатыши обеими руками, я вновь вываливал их двумя кучками на стол. Я пересчитывал их уже отдельно, снова записывал и повторял операцию.

Борхес, Синие тигры (пер. В.Кулагина-Ярцева)