В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 13 · 29 апреля 2024

Дополнительные симметрии КдФ

План

- Негативные симметрии
- 3D-совместность негативных симметрий
- Мастер-симметрия
- Высшие неавтономные симметрии
- Высшие аналоги уравнений Пенлеве

Ревизия алгебры симметрий

Для уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x,$$

мы знаем бесконечную последовательность симметрий ($u_n = \partial_x^n(u)$)

$$\begin{aligned}
&u_{t_1} = u_x && \text{сдвиг по } x\\
&u_{t_3} = (u_{xx} - 3u^2)_x && \text{само КдФ}\\
&u_{t_5} = (u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3)_x && \text{высшая симм. 5-го порядка}\\
&u_{t_7} = (u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 &&\\
&\qquad\qquad + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4)_x && \text{высшая симм. 7-го порядка}\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&
\end{aligned}$$

Её можно построить при помощи оператора рекурсии:

$$u_{t_{2n+1}} = R^n(u_x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad R = D^2 - 4u - 2u_xD^{-1}.$$

Эти потоки попарно коммутируют:

$$[D_{t_i}, D_{t_j}] = 0.$$

Нумерация потоков согласована с однородностью относительно весов

$$w(u)=2,\quad w(x)=-1,\quad w(t)=-3\quad\Rightarrow$$

$$w(\partial_x)=1,\quad w(\partial_t)=3,\quad w(u_n)=n+2,\quad w(\partial_{t_{2n+1}})=2n+1.$$

Также, есть классические симметрии Галилея и растяжения:

$$u_{\tau_{-2}}=3tu_x-\frac{1}{2},\qquad u_{\tau_0}=R(u_{\tau_{-2}})=3t(u_{xx}-3u^2)_x+xu_x+2u,$$

для которых

$$[D_{\tau_{-2}},D_{t_{2n+1}}]=(2n+1)D_{t_{2n-1}},\quad (u_{t_{-1}}:=0),$$

$$[D_{\tau_0},D_{t_{2n+1}}]=(2n+1)D_{t_{2n+1}},\qquad [D_{\tau_0},D_{\tau_{-2}}]=-2D_{\tau_{-2}}.$$

При этом с $D=D_x=\partial_x+D_{t_1}$ и $D_t=\partial_t+D_{t_3}$ эти дифференцирования коммутируют:

$$[D,D_{\tau_{-2}}]=[D,D_{\tau_0}]=[D_t,D_{\tau_{-2}}]=[D_t,D_{\tau_0}]=0.$$

Замечание. Здесь нужна аккуратность с обозначениями: хотя $u_{t_1}=u_x$ и $u_{t_3}=u_t$, это не значит, что $x=t_1$ и $t=t_3$.

Всё ли это? Других эволюционных симметрий действительно нет. Но, алгебру симметрий можно расширить, расширив также пространство, на котором они действуют. Для этого, помимо динамических переменных $u_0, u_1, u_2, \dots,$ вводятся ещё некоторые переменные (нелокальности).

- Можно продолжить последовательность $D_{\tau_{2n}}$:

$$u_{\tau_{2n}} = R^{n+1}(u_{\tau_{-2}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это даёт неавтономные, нелокальные и некоммутирующие друг с другом симметрии. В частности, D_{τ_2} — *мастер-симметрия*.

- Также, можно применять отрицательные степени $R - \mu$, что дает так называемые *негативные симметрии*

$$u_\xi = (R - \mu)^{-n}(0), \quad u_\eta = (R - \mu)^{-n}(u_{\tau_0}).$$

Мы рассмотрим только простейший вариант:

$$u_z = (R - \mu)^{-1}(0).$$

Благодаря наличию параметра μ, уже этот пример довольно интересен.

- Имея в запасе расширенные потоки, можно строить *струнные уравнения* — неавтономные ОДУ Пенлеве-типа, совместные с КдФ.

Негативная симметрия КдФ

Пусть
$$u_z=(R-\mu)^{-1}(0),\quad R=D^2-4u-2u_xD^{-1}.$$
Удобно переобозначить параметр $\mu=-4\alpha$, что даёт
$$(D^2-4(u-\alpha)-2u_xD^{-1})(u_z)=0.$$
Чтобы проинтегрировать $D^{-1}(u_z)$, введем новую нелокальную переменную q:
$$u_z=q_x,\quad q_{xxx}-4(u-\alpha)q_x-2u_xq=0.$$
Есть интегрирующий множитель $2q$. Также, можно определить правило дифференцирования q по t, чтобы была совместность с КдФ: так как $u_t=h_x$, $h=u_{xx}-3u^2$, то
$$q_t=h_z=u_{zxx}-6uu_z=q_{xxx}-6uq_x.$$

В результате, приходим к следующей нелокальной симметрии.

Уравнения (γ — постоянная интегрирования)

$$\begin{cases} 2qq_{xx} - q_x^2 - 4(u-\alpha)q^2 + 4\gamma = 0, \\ q_t = q_{xxx} - 6uq_x \end{cases} \tag{1}$$

определяют корректное расширение уравнения КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ на переменную q. При этом поток

$$u_z = q_x \tag{2}$$

служит симметрией КдФ, то есть, $[D_z, D_t] = 0$.

Для доказательства необходимо только проверить, что производная первого уравнения (1) по t в силу второго есть тождество, то есть, является алгебраическим следствием этого уравнения и его производных по x. Это легко сделать прямым вычислением.

Удобная форма записи негативной симметрии получается при введении потенциала:

$$2v_x = u, \quad 2v_z = q.$$

Тогда получаем два уравнения на одну переменную v вместо четырёх уравнений на u и q.

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2, \tag{3}$$

$$2v_z v_{xxz} - v_{xz}^2 - 4(2v_x - \alpha)v_z^2 + \gamma = 0. \tag{4}$$

Совместность уравнений (3) и (4) вытекает из тождества

$$D_t(F) = \left(D^2 - 3\frac{v_{xz}}{v_z}D + 3\frac{v_{xz}^2}{v_z^2} - 12v_x\right)D(F).$$

где F — левая часть (4).

Отметим, что, в принципе, уравнение типа (4) можно выписать работать и для u, исключив q из (1), (2), но оно довольно громоздкое:

$$4u_z = D_x\left(\frac{u_{xz} + \sqrt{u_{xz}^2 - 4(u-\alpha)(u_z^2 - 4\gamma)}}{u-\alpha}\right).$$

Производящая функция для высших симметрий

Негативная симметрия есть ни что иное, как производящая функция для высших, при разложении по параметру:

$$u_z = (R-\mu)^{-1}(0) = -\mu^{-1}(u_{t_{-1}} + \mu^{-1}u_{t_1} + \dots + \mu^{-n}R^n(0) + \dots).$$

Отсюда получаем следующее свойство.

Симметрии КдФ имеют вид $u_{t_{2n+1}} = h^{n+1}_x$, где h^n — коэффициенты формального ряда

$$q = h^0 + h^1/\mu + h^2/\mu^2 + \dots, \quad h^0 = -1/2,$$

удовлетворяющего определяющему уравнению для негативной симметрии

$$2qq_{xx} - q_x^2 - (4u+\mu)q^2 + \mu/4 = 0. \tag{5}$$

Фактически, эти формулы нам уже хорошо знакомы — мы имели с ними дело на лекции 5, при выводе оператора рекурсии из представления нулевой кривизны, полиномиального по спектральному параметру ($\mu = -4\lambda$), и при доказательстве локальности высших симметрий.

Уравнение (5) равносильно рекуррентным соотношениям

$$h^{i+1} = \sum_{s=0}^{i} \left(h^s_x h^{i-s}_x - 2h^s h^{i-s}_{xx} + 4uh^s h^{i-s}\right) + \sum_{s=1}^{i} h^s h^{i+1-s}.$$

Как видим, одна нелокальная симметрия порождает бесконечно много локальных.

Отметим два следствия из этой интерпретации.

- Представление нулевой кривизны для самой негативной симметрии.

Напомним, что иерархия КдФ служит условием совместности для матричных уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_{t_{2n+1}} = V_{2n+1}\Psi \quad \Rightarrow \quad U_{t_{2n+1}} = V_{2n+1,x} + [V_{2n+1}, U],$$

где $U = V_1$ и все матрицы имеют общую структуру

$$M(h) = \begin{pmatrix} -h_x & 2h \\ 2(u-\lambda)h - h_{xx} & h_x \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$U = V_1 = M(1/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = M(-u-2\lambda).$$

Суммирование приводит к следующему ответу:

Негативная симметрия (2) допускает представление нулевой кривизны $U_z = V_x + [V, U]$, где

$$V = M\Big(\frac{q}{4(\alpha-\lambda)}\Big).$$

- Коммутативность высших симметрий равносильна коммутативности пары негативных симметрий, отвечающих параметрам μ_1 и μ_2:

$$[D_{z_1}, D_{z_2}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, m, n\ [D_{t_{2n+1}}, D_{t_{2m+1}}] = 0.$$

Правда, не очень понятно, как вычислять $[D_{z_1}, D_{z_2}]$, поскольку это не эволюционные дифференцирования. Возникает вопрос, как проверить коммутативность независимо, не используя свойства оператора рекурсии и высших симметрий.

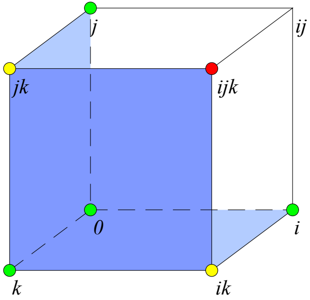
Забудем вообще про высшие симметрии: пусть есть уравнения вида

$$u_{xxz_i} = F_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}), \quad i \in I, \tag{6}$$

требуется определить, что означает совместность для таких уравнений.

С этим можно разобраться, если привлечь понятие 3D-совместности, которое нам встречалось при изучении преобразований Бэклунда.

3D-совместность квад-уравнений



Для дискретных уравнений

$$v_{ij} = f(v, v_i, v_j; \alpha^i, \alpha^j),$$

где v_i означает сдвиг по координате n_i: $v_i = v(\dots, n_i + 1, \dots)$, совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки. Три способа вычислить v_{ijk} по начальным данным v, v_i, v_j, v_k должны давать совпадающие результаты:

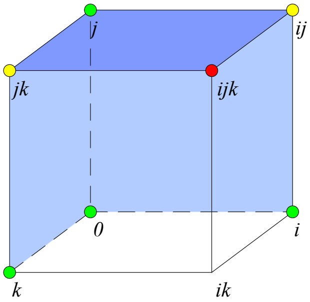
$$v_{ijk} = f(v_k, v_{ik}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^j) = f(v_j, v_{ij}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^k) = f(v_i, v_{ij}, v_{ik}; \alpha^j, \alpha^k).$$

Пример. Принцип суперпозиции ПБ для pot-КдФ:

$$v_{ij} = v + \frac{\alpha^i - \alpha^j}{v_i - v_j} \;\Rightarrow\; v_{ijk} = -\frac{(\alpha^j - \alpha^i)v_i v_j + (\alpha^k - \alpha^j)v_j v_k + (\alpha^i - \alpha^k)v_k v_i}{(\alpha^j - \alpha^i)v_k + (\alpha^k - \alpha^j)v_i + (\alpha^i - \alpha^k)v_j}.$$

Это выражение не меняется при перестановках i, j, k.

3D-совместность квад-уравнений



Для дискретных уравнений

$$v_{ij} = f(v, v_i, v_j; \alpha^i, \alpha^j),$$

где v_i означает сдвиг по координате n_i: $v_i = v(\dots, n_i + 1, \dots)$, совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки. Три способа вычислить v_{ijk} по начальным данным v, v_i, v_j, v_k должны давать совпадающие результаты:

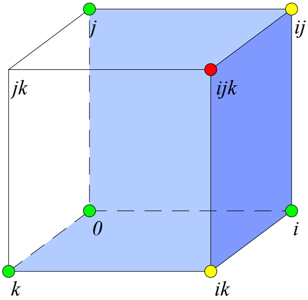
$$v_{ijk} = f(v_k, v_{ik}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^j) = f(v_j, v_{ij}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^k) = f(v_i, v_{ij}, v_{ik}; \alpha^j, \alpha^k).$$

Пример. Принцип суперпозиции ПБ для pot-КдФ:

$$v_{ij} = v + \frac{\alpha^i - \alpha^j}{v_i - v_j} \;\Rightarrow\; v_{ijk} = -\frac{(\alpha^j - \alpha^i)v_i v_j + (\alpha^k - \alpha^j)v_j v_k + (\alpha^i - \alpha^k)v_k v_i}{(\alpha^j - \alpha^i)v_k + (\alpha^k - \alpha^j)v_i + (\alpha^i - \alpha^k)v_j}.$$

Это выражение не меняется при перестановках i, j, k.

3D-совместность квад-уравнений



Для дискретных уравнений

$$v_{ij} = f(v, v_i, v_j; \alpha^i, \alpha^j),$$

где v_i означает сдвиг по координате n_i: $v_i = v(\dots, n_i + 1, \dots)$, совместность формулируется не для пары уравнений, а для тройки. Три способа вычислить v_{ijk} по начальным данным v, v_i, v_j, v_k должны давать совпадающие результаты:

$$v_{ijk} = f(v_k, v_{ik}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^j) = f(v_j, v_{ij}, v_{jk}; \alpha^i, \alpha^k) = f(v_i, v_{ij}, v_{ik}; \alpha^j, \alpha^k).$$

Пример. Принцип суперпозиции ПБ для pot-КдФ:

$$v_{ij} = v + \frac{\alpha^i - \alpha^j}{v_i - v_j} \;\Rightarrow\; v_{ijk} = -\frac{(\alpha^j - \alpha^i)v_i v_j + (\alpha^k - \alpha^j)v_j v_k + (\alpha^i - \alpha^k)v_k v_i}{(\alpha^j - \alpha^i)v_k + (\alpha^k - \alpha^j)v_i + (\alpha^i - \alpha^k)v_j}.$$

Это выражение не меняется при перестановках i, j, k.

3D-совместность гиперболических уравнений

Следующая тройка 3D-совместна:

$$u_{xy} = \sinh u\sqrt{1+u_x^2},$$
$$u_{yz} = \cosh u\sqrt{1+u_z^2},$$
$$u_{xz} = \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2}.$$

Перекрёстные производные для каждой пары уравнений совпадают, при условии, что выполняется третье. Например, для первых двух:

$$(u_{xy})_z - (u_{xz})_y = (u_{xz} - \sqrt{1+u_x^2}\sqrt{1+u_z^2})\left(\frac{u_z\cosh u}{\sqrt{1+u_z^2}} - \frac{u_x\sinh u}{\sqrt{1+u_x^2}}\right),$$

что обращается в 0 в силу третьего уравнения. Аналогично и для других пар: каждое уравнение тройки восстанавливается по двум другим, если в равенстве для перекрёстных производных отбрасывать множители с младшими производными.

Известно много гиперболических уравнений, служащих симметриями для эволюционных (напр. синус-Гордон — симметрия для pot-мКдФ).

Но, в них нет параметров α. Такие уравнения можно считать вырожденным случаем негативной симметрии. По-видимому, совместные тройки гиперболических уравнений — это исключения.

Для негативных симметрий с параметром все в порядке, поэтому можно определить совместность между разными копиями, но определение немного усложняется.

3D-совместность негативных симметрий

Определение. Уравнения

$$u_{xxz_i} = F_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}), \quad i \in I, \tag{7}$$

3D-совместны, если их можно дополнить уравнениями

$$u_{z_iz_j} = G_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}), \quad i \ne j, \tag{8}$$

такими, что $G_{ij} = G_{ji}$ и, для попарно различных $i, j, k \in I$,

$$D_{z_i}(F_j) = D_{z_j}(F_i) = D_x^2(G_{ij}), \tag{9}$$

$$D_{z_i}(G_{jk}) = D_{z_j}(G_{ik}) = D_{z_k}(G_{ij}), \tag{10}$$

тождественно в силу (7), (8) и дифференциальных следствий $u_{xxxz_i} = D_x(F_i)$, $u_{xz_iz_j} = D_x(G_{ij})$.

Отсюда следует совпадение *любых* перекрёстных производных, что гарантирует существование локальных решений общего вида, удовлетворяющих одновременно всему набору уравнений.

Конструктивно ли это определение? Уравнения (8) заранее не известны, но их можно восстановить прямым вычислением — если они существуют.

Первый шаг:

$$0 = D_{z_i}(F_j) - D_{z_j}(F_i) = P_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}, u_{xz_iz_j}),$$

где в правой части производные типа u_{xxxz} и u_{xxz} исключены из (7). Разрешая это уравнение относительно $u_{xz_iz_j}$, получаем

$$u_{xz_iz_j} = H_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}). \tag{11}$$

Это должно быть следствием (8), чтобы совместность имела место.

Второй шаг:

$$0 = D_x(H_{ij}) - D_{z_j}(F_i) = Q_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, u_{z_i}, u_{xz_i}, u_{z_j}, u_{xz_j}, u_{z_iz_j}),$$

где исключаются u_{xxxz}, u_{xxz} и $u_{xz_iz_j}$. Разрешая относительно $u_{z_iz_j}$, получаем искомое уравнение (8).

После этого остаётся только проверить равенства $D_x(G_{ij}) = H_{ij}$ и $D_{z_i}(G_{jk}) = D_{z_j}(G_{ik})$.

Pot-KdV

Вернемся к нашему примеру.

Следующие уравнения 3D-совместны:

$$v_{xxz_i} = \frac{v_{xz_i}^2 - \gamma_i}{2v_{z_i}} + 2(2v_x - \alpha_i)v_{z_i}, \tag{12}$$

$$v_{z_iz_j} = \frac{v_{z_i}v_{xz_j} - v_{z_j}v_{xz_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j. \tag{13}$$

Продемонстрируем вывод дополнительных уравнений (13). На первом шаге, равенство $(v_{xxz_i})_{z_j} = (v_{xxz_j})_{z_i}$ даёт

$$\begin{aligned} v_{xz_iz_j} &= \left(2(\alpha_i - \alpha_j)v_{z_i}v_{z_j} + \frac{\gamma_j v_{z_i}}{2v_{z_j}} - \frac{\gamma_i v_{z_j}}{2v_{z_i}}\right)\frac{v_{z_iz_j}}{v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{xz_i}}{v_{z_i}} + \frac{v_{xz_j}}{v_{z_j}}\right)v_{z_iz_j} + 4v_{z_i}v_{z_j}. \end{aligned} \tag{14}$$

На втором шаге, условие $(v_{xz_iz_j})_x = (v_{xxz_i})_{z_j}$ приводит к факторизованному уравнению

$$((\alpha_i - \alpha_j)v_{z_iz_j} + v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})\times \\ \times \frac{(v_{z_i}^2 v_{xz_j}^2 - v_{z_j}^2 v_{xz_i}^2 - 4(\alpha_i - \alpha_j)v_{z_i}^2 v_{z_j}^2 + \gamma_i v_{z_j}^2 - \gamma_j v_{z_i}^2)}{(v_{z_j}v_{xz_i} - v_{z_i}v_{xz_j})^2} = 0.$$

Приравнивая первый множитель нулю, получаем (13).

Далее, проверяем, что равенство $(v_{z_iz_j})_x = v_{xz_iz_j}$ выполняется тождественно. Дифференцирование (13) по x даёт

$$v_{xz_iz_j} = 2v_{z_i}v_{z_j} + \frac{1}{2(\alpha_i - \alpha_j)}\left(\frac{v_{z_i}}{v_{z_j}}(v_{xz_j}^2 - \gamma_j) - \frac{v_{z_j}}{v_{z_i}}(v_{xz_i}^2 - \gamma_i)\right). \tag{15}$$

Это совпадает с (14) при замене $v_{z_iz_j}$ в силу (13), то есть (14) является следствием (13) и (12).

Наконец, на заключительном этапе проверяем выполнение тождеств (10), то есть $(v_{z_iz_j})_{z_k} = (v_{z_iz_k})_{z_j}$, что завершает доказательство 3D-совместности.

Замечание. Уравнение (13)

$$v_{z_i z_j} = \frac{v_{z_i} v_{xz_j} - v_{z_j} v_{xz_i}}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

— это самостоятельное трехмерное интегрируемое уравнение (Алонсо, Шабат 2002). Можно проверить, что для него выполняется тождество

$$(v_{z_i z_j})_{z_k} = (v_{z_i z_k})_{z_j}.$$

Уравнения (12) при этом не используются, они лишь определяют 2D редукцию этого 3D-уравнения, сохраняющую свойство совместности.

Однако, в общем случае, в определении 3D-совместности не требуется, чтобы тождества (10) выполнялись без учёта (7).

Еще один пример: Schwarzian-KdV

Оператор рекурсии:

$$R = D_x^2 - \frac{2u_{xx}}{u_x}D_x + \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} - u_x D_x^{-1} \cdot \left(\frac{u_{xxxx}}{u_x^2} - \frac{4u_{xx}u_{xxx}}{u_x^3} + \frac{3u_{xx}^3}{u_x^4}\right)$$

Симметрии:

$$u_{t_0} = u_x, \quad u_t = R(u_x) = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x}, \ \dots$$

Негативные симметрии $R(u_{z_i}) = 4\alpha_i u_{z_i}$:

$$u_{xxz_i} = \frac{u_{xz_i}^2 - \gamma_i u_x^2}{2u_{z_i}} + \frac{u_{xx}u_{xz_i}}{u_x} + 2\alpha_i u_{z_i} \tag{16}$$

3D-совместность: дополнительные уравнения

$$u_{z_i z_j} = \frac{\alpha_i u_{z_i} u_{xz_j} - \alpha_j u_{z_j} u_{xz_i}}{(\alpha_i - \alpha_j)u_x}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Уравнение КдФ не имеет гиперболических симметрий, то есть, простейшая НС для него имеет вид $u_{xxz} = \dots$

В отличие от него, Schwarzian-KdV совместно с несколькими гиперболическими уравнениями:

$$u_{xz} = 2u_x\sqrt{u_z},$$
$$u_{xz} = 2uu_x,$$
$$u_{xz} = \frac{2uu_xu_z}{u^2+1}.$$

Из них первое определяет специальные решения (16) при $\alpha = \gamma = 0$, а два других имеют какое-то другое происхождение.

Мастер-симметрия КдФ

Перейдем к неавтономным симметриям. Применяя оператор рекурсии $R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$ к скейлингу

$$u_{\tau_0} = 3tu_t + xu_x + 2u,$$

получаем, как нетрудно вычислить, поток

$$u_{\tau_2} = 3tu_{t_5} + x(u_3 - 6uu_1) + 4u_2 - 8u^2 - 2u_1 D^{-1}(u).$$

Здесь $D^{-1}(u)$ — новая переменная, такая, что $D(D^{-1}(u)) = u$. Отсюда определяются правила её дифференцирования по t_{2n+1}:

$$u_{t_{2n+1}} = D(h_{2n}) \quad \Rightarrow \quad D_{t_{2n+1}}(D^{-1}(u)) = h_{2n},$$

где h_{2n} — однородный многочлен веса $2n$. В результате, определены коммутаторы $[D_{\tau_2}, D_{t_{2n+1}}]$.

Их можно найти без вычислений, используя свойство, что оператор рекурсии переводит симметрии в симметрии. Тогда $[D_{\tau_2}, D_t] = 0$, что эквивалентно

$$[D_{\tau_2}, D_{t_3}] = 3D_{t_5}.$$

Точно так же находятся другие коммутаторы:

$$[D_{\tau_2}, D_{t_3}] = 3D_{t_5}, \quad [D_{\tau_2}, D_{t_5}] = 5D_{t_7}, \quad [D_{\tau_2}, D_{t_7}] = 7D_{t_9}, \ \dots$$

Таким образом, коммутирование с D_{τ_2} последовательно порождает всю иерархию высших симметрий. При этом член $3tu_{t_5}$ можно выкинуть (так как здесь t — постоянный параметр), то есть, таким же соотношениям удовлетворяет и дифференцирование

$$u_\tau = x(u_3 - 6uu_1) + 4u_2 - 8u^2 - 2u_1 D^{-1}(u).$$

Иначе говоря, ad_{D_τ} можно использовать вместо оператора рекурсии. Такие дифференцирования называют ***мастер-симметриями***.

В качестве упражнения, вычислим непосредственно (то есть, без использования свойства, что R переводит симметрии в симметрии), чему равны $[D_\tau, D_{t_1}]$ и $[D_\tau, D_{t_3}]$.

Вычисляем $[D_\tau, D_{t_1}]$:

$$\begin{aligned}[D_\tau, D_{t_1}](u) &= D_\tau(u_1) - D_{t_1}(u_\tau)\\ &= D\left(x(u_3-6uu_1)+4u_2-8u^2-2u_1D^{-1}(u)\right)\\ &\quad - x(u_3-6uu_1)_{t_1} - (4u_2-8u^2-2u_1D^{-1}(u))_{t_1}\\ &= u_3-6uu_1 = u_{t_3}.\end{aligned}$$

Чтобы вычислить $[D_\tau, D_{t_3}]$, удобно представить u_τ в виде

$$\begin{aligned}u_\tau &= x(u_3-6uu_1)+4u_2-8u^2-2u_1D^{-1}(u)\\ &= D\left(x(u_2-3u^2)+3u_1-2uD^{-1}(u)-3D^{-1}(u^2)\right) = D(g).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[D_\tau, D_{t_3}](u) &= D_\tau(D(u_2-3u^2)) - D_{t_3}(D(g))\\ &= D(D_\tau(u_2-3u^2) - D_{t_3}(g)) = D(h).\end{aligned}$$

Вычисляем h:

$$
\begin{aligned}
h &= (D^2-6u)(u_\tau) - g_*(u_3-6uu_1)\\
&= (D^2-6u)\big(x(u_3-6uu_1)+4u_2-8u^2-2u_1D^{-1}(u)\big)\\
&\qquad -\big(x(D^2-6u)+3D-2D^{-1}(u)-2uD^{-1}-6D^{-1}u\big)(u_3-6uu_1)\\
&\qquad\qquad // \quad [D^2-6u,x]=2D\\
&= 2D(u_3-6uu_1)+(D^2-6u)\big(4u_2-8u^2-2u_1D^{-1}(u)\big)\\
&\qquad -\big(3D-2D^{-1}(u)-2uD^{-1}-6D^{-1}u\big)(u_3-6uu_1)\\
&= -u_4+6uu_2+6u_1^2+4u_4-16uu_2-16u_1^2-2u_3D^{-1}(u)-4u_2u-2u_1^2\\
&\qquad -6u(4u_2-8u^2)+12uu_1D^{-1}(u)+2D^{-1}(u)(u_3-6uu_1)\\
&\qquad +2uD^{-1}(u_3-6uu_1)+6D^{-1}(uu_3-6u^2u_1)\\
&= 3u_4-38uu_2-12u_1^2+48u^3+2u(u_2-3u^2)+6(uu_2-\tfrac12u_1^2-2u^3)\\
&= 3(u_4-10uu_2-5u_1^2+10u^3).
\end{aligned}
$$

Итак, действительно

$$[D_\tau, D_{t_1}](u) = u_{t_3}, \quad [D_\tau, D_{t_3}](u) = 3D(u_4-10uu_2-5u_1^2+10u^3) = 3u_{t_5}.$$

Высшие неавтономные симметрии

Дальнейшее применение R даёт дифференцирования

$$u_{\tau_4} = 3tu_{t_7} + xu_{t_5} + \dots, \quad u_{\tau_6} = 3tu_{t_9} + xu_{t_7} + \dots, \quad \dots$$

где многоточие обозначает младшие члены, содержащие, в том числе, нелокальности вида $D^{-1}(\rho_j)$, где ρ_j — плотности законов сохранения для КдФ (чем дальше, тем больше таких нелокальностей приходится вводить). Для них определены правила дифференцирования по t_j.

По прежнему, все эти потоки коммутируют с D_t:

$$[D_{\tau_{2n}}, D_t] = 0,$$

а для базисных дифференцирований получается такая алгебра ($m, n \ge -1$, $D_{t_{-1}} := 0$)

$$[D_{t_{2n+1}}, D_{t_{2m+1}}] = 0, \quad [D_{\tau_{2n}}, D_{t_{2m+1}}] = (2m+1)D_{t_{2m+2n+1}},$$

$$[D_{\tau_{2n}}, D_{\tau_{2m}}] = 2(m-n)D_{\tau_{2m+2n}}.$$

Стационарные уравнения

Итак, у нас есть следующие симметрии:

$$(u_{t_{-1}}=0)\ \xrightarrow{R}\ (u_{t_1}=u_x)\ \xrightarrow{R}\ u_{t_3}\ \xrightarrow{R}\ u_{t_5}\ \xrightarrow{R}\dots,$$

$$(u_{\tau_{-2}}=3tu_x-\tfrac{1}{2})\ \xrightarrow{R}\ u_{\tau_0}\ \xrightarrow{R}\ u_{\tau_2}\ \xrightarrow{R}\dots$$

Стационарное уравнение для любой симметрии определяет некоторую конечномерную редукцию (ОДУ):

$$A(R)(0)+B(R)(3tu_x-\tfrac{1}{2})=0, \tag{17}$$

где A и B — многочлены (с постоянными коэффициентами) от оператора рекурсии.

Если $B=0$, то это уравнения Новикова, интегрируемые по Лиувиллю (конечнозонные решения).

Если $B \neq 0$, то это "струнные" уравнения типа Пенлеве. Их исследование до сих пор является открытой задачей.

Классические редукции (предыдущая лекция):

$$u_{t_3} + u_{\tau_{-2}} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{\xi\xi} = 6u^2 + \xi \qquad \mathrm{P}_1$$

$$u_{\tau_0} = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{\xi\xi} = 2f^3 + \xi f + \alpha \qquad \mathrm{P}_2$$

В литературе также изучаются их высшие аналоги:

$$\mathrm{P}_1^n: \quad u_{t_{2n+1}} + u_{\tau_{-2}} = 0, \qquad \mathrm{P}_2^n: \quad u_{t_{2n+1}} + u_{\tau_0} = 0,$$

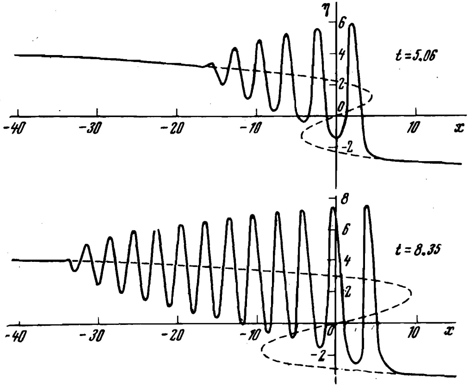
то есть, уравнение (17) с $B(R) = 1$ или $B(R) = R$.

У этих уравнений есть специальные решения с нестандартной асимптотикой, важные с точки зрения физических приложений, хотя выделить их из решений общего вида крайне непросто.

В частности, уравнение P_1^2

$$u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3 + 6tu + x = 0$$

содержит единственное решение с асимптотикой $10u^3 + 6tu + x = 0$, $x \to \pm\infty$, которое дает точное решение в задаче Гуревича–Питаевского об опрокидывании фронта ударной волны.



- A.V. Gurevich, L.P. Pitaevskii. *JETP Lett.* **17:5** (1973) 193–195; *Sov. Phys.-JETP* **38:2** (1974) 291–297.

Случай, когда B имеет степень выше 1, изучен плохо, так соответствующие $u_{\tau_{2n}}$ нелокальны. Однако, можно перейти от (17) к уравнению

$$(B^{-1}A)(R)(u_x) + u_{\tau_{-2}} = 0.$$

В случае общего положения (B без кратных корней), разложение на простые дроби даёт стационар для суммы высших симметрий, негативных и классической

$$\widetilde{A}(R)(0) + \sum_{i=1}^{n} c_i (R - \mu_i)^{-1}(0) + u_{\tau_{-2}} = 0.$$

Все нелокальности перемещаются в негативные симметрии и записываются единообразно при любом n.

n-компонентный аналог P_{34}

В частности, пусть $\deg A \le \deg B = n$, $B = (R + 4\alpha_1) \cdots (R + 4\alpha_n)$, $\alpha_i \ne \alpha_j$, тогда уравнение (17) эквивалентно следующей системе (при $n = 1$ возвращаемся к автомодельной редукции).

$$q_{j,xx} = \frac{q_{j,x}^2 - \beta_j^2}{2q_j} + 2(u - \alpha_j)q_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u := \frac{x}{6t} + \frac{1}{3t}(q_1 + \cdots + q_n);$$

$$q_{j,t} = 2u_x q_j - 2(u + 2\alpha_j)q_{j,x}.$$

Векторные поля D_x и D_t на переменных $q_1, \dots, q_n, q_{1,x}, \dots, q_{n,x}$, определяемые этими уравнениями, коммутируют, и переменная u удовлетворяет КдФ в силу этих систем.

При $n = 2$ в этой системе можно численно выделить решения для другой задачи Гуревича–Питаевского, о распаде ступеньки, то есть, решения КдФ, выходящие на разные константы при $x \to \pm\infty$.