В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 11 · 15 апреля 2024

Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Обратная задача

План

На прошлой лекции (прямая задача рассеяния):

- сведение уравнения Шрёдингера к интегральным уравнениям Вольтерры
- функции Йоста
- данные рассеяния: дискретный спектр + дополнительные множители, матрица перехода

На этой лекции (обратная задача рассеяния):

- определение зависимости данных рассеяния от t
- определение $a(k)$ и $b(k)$ по коэффициенту отражения $r(k)$
- восстановление потенциала (метод сингулярных интегральных уравнений)

Свойства данных рассеяния (повторение)

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi, \qquad \lambda = k^2, \qquad \int_{\mathbb{R}} |u(x)|(1 + |x|)dx < \infty$$

Функции Йоста:

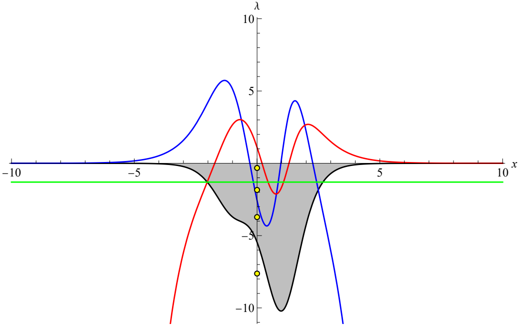
$x \to -\infty$	$x \to +\infty$	
$\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\psi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \geq 0$
$\varphi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\psi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \leq 0$

Свойства симметрии:

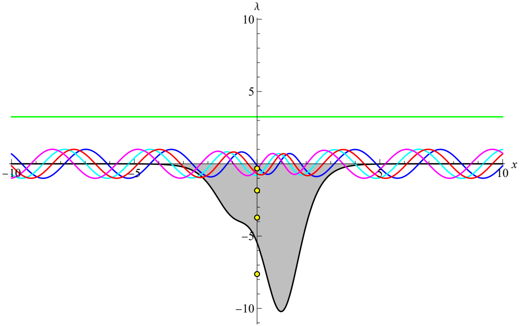
$$\begin{aligned} &\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,-k), &&\psi_1(x,k) = \psi_2(x,-k),\\ &\varphi_1(x,k)^* = \varphi_2(x,k^*), &&\psi_1(x,k)^* = \psi_2(x,k^*),\\ &\varphi_i(x,k)^* = \varphi_i(x,-k^*), &&\psi_i(x,k)^* = \psi_i(x,-k^*). \end{aligned}$$

На мнимой полуоси

$$\varphi_1(x,i\kappa), \quad \psi_2(x,i\kappa) \in \mathbb{R}, \qquad \kappa > 0.$$



● φ_1 и ● ψ_2 при $k = i\kappa$, $\kappa > 0$



функции Йоста при $k \in \mathbb{R}$

Данные дискретного спектра: сам дискретный спектр $\lambda_j = -\kappa_j^2$, где

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \cdots > \kappa_n > 0$$

и числа $c_1, \dots, c_n$ такие, что $\varphi_1(x, i\kappa_j) = c_j \psi_2(x, i\kappa_j)$.

Данные непрерывного спектра: функции $a(k)$ и $b(k)$ такие, что

$$\varphi_1 = a(k)\psi_1 + b(k)\psi_2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Свойства:

1) $a(k)^* = a(-k), \quad b(k)^* = b(-k), \quad k \in \mathbb{R};$

2) $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R};$

3) выражения для $a(k)$, $b(k)$ через вронскианы от функций Йоста:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_1, \psi_2)}{2ik}, \quad b(k) = -\frac{W(\varphi_1, \psi_1)}{2ik}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0;$$

4) $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, причем

$$a(k)^* = a(-k^*), \quad \operatorname{Im} k \ge 0;$$

5) интегральные выражения для $a(k)$, $b(k)$:

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} u(x)\varphi_1(x,k)\,dx,$$
$$b(k) = \frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x)\varphi_1(x,k)\,dx;$$

6) асимптотика по k:

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \ge 0,$$
$$b(k) = O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad k \in \mathbb{R};$$

7) нули $a(k)$ в верхней полуплоскости совпадают с $i\kappa_j$, $j = 1, \dots, n$;

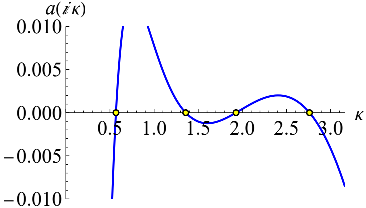
8) $c_j \in \mathbb{R}$, причём

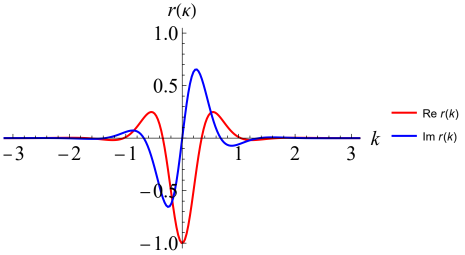
$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad \dots, \quad \operatorname{sign} c_n = (-1)^{n+1}.$$

Итак, функция a на мнимой полуоси вещественна, ее нули определяют спектр;

коэффициент отражения $r(k)=b(k)/a(k)$, $k\in\mathbb{R}$, удовлетворяет свойствам

$$r(-k)=r(k)^*,\quad |r|\le 1,\quad r=O(k^{-1}),\quad |k|\to\infty$$





Зависимость данных рассеяния от t

До сих пор предполагалось, что потенциал $u = u(x)$ зависит лишь от x.

Если дано некоторое 1-параметрическое семейство потенциалов $u(x,t)$, то при каждом фиксированном t можно повторить вычисление функций Йоста и далее по ним определить данные рассеяния. Естественно, всё это теперь тоже будет зависеть от t:

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(x,t,k), \quad \psi_{1,2} = \psi_{1,2}(x,t,k),$$
$$a = a(k,t), \quad b = b(k,t), \quad \kappa_j = \kappa_j(t), \quad c_j = c_j(t).$$

Замечательное свойство уравнения КдФ: для его (быстроубывающих) решений $u(x,t)$ зависимость данных рассеяния от t очень простая, что и было показано в знаменитой статье ГГКМ 1967.

Пусть исходный потенциал определяет начальное условие для задачи Коши

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad u(x,0) = u(x),$$

и пусть известны его данные рассеяния. Покажем, что тогда при всех t они определяются явными формулами — *пересчёт функций Йоста не нужен.*

Пользуемся тем, что КдФ равносильно условию совместности для

$$\psi_{xx} = (u - k^2)\psi, \qquad \psi_t = u_x\psi - (4k^2 + 2u)\psi_x, \tag{1}$$

в результате, для этих уравнений определена общая фундаментальная система решений.

Напомним (см. лекцию 3 про потенциалы Баргманна), что вронскиан любых двух решений постоянен:

$$w = W(\psi, \tilde{\psi}) = \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi} \quad \Rightarrow \quad w_x = w_t = 0, \tag{2}$$

также как и отношение решений в нулях вронскиана:

$$c = \tilde{\psi}(k_0)/\psi(k_0), \quad w(k_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_x = c_t = 0. \tag{3}$$

Однако, мы не можем сразу применить эти свойства к функциям Йоста, так как они *не удовлетворяют* паре (1). Действительно, для (1) любое решение при $|x| \to \infty$ представляется в виде

$$\psi \sim \alpha e^{i(kx-4k^3t)} + \beta e^{-i(kx-4k^3t)},$$

а асимптотика функций Йоста от t не зависит.

Действительно, по определению функций Йоста должно быть

$$\varphi_1 \sim e^{-ikx}, \quad \varphi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \to -\infty,$$
$$\psi_1 \sim e^{-ikx}, \quad \psi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \to +\infty.$$

Чтобы функции Йоста удовлетворяли КдФ, их нужно немного подправить. Положим

$$\varphi_1 = e^{-4ik^3t}\tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = e^{4ik^3t}\tilde{\varphi}_2,$$
$$\psi_1 = e^{-4ik^3t}\tilde{\psi}_1, \quad \psi_2 = e^{4ik^3t}\tilde{\psi}_2,$$

тогда функции с тильдой имеют нужную асимптотику и удовлетворяют паре (1).

Теорема 1. При эволюции потенциала в силу КдФ, данные рассеяния меняются так:

$$a(k,t) = a(k,0), \quad b(k,t) = e^{-8ik^3t}b(k,0),$$
$$\kappa_j(t) = \kappa_j(0), \quad c_j(t) = e^{-8\kappa_j^3t}c_j(0).$$

Доказательство. Используем представление для a через вронскианы от функций Йоста. Экспоненты от t сокращаются:

$$\begin{aligned} a(k,t) &= \frac{1}{2ik}W(\varphi_1,\psi_2) \\ &= \frac{1}{2ik}W(\tilde\varphi_1(x,t,k),\tilde\psi_2(x,t,k)) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2ik}W(\tilde\varphi_1(x,0,k),\tilde\psi_2(x,0,k)) \\ &= a(k,0). \end{aligned}$$

Аналогично для b, но теперь показатели экспонент складываются:

$$\begin{aligned} b(k,t) &= -\frac{1}{2ik}W(\varphi_1,\psi_1) \\ &= -\frac{1}{2ik}e^{-8ik^3t}W(\tilde\varphi_1(x,t,k),\tilde\psi_2(x,t,k)) \\ &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2ik}e^{-8ik^3t}W(\tilde\varphi_1(x,0,k),\tilde\psi_2(x,0,k)) \\ &= e^{-8ik^3t}b(k,0). \end{aligned}$$

Так как $i\kappa_j$ совпадают с нулями $a(k)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, и эта функция от t не зависит, то и κ_j не зависят от t.

Наконец, c_j определяются, как отношения функций Йоста при $k = i\kappa_j$:

$$c_j(t) = \frac{\varphi_1(x,t,i\kappa_j)}{\psi_2(x,t,i\kappa_j)} = e^{-8i(i\kappa_j)^3 t}\frac{\tilde\varphi_1(x,t,i\kappa_j)}{\tilde\psi_2(x,t,i\kappa_j)}$$

$$\overset{(3)}{=} e^{-8\kappa_j^3 t}\frac{\tilde\varphi_1(x,0,i\kappa_j)}{\tilde\psi_2(x,0,i\kappa_j)} = e^{-8\kappa_j^3 t}c_j(0).$$

Итак, мы поставили в соответствие потенциалу $u(x)$ функции $a(k)$, $b(k)$ и числа κ_j и c_j, и установили, как они зависят от t, если u эволюционирует в силу КдФ.

Оказывается, эти данные содержат достаточно информации, чтобы восстановить по ним потенциал $u(x,t)$.

Однако, прежде чем перейти к этому, разберёмся с вопросом о независимости спектральных данных.

Выражение $a(k)$, $b(k)$ через $r(k)$

Набор спектральных данных немного избыточен:

— дискретный спектр совпадает с нулями продолжения $a(k)$;

— функции a и b связаны соотношением $|a|^2-|b|^2=1$.

Оказывается, что вместо a и b достаточно задать одну функцию: коэффициент отражения

$$r(k)=b(k)/a(k)\quad \text{при}\quad k\in\mathbb{R}.$$

Обе функции a и b восстанавливаются по ней и по дискретному спектру.

Чтобы показать это, нам понадобятся формулы Сохоцкого для интегралов типа Коши.

Напомним, что *интеграл Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

выражает значения функции $f(z)$, аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$ через ее значения на границе $C=\partial D$.

Интегралом типа Коши называется интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

где C — гладкая кривая, не обязательно замкнутая, $f(\zeta)$ — непрерывная функция на ней. При этом значение интеграла $F(z)$ есть аналитическая функция вне C. Используем следующее утверждение (см. напр. [Лаврентьев, Шабат. Методы ТФКП]).

Формулы Сохоцкого. Для функции $f(s)$, непрерывной при $s\in\mathbb{R}$, предельные значения интегралов типа Коши при стремлении к вещественной оси сверху или снизу равны

$$F^{\pm}(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(s)\,ds}{s-(k\pm i0)}=\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(s)\,ds}{s-k}\pm\frac{f(k)}{2}. \qquad (4)$$

- Интеграл в правой части называется преобразованием Гильберта. Он понимается в смысле главного значения, то есть, как предел по отрезкам, симметричным относительно особой точки $s=k$.
- Вместо $C=\mathbb{R}$ может быть и другой контур. Также, f может иметь на C конечное число точек с интегрируемым разрывом.

Следствие (тождество Крамерса–Кронига). Пусть $f(k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k \ge 0$ и $f \to 0$ при $|k| \to \infty$. Тогда

$$f(k) = \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\,ds}{s-k}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Действительно, по формуле Коши, интеграл с $k + i0$ в левой части (4) равен $f(k)$.

В свою очередь, из (5) следует, что для функции $f = u + iv$, аналитической в верхней полуплоскости выполняются условия согласования на $\mathbb{R}$: мнимая часть = преобразованию Гильберта от вещественной и наоборот:

$$u(k) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(s)\,ds}{s-k}, \quad v(k) = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(s)\,ds}{s-k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Применим эти тождества к $\log a(k)$, предварительно погасив нули в точках $k = i\kappa_j$, чтобы получить аналитическую функцию при $\operatorname{Im} k > 0$.

Утверждение 2. При $k \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{1-|r(k)|^2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{k-i\kappa_j}{k+i\kappa_j} \exp\left(\frac{i}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1-|r(s)|^2)\,ds}{s-k}\right), \qquad (6)$$

$$b(k) = r(k)a(k).$$

Доказательство. Модуль a легко находится:

$$|a|^2 - |b|^2 = |a|^2(1-|r|^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad |a(k)| = \frac{1}{\sqrt{1-|r(k)|^2}}.$$

Теперь нужно восстановить аргумент. Как известно,

$$a = |a|e^{i\arg a} \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \log|a| + i\arg a,$$

то есть, логарифм модуля и аргумент — это вещественная и мнимая части $\log a$. Положим

$$f(k) = \log\left(a(k)\frac{(k+i\kappa_1)\cdots(k+i\kappa_n)}{(k-i\kappa_1)\cdots(k-i\kappa_n)}\right).$$

Функция f аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$. Рациональный множитель лежит на единичной окружности, то есть имеет вид $e^{i\alpha}$ и логарифм от него чисто мнимый. Применим тождество (5). Имеем

$$
\begin{aligned}
f(k) &= \log|a(k)| + i\arg a(k) + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{k+i\kappa_j}{k-i\kappa_j} \\
&= \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\,ds}{s-k} = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} f(s) + i\operatorname{Im} f(s)\,ds}{s-k}.
\end{aligned}
$$

откуда следует

$$
i\arg a(k) + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{k+i\kappa_j}{k-i\kappa_j} = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|a|}{s-k}ds.
$$

Тогда

$$
a = |a|e^{i\arg a} = |a|\prod_{j=1}^{n}\frac{k-i\kappa_j}{k+i\kappa_j}\exp\left(\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\log|a|}{s-k}ds\right)
$$

и остается только заменить $|a| = (1-|r|^2)^{-1/2}$. ■

Формула (6) определяет функцию $a(k)$, аналитическую при $\operatorname{Im} k > 0$, по комплекснозначной непрерывной функции $r(k)$, заданной на вещественной оси и числам $\kappa_j > 0$. При этом $r(k)$ должна удовлетворять свойствам

$$r(k)^* = r(-k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad |r| < 1, \quad r(k) = O(k^{-1}), \quad k \to \pm\infty.$$

Итак, независимые спектральные данные состоят из функции $r(k)$, удовлетворяющей перечисленным условиям, произвольных чисел $\kappa_1 > \cdots > \kappa_n > 0$ и c_j таких, что $\operatorname{sign} c_j = (-1)^{j+1}$.

Можно доказать, что других ограничений нет и что данные полные, то есть, по любому такому набору действительно однозначно восстанавливается некоторый быстроубывающий потенциал.

Обратная задача

Покажем, что задача восстановления $u(x)$ по данным рассеяния сводится к интегральным уравнениям (но не будем анализировать, все ли там корректно, и как их решать на практике).

Про зависимость от t опять можно забыть, все вычисления делаются при каком-то фиксированном t.

Есть два способа — уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко и система сингулярных ИУ. Мы используем второй, он немного проще (хотя система выглядит более громоздкой).

Используем наше основное соотношение

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_1(x,k)^*, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ считаются известными. Сделаем переобозначение:

$$\Phi(x,k) = \begin{cases} \Phi_+(x,k) = \dfrac{e^{ikx}}{a(k)}\varphi_1(x,k), & \operatorname{Im} k \geq 0, \\ \Phi_-(x,k) = e^{ikx}\psi_1(x,k), & \operatorname{Im} k \leq 0. \end{cases}$$

Задача Римана–Гильберта заключается в определении Φ по следующим условиям, которые являются переформулировкой уже известных нам свойств:

- $\Phi \sim 1 + O(1/|k|)$, $|k| \to \infty$
- $\Phi = \Phi_-$ аналитична при $\operatorname{Im} k \le 0$
- $\Phi = \Phi_+$ мероморфна при $\operatorname{Im} k \ge 0$, с простыми полюсами в $k = i\kappa_j$
- вычеты Φ в этих полюсах связаны со значениями Φ при $k = -i\kappa_j$:

$$\operatorname*{res}_{k=i\kappa_j} \Phi_+(x,k) = \frac{c_j e^{-2\kappa_j x}}{a'(i\kappa_j)} \Phi_-(x, -ik_j) \tag{7}$$

(это следует из $\varphi_1(x, i\kappa_j) = c_j\psi_2(x, i\kappa_j) = c_j\psi_1(x, -i\kappa_j)$)

- выполнено условие разрыва на вещественной оси

$$\Phi_+ = \Phi_- + r(k)e^{2ikx}\Phi_-^*, \quad k \in \mathbb{R}$$

Если решение задачи Римана–Гильберта найдено, то по нему можно восстановить $u(x)$, например, пользуясь разложением

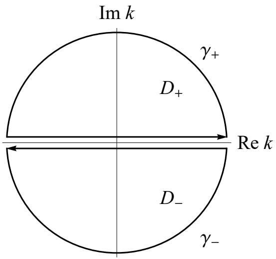
$$\Phi_- = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(y)\, dy + o(k^{-1}),$$

которое следует из уравнения Шрёдингера $\psi_{1,xx} = (u - k^2)\psi_1$ для $\psi_1 = e^{-ikx}\Phi_-$.

Случай без дискретного спектра

Разберем сначала случай, когда $a(k)$ не имеет нулей при $\mathrm{Im}(k) > 0$ (то есть, набор κ_j пуст и функция Φ аналитична в обеих полуплоскостях).

Рассмотрим контур $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$ с полуокружностями радиуса R. По формуле Коши



$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}ds = \begin{cases}\Phi(x,k)-1, & k \in D_+ \cup D_-,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В пределе $R \to \infty$, интегралы по дугам $\to 0$, так как $\Phi(k) = 1 + O(1/|k|)$. Получаем

$$\Phi(x,k) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_+(x,s) - \Phi_-(x,s)}{s-k}ds.$$

Тогда в нижней полуплоскости имеем

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k}ds. \tag{8}$$

Переходя к пределу, когда k стремится к вещественной оси снизу, получаем, по уже знакомой формуле Сохоцкого,

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi^*_-(x,s)}{s-k}ds + \frac{1}{2}r(k)e^{2ikx}\Phi^*_-(x,k). \qquad (9)$$

Задача свелась к замкнутому интегральному уравнению на функцию $\Phi_-(x,k)$, что и считается ответом.

Чтобы получить формулу для u, разложим (8) по $1/k$:

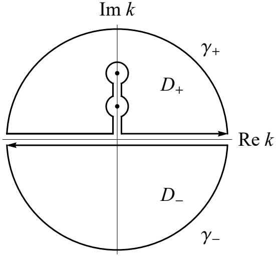
$$\begin{aligned}\Phi_-(x,k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty u(y)\,dy + o(k^{-1})\\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi^*_-(x,s)}{-k}\Big(1+\frac{s}{k}+\frac{s^2}{k^2}+\dots\Big)ds\end{aligned}$$

и дифференцируя по x коэффициент при k^{-1} получаем

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\partial_x\int_{\mathbb{R}} r(s)e^{2isx}\Phi^*_-(x,s)\,ds.$$

Случай с дискретным спектром

Этот случай более громоздкий: нужно обойти полюса Φ_+.



Как и раньше, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}ds = \begin{cases}\Phi(x,k)-1, & k\in D_+\cup D_-,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Интеграл по маленькой окружности C_j вокруг полюса в точке $i\kappa_j$ (обходится в отрицательном направлении) равен

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_j}\frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}ds = -\operatorname*{res}_{s=i\kappa_j}\frac{\Phi(x,s)-1}{s-k} = \frac{\operatorname*{res}_{k=i\kappa_j}\Phi(x,k)}{k-i\kappa_j} =: \frac{\Gamma_j(x)}{k-i\kappa_j}.$$

При $\operatorname{Im} k<0$ получаем уравнение типа (8) с дополнительными функциями $\Gamma_j(x)$:

$$\Phi_-(x,k) = 1+\sum_{j=1}^n\frac{\Gamma_j(x)}{k-i\kappa_j}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{r(s)e^{2isx}\Phi^*_-(x,s)}{s-k}ds. \qquad (10)$$

После перехода к пределу по k, стремящемуся к вещественной оси снизу, это, как и раньше, даёт интегральное уравнение на $\Phi_-(x,k)$:

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k}ds + \frac{1}{2}r(k)e^{2ikx}\Phi_-^*(x,k). \tag{11}$$

Нужны дополнительные уравнения на Γ_j. Согласно (7), эти функции выражаются через Φ_- в точках, симметричных $i\kappa_j$:

$$\Gamma_j(x) = \frac{c_j e^{-2\kappa_j x}}{a'(i\kappa_j)}\Phi_-(x, -ik_j).$$

Подставляя в эту формулу для Γ_m вместо Φ_- выражение из (10), получаем дополнительную систему уравнений, при $m = 1, \dots, n$:

$$\Gamma_m(x) = \frac{c_m e^{-2\kappa_m x}}{a'(i\kappa_m)}\left(1 + i\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_j(x)}{\kappa_j + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s + i\kappa_m}ds\right). \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) образуют замкнутую систему смешанных уравнений — алгебраических и интегральных. Можно сначала решить (12) и выразить Γ_j через интегралы от Φ_-. Потом подставить их в (10) и получить ИУ на Φ_-, но с более сложным ядром. Как и раньше, $u(x)$ восстанавливается из разложения уравнения (10) по $1/k$:

$$u(x) = \partial_x \left(-2i \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x,s)\, ds \right).$$

Замечание 1. Дополнительными преобразованиями можно свести задачу к уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x,s) F(y+s) ds = 0.$$

Ядро F имеет вид

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j e^{-\kappa_j x}}{i a'(i\kappa_j)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r(k) e^{ikx} dk,$$

по решению $K(x,y)$ определяется потенциал $u = -2\partial_x K(x,x)$.

Замечание 2. В безотражательном случае $r(k)=0$ интегральные уравнения (11) и (12) сводятся просто к СЛАУ относительно $\gamma_j = i\Gamma_j$ (переобозначим $d_m = ic_m/a'(i\kappa_m) \in \mathbb{R}$):

$$\gamma_m(x) = d_m e^{-2\kappa_m x}\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j(x)}{\kappa_j+\kappa_m}\right), \quad j=1,\dots,n,$$

$$u(x) = -2\partial_x \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(x).$$

Отсюда следуют детерминантные формулы для n-солитонного решения. По виду они отличаются от тех, что были раньше с вронскианами, но можно проверить их эквивалентность. Это отличие объясняется тем, что раньше мы выписывали СЛАУ относительно коэффициентов многочлена (из оборванной функции Бейкера–Ахиезера), а сейчас этот многочлен поделен на произведение $(k-i\kappa_j)$ и представлен как сумма простых дробей с коэффициентами Γ_j.