В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 10 · 8 апреля 2024

# Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Прямая задача

# План

На этой лекции:

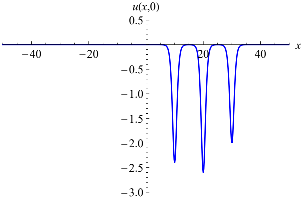
- Спектр оператора Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом
- Сведение уравнения Шрёдингера к интегральному
- Прямая задача
  - Функции Йоста
  - Матрица перехода
  - Свойства матрицы перехода
  - Дискретный спектр
  - Данные рассеяния

На следующей лекции:

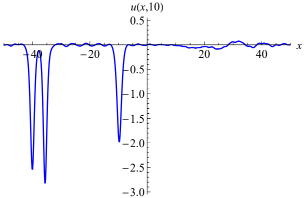
- Зависимость данных рассеяния от $t$
- Обратная задача (метод сингулярных интегральных уравнений)

# Метод обратной задачи рассеяния

Это метод решения задачи Коши для КдФ в классе быстроубывающих потенциалов. Дано начальное условие $u(x,0)$, нужно выяснить, как оно меняется по $t$.




$$\xrightarrow{u_t = u_{xxx} - 6uu_x}$$




$\downarrow$ прямая задача

$\uparrow$ обратная задача

данные рассеяния при $t = 0$ $\xrightarrow{e^{k^3 t}}$ данные рассеяния при произвольном $t$

Метод основан на уже известной нам связи КдФ с линейным уравнением Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \lambda = k^2 \in \mathbb{C}.$$

***Прямая задача***: определение данных рассеяния для заданного потенциала.

***Обратная задача***: восстановление потенциала по данным рассеяния.

***Данные рассеяния***:

- дискретный спектр — числа $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$
- дополнительные множители — числа $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sign} c_j = (-1)^{j+1}$
- коэффициент отражения — функция $r(k) \in \mathbb{C}$, $r(-k) = r(k)^*$, $k \in \mathbb{R}$

В частности, для потенциалов Баргманна (лекция 3) спектр вводился как нули вронскиана пси-функций, множители — как коэффициенты пропорциональности пси-функций в нулях, а $r(k)$ был равен 0.

Эта теория была развита в 1950–70, безотносительно к уравнению КдФ.

- И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. *Изв. АН СССР, сер. мат.* **15:2** (1951) 309–360.
- З.С. Агранович, В.А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
- Л.Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния. *УМН* **14:4(88)** (1959) 57–119; *J. Math. Phys.* **4** (1963) 72–104.
- В.А. Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова думка (1977).

***Эволюция по*** $t$: тот факт, что КдФ служит условием совместности для УШ и дополнительного линейного уравнения

$$\psi_t = u_x\psi - 2(u+2\lambda)\psi_x,$$

позволяет показать, что эволюция данных рассеяния тривиальна: дискретный спектр не меняется, множители и $r(k)$ умножаются на экспоненты от $t$.

- C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* **19:19** (1967) 1095–1097.

Насколько это все эффективно? Данные рассеяния определяются по решениям уравнения Шрёдингера. Аналитически оно, вообще говоря, не решается. К тому же, на практике $u$ может задаваться не формулой, а массивом чисел. Поэтому, задача так или иначе сводится к численным методам. Один из возможных подходов связан с переходом к интегральным уравнениям Вольтерры.

Обратная задача тоже сводится к интегральным уравнениям (есть две версии — уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко или система сингулярных ИУ), которые необходимо решать численно.

Однако, на концептуальном уровне, МОЗР даёт решение, так как нелинейная задача сводится к последовательности линейных интегральных уравнений. Реализацией численных методов мы не будем заниматься, нашей целью будет просто описать алгоритм этого сведения.

Обозначения будут (почти) такие же, как в


- В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.

# Спектр оператора Шрёдингера

Про переменную $t$ мы временно забудем — вплоть до того момента, когда нужно будет смотреть на зависимость данных рассеяния от $t$. Сегодня считаем, что потенциал зависит лишь от $x$:

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi \quad \Leftrightarrow \quad L\psi = \lambda\psi, \quad L = -\partial_x^2 + u.$$

Условие быстроубывания: $\int_{\mathbb{R}} |u|(1 + |x|)dx < \infty$.

Не будем давать общее определение спектра. В случае оператора $L$ достаточно определить

- непрерывный спектр — значения $\lambda$, для которых существует решение $\psi$, ограниченное при $x \in \mathbb{R}$;
- дискретный спектр — значения $\lambda$, для которых существует решение $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, то есть $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx < \infty$.

Будем пользоваться без доказательства следующими свойствами:

- непрерывный спектр состоит из всех $\lambda \geq 0$;
- дискретный спектр отрицателен и конечен: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < 0$ (существенно, что потенциал убывает быстрее $1/x^2$, так как иначе собственные значения могут накапливаться к 0).

# Сведение уравнения Шрёдингера к интегральному

Уравнение Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - k^2)\psi$$

эквивалентно любому из интегральных уравнений

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi(y)\,dy \tag{1}$$

или

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi(y)\,dy. \tag{2}$$

Мы покажем это при помощи метода функций Грина, хотя можно также проверить непосредственно дифференцированием, либо вывести методом вариации произвольных постоянных.

Для этого перепишем УШ в виде

$$\psi_{xx} + k^2\psi = u\psi \quad \Rightarrow \quad A\psi = u\psi, \quad A = \partial_x^2 + k^2.$$

**Определение 1.** Функцией Грина (фундаментальным решением) $G(x, y)$ для дифференциального оператора $A$, действующего на функциях $\psi : \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}_x$, называется решение уравнения

$$AG(x, y) = \delta(x - y).$$

Зная $G$, можно найти частное решение уравнения $A\psi = f(x)$ по формуле

$$\psi_{\text{ч}} = \int_{\mathbb{R}} G(x, y) f(y)\, dy.$$

Действительно,

$$A\psi_{\text{ч}} = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y)\, dy = f(x).$$

Применяя эту формулу к уравнению $A\psi = f = u\psi$ и добавляя общее решение однородного уравнения, получим

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{\mathbb{R}} G(x, y) u(y) \psi(y)\, dy. \tag{3}$$

Это и есть интегральное уравнение на функцию $\psi$, при конкретном выборе $c_1, c_2$ и $G$.

Остаётся найти $G$ для оператора $A=\partial_x^2+k^2$. Нетрудно видеть, что если $A$ — оператор с постоянными коэффициентами, то $G(x,y)=G(x-y)$, где $AG(x)=\delta(x)$.

**Утверждение 1.** Оператор $A=\partial_x^2+k^2$ обладает функциями Грина

$$G_-(x)=\begin{cases} -\dfrac{\sin kx}{k} & x<0\\ 0 & x\ge 0,\end{cases}\qquad G_+(x)=\begin{cases} 0 & x<0\\ \dfrac{\sin kx}{k} & x\ge 0.\end{cases}$$

Так как $A(G_+-G_-)=0$, то достаточно проверить это для одной функции. Ф.Г. служит и любая линейная комбинация $\alpha G_++(1-\alpha)G_-$.

***Доказательство.***

$$G'_-(x)=\begin{cases} -\cos kx & x<0\\ 0 & x\ge 0\end{cases} =\theta(x)+\begin{cases} -\cos kx & x<0\\ -1 & x\ge 0,\end{cases}$$

где $\theta(x)=\begin{cases} 0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$. Так как $\theta'(x)=\delta(x)$, то

$$G''_-(x)=\delta(x)+\begin{cases} k\sin kx & x<0\\ 0 & x\ge 0\end{cases} =\delta(x)-k^2G_-(x).$$

∎

Итак, формулы (1) и (2) доказаны. Каждое из этих уравнений — это интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x,y)\psi(y)\,dy.$$

Такие уравнения можно решать численно методом итераций

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_{n+1}(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x,y)\psi_n(y)\,dy.$$

Если выполняется оценка $|K(x,y)| < M$, то итерации сходятся экспоненциально быстро, решение существует и единственно.

# Функции Йоста

В зависимости от выбора $c_1$, $c_2$ и $G$ в интегральном уравнении (3), можно определить четыре решения с разной асимптотикой при $x \to \pm\infty$.

$G = G_+$: два решения с фиксированной асимптотикой при $x \to -\infty$:

$$\varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_1(y)\,dy, \qquad \varphi_1 = e^{-ikx} + o(1),$$

$$\varphi_2 = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_2(y)\,dy, \qquad \varphi_2 = e^{ikx} + o(1).$$

$G = G_-$: два решения с фиксированной асимптотикой при $x \to +\infty$:

$$\psi_1 = e^{-ikx} - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_1(y)\,dy, \qquad \psi_1 = e^{-ikx} + o(1),$$

$$\psi_2 = e^{ikx} - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_2(y)\,dy, \qquad \psi_2 = e^{ikx} + o(1).$$

Эти четыре решения — комплекснозначные функции от двух переменных, $x \in \mathbb{R}$ и параметра $k \in \mathbb{C}$. Разберемся, какие у них свойства по $k$.

Пусть $\varphi_1 = e^{-ikx}p$, тогда уравнение для $\varphi_1$ переписывается как

$$\begin{aligned} p &= 1 + \int_{-\infty}^{x} e^{ikx-iky} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ki} u(y)p(y)\, dy \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ki} u(y)p(y)\, dy. \end{aligned}$$

Так как интегрируем при $x - y > 0$, то функция $e^{2ik(x-y)}$ ограничена при $\operatorname{Im} k \geq 0$. Вместе с ней ограничено и все ядро, метод итераций сходится и функция $p$ однозначно определена. Итак, можно гарантировать, что $\varphi_1$ определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Уравнение для $\varphi_2$ получается при замене $k \to -k$, поэтому $\varphi_2$ определена при $\operatorname{Im} k \leq 0$.

Для $\psi_1 = e^{-ikx}p$ подынтегральное выражение то же самое, но теперь интегрируем при $x - y < 0$. Поэтому $\psi_1$ определена при $\operatorname{Im} k \leq 0$, а $\psi_2$ при $\operatorname{Im} k \geq 0$.

**Утверждение 2.** Для уравнения Шредингера существуют решения со следующими асимптотиками и аналитические по $k$ в указанных полуплоскостях:

| $x \to -\infty$ | $x \to +\infty$ | |
|---|---|---|
| $\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1)$ | $\psi_2 = e^{ikx} + o(1)$ | $\operatorname{Im} k \geq 0$ |
| $\varphi_2 = e^{ikx} + o(1)$ | $\psi_1 = e^{-ikx} + o(1)$ | $\operatorname{Im} k \leq 0$ |

**Определение.** Решения УШ с указанной асимптотикой называются функциями Йоста.

Решения Йоста не обязательно определять именно через интегральные уравнения. Если можно решить уравнение Шрёдингера как-то иначе, можно строить их и другими способами. Интегральные уравнения удобны как инструмент доказательства существования, а также для вывода некоторых дальнейших формул.

Асимптотику функций Йоста можно дифференцировать по $x$, например

$$\varphi_{1,x} = -ike^{-ikx} + o(1), \quad x \to -\infty,$$

корректность этого следует из интегральных уравнений.

Область определения и аналитичности по $k$ для функций Йоста, отвечающих конкретным потенциалам, вполне может быть шире, чем указано. Например, если потенциал финитен, то интервал интегрирования ограничен его носителем и ядро всегда ограничено, поэтому функции Йоста определены при всех $k \in \mathbb{C}$. Утверждение 2 лишь гарантирует аналитичность в полуплоскостях при самых слабых предположениях относительно потенциала.

**Пример 1.** Вернемся к потенциалу Баргманна из лекции 3. В силу самого его определения, для него имеется явное решение в виде квазиполинома

$$\psi(x,z)=e^{zx}P(x,z)=e^{zx}(z^n+p_1z^{n-1}+\dots+p_n),$$

где $\lambda=k^2=-z^2$ и коэффициенты рекуррентно определяются по потенциалу, с использованием интегрирования по $x$. Для определенности, пусть $z=-ik$, тогда

$$\psi(x,-ik)=e^{-ikx}\begin{cases} P(k)+o(1), & x\to-\infty,\\ \tilde P(k)+o(1), & x\to+\infty,\end{cases}$$

где $P$ и $\tilde P$ — конечные предельные значения коэффициентов (как мы знаем, они находятся по формулам Крамера через определители экспонент). То есть, эта функция совпадает с $\varphi_1$ и $\psi_1$, с точностью до множителя. Аналогично, $\psi(x,ik)$ пропорциональна $\varphi_2$ и $\psi_2$.

# Свойства симметрии по $k$

Как уже отмечалось,

$$\varphi_1(x,k)=\varphi_2(x,-k),\quad \psi_1(x,k)=\psi_2(x,-k). \tag{4}$$

Кроме того, так как потенциал вещественный, то, если к интегральным уравнениям применить комплексное сопряжение, заменится только $i$ на $-i$ и $k$ на $k^*$. Следовательно

$$\varphi_1(x,k)^*=\varphi_2(x,k^*),\quad \psi_1(x,k)^*=\psi_2(x,k^*). \tag{5}$$

Как следствие, получаем связь между значениями одной и той же функции при отражении относительно мнимой оси:

$$\varphi_i(x,k)^*=\varphi_i(x,-k^*),\quad \psi_i(x,k)^*=\psi_i(x,-k^*),\quad i=1,2. \tag{6}$$

В частности, на мнимой полуоси имеем

$$\varphi_1(x,iz),\ \psi_2(x,iz)\in\mathbb{R},\quad z>0. \tag{7}$$

# Матрица перехода

При $k \in \mathbb{R}$ (то есть, при $\lambda = k^2 > 0$) определены все четыре функции Йоста. Обе пары $(\varphi_1, \varphi_2)$ и $(\psi_1, \psi_2)$ образуют базисы. Следовательно, все решения уравнения Шредингера при $k \in \mathbb{R}$ имеют тригонометрическую асимптотику и ограничены при всех $x$. То есть, это функции непрерывного спектра.

Рассмотрим матрицу перехода между указанными базисами. По свойству симметрии (5), для вещественных $k$ выполняется

$$\varphi_1(x,k)^* = \varphi_2(x,k), \quad \psi_1(x,k)^* = \psi_2(x,k).$$

Поэтому, если

$$\varphi_1 = a\psi_1 + b\psi_2 = a\psi_1 + b\psi_1^*,$$

то

$$\varphi_2 = \varphi_1^* = a^*\psi_1^* + b^*\psi_2^* = b^*\psi_1 + a^*\psi_2,$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = T(k)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad T(k) = \begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a^*\end{pmatrix}.$$

## *Терминология*

$a(k)$ — амплитуда рассеяния

$t(k) = 1/a(k)$ — коэффициент прохождения

$r(k) = b(k)/a(k)$ — коэффициент отражения

После деления на $b$ имеем

$$t(k)\varphi_1 = \psi_1 + r(k)\psi_2,$$

где $\varphi_1 \sim e^{-ikx}$, $x \to -\infty$, $\psi_1 \sim e^{-ikx}$, $\psi_2 \sim e^{ikx}$, $x \to +\infty$.

Здесь $\psi_1$ интерпретируется как волна, «падающая» на потенциал (справа); $\psi_2$ — «отраженная» волна, $\varphi_1$ — волна «прошедшая» через потенциал.

**Пример** $1'$. В примере 1 было отмечено, что обе функции $\varphi_1$ и $\psi_1$ пропорциональны одному и тому же квазимногочлену $\psi(x,-ik)$, а $\varphi_2$ и $\psi_2$ пропорциональны $\psi(x,ik)$. Следовательно, коэффициент $b(k)$ в данном случае равен 0, потенциал Баргманна — безотражательный.

***Замечание.*** Матрица перехода обобщается и на тот случай, когда потенциал выходит на разные константы при $x \to \pm\infty$, см. [Ландау-Лифшиц, 3:25].

# Свойства

**1)** $a(k)^* = a(-k), \quad b(k)^* = b(-k), \quad k \in \mathbb{R}.$

Равносильно, $r(k)^* = r(-k)$, $t(k)^* = t(-k)$.

Это сразу следует из свойств симметрии.

**2)** $\det T = |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}.$

Равносильно, $|r(k)|^2 + |t(k)|^2 = 1$.

***Доказательство.*** Продифференцируем определение матрицы перехода по $x$, это даст

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' \\ \psi_2 & \psi_2' \end{pmatrix}.$$

Вронскианы $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$ и $\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$ не зависят от $x$. Первый из них можно вычислить при $x \to -\infty$, второй при $x \to +\infty$, оба равны

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ikx} & -ike^{-ikx} \\ e^{ikx} & ike^{ikx} \end{pmatrix} = 2ik. \qquad \blacksquare$$

**3)** Выражения для $a(k)$, $b(k)$ через вронскианы от функций Йоста:

$$a(k)=\frac{W(\varphi_1,\psi_2)}{2ik},\quad b(k)=-\frac{W(\varphi_1,\psi_1)}{2ik},\quad k\in\mathbb{R},\quad k\ne 0. \tag{8}$$

***Доказательство.*** Имеем

$$\varphi_1=a\psi_1+b\psi_2 \quad\Rightarrow\quad W(\varphi_1,\psi_2)=aW(\psi_1,\psi_2)=2ika$$

и, аналогично $W(\varphi_1,\psi_1)=-bW(\psi_1,\psi_2)=-2ikb$. ■

**4)** Формула (8) определяет аналитическое продолжение $a(k)$ в верхнюю полуплоскость, так как там определены обе функции $\varphi_1$, $\psi_2$. При этом, благодаря свойствам симметрии (6),

$$a(k)^*=a(-k^*),\quad \operatorname{Im}k\ge 0.$$

Но, вообще говоря, $b(k)$ *не продолжается* в $\mathbb{C}$.

# Выражения для $a(k)$, $b(k)$ через интегралы

Формулы (8) не очень удобны, так как содержат две функции Йоста и дифференцирование (плохая операция, с вычислительной точки зрения). Вспомним интегральные уравнения и немного попреобразуем:

$$\varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_1(y)\,dy,$$
$$\psi_1 = e^{-ikx} - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_1(y)\,dy,$$
$$\psi_2 = e^{ikx} - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi_2(y)\,dy$$

(здесь $k$ в аргументах $\psi$ опущено), тогда

$$a\psi_1 + b\psi_2 = \varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{\mathbb{R}} - \int_{x}^{\infty}$$
$$= e^{-ikx} + I - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)(a\psi_1 + b\psi_2)\,dy$$
$$= e^{-ikx} + I + a(\psi_1 - e^{-ikx}) + b(\psi_2 - e^{ikx}).$$

Отсюда следует

$$
\begin{aligned}
e^{-ikx}(a-1)+be^{ikx}=I&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)\varphi_1(y)\,dy\\
&=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ik(x-y)}-e^{-ik(x-y)}}{2ik}u(y)\varphi_1(y)\,dy\\
&=\frac{e^{ikx}}{2ik}\int_{\mathbb{R}}e^{-iky}u(y)\varphi_1(y)\,dy-\frac{e^{-ikx}}{2ik}\int_{\mathbb{R}}e^{iky}u(y)\varphi_1(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Сравнивая коэффициенты при экспонентах и меняя $y$ на $x$, получаем следующее свойство.

**5)** Интегральные выражения для $a(k)$, $b(k)$:

$$
a(k)=1-\frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}}e^{ikx}u(x)\varphi_1(x,k)\,dx, \tag{9}
$$

$$
b(k)=\frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}}e^{-ikx}u(x)\varphi_1(x,k)\,dx. \tag{10}
$$

Формула (9), как и (8), определяет продолжение $a(k)$ в верхнюю полуплоскость: при $x \to -\infty$ интеграл сходится, так как $e^{ikx}\varphi_1(x,k) \sim 1$, а потенциал быстроубывающий; при $x \to \infty$ интеграл сходится, так как $e^{ikx}$ — убывающая экспонента при $\operatorname{Im} k > 0$.

Вообще говоря, $b(k)$ не продолжается с вещественной оси. Иногда это возможно. Например, если потенциал финитный, то видно, что интеграл (10) тоже сходится. Но, продолжение $b$ нам не будет нужно.

**6)** Асимптотика по $k$:

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geq 0,$$
$$b(k) = O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Также из (9) следует, что $a(k)$, вообще говоря, имеет простой полюс при $k = 0$ (для некоторых потенциалов его может и не быть, если интеграл при $k = 0$ случайно обращается в 0).

# Дискретный спектр

**Утверждение 3.** Точки дискретного спектра оператора $L = -\partial_x^2 + u$ совпадают с числами $\lambda_j = k_j^2$, где $k_j$ — нули функции $a(k)$ в верхней полуплоскости.

***Доказательство.*** Пусть $a(k_j) = 0$, тогда из (8) вытекает, что

$$\varphi_1(x, k_j) = c_j \psi_2(x, k_j), \tag{11}$$

причём на обеих бесконечностях имеем убывающие экспоненты:

$$\varphi_1(x, k_j) \sim e^{-ikx}, \quad x \to -\infty, \qquad \psi_2(x, k_j) \sim e^{ikx}, \quad x \to +\infty.$$

Наоборот, пусть $y$ — собственная функция, отвечающая некоторому $k_j$. Тогда она имеет асимптотику как $\varphi_1(x, k_j)$ при $x \to -\infty$ и как $\psi_2(x, k_j)$ при $x \to +\infty$ (с точностью до множителей). Так как вронскианы постоянны, их можно вычислить на бесконечностях и получить, что они равны 0. Это означает, что $y = C_1 \varphi_1(x, k_j) = C_2 \psi_2(x, k_j)$, но тогда и $W(\varphi_1(x, k_j), \psi_2(x, k_j)) = 2ik_j a(k_j) = 0$. ∎

Так как спектр $L$ вещественный, получаем отсюда следующее свойство.

**7)** Нули $a(k)$ лежат на мнимой оси. Они простые и их конечное число:

$$k_j = i\kappa_j, \quad \kappa_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Собственные числа нумеруются по возрастанию:

$$-\kappa_1^2 < -\kappa_2^2 < \dots < -\kappa_n^2 < 0.$$

Соответственно, $\kappa_j$ нумеруются по убыванию, $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n > 0$.

Коэффициенты пропорциональности $c_j$ в нулях $k_j$ относятся к данным дискретного спектра. Они не совсем произвольны:

**8)** Коэффициенты $c_j$ вещественны и удовлетворяют правилу чередования знаков:

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad \dots, \quad \operatorname{sign} c_n = (-1)^{n+1}.$$

***Доказательство.*** Вещественность следует из того, что функции Йоста на мнимой оси вещественны, см. (7). Чередование следует из того, что $j$-я собственная функция имеет ровно $j-1$ нуль при $x \in \mathbb{R}$, а у нас знаки функций Йоста фиксируются асимптотиками на разных бесконечностях:

$$\varphi_1(x, i\kappa_j) \sim e^{\kappa_j x} \quad \text{при } x \to -\infty, \qquad \psi_2(x, i\kappa_j) \sim e^{-\kappa_j x} \quad \text{при } x \to +\infty. \quad \blacksquare$$

# Итоги

Итак, мы поставили в соответствие потенциалу $u(x)$:

— функции $a(k)$, $b(k)$, $k \in \mathbb{R}$ (данные непрерывного спектра);

— числа $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n > 0$ и $c_1, \dots, c_n$, $\operatorname{sign} c_j = (-1)^{j+1}$ (данные дискретного спектра).

Пока что, этот набор данных *избыточен*, так как дискретный спектр совпадает с нулями аналитического продолжения $a(k)$ в верхнюю полуплоскость. К тому же, он *не свободен*, так как $a$ и $b$ не произвольны, а связаны соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

На следующей лекции мы покажем, что вместо $a$ и $b$ достаточно задать одну функцию $r(k) = b(k)/a(k)$, при $k \in \mathbb{R}$ (даже только на полуоси $k \geq 0$, благодаря симметрии $r(-k) = r(k)^*$).

Также включим $t$ и выясним, как при этом меняются спектральные данные.

Наконец, сведём задачу восстановления $u(x, t)$ к интегральным уравнениям.

# Домашнее задание

Рассмотрим несколько задач, связанных с уравнением Шрёдингера с дельта-образным потенциалом $u(x) = c\delta(x)$:

$$\psi'' = (c\delta(x) - k^2)\psi. \tag{12}$$

Все спектральные данные в этом случае находятся явно.

**10.1** Постройте все четыре функции Йоста для этого уравнения. Рассмотрите два случая $c < 0$ и $c > 0$.

*Замечание.* Есть по крайней мере два способа решения. Во-первых, можно использовать интегральные уравнения, они легко решаются. Во-вторых, можно решить уравнение на полуосях, выбрать решения с нужной асимптотикой и сшить в 0. Интегрируя уравнение по $[-\varepsilon, \varepsilon]$, получаем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'' dx \to c\psi(0), \quad \varepsilon \to 0,$$

что даёт условие излома

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = c\psi(0).$$

**10.2** Найдите в явном виде коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ для (12).

**10.3** Пользуясь полученными выражениями, проверьте, что свойства 1–6 для $a$ и $b$ действительно выполняются, как предсказывает теория.

**10.4** Найдите дискретный спектр для (12), если он есть (как это связано со знаком $c$?) и соответствующие собственнные функции. Сравните с нулями $a(k)$.

# Комментарии к предыдущим ДЗ

**5.2** Пусть $[f,g]=0$, где

$$f=u_n+F(x,u,\dots,u_{n-1}),\quad g=g(x,u,\dots,u_m),\ \partial_{u_m}(g)\ne0,\quad m,n\ge2.$$

Доказать, что тогда $g=u_m+G(x,u,\dots,u_{m-1})$, с точностью до числового множителя.

(Напомним, что $[f,g]:=\nabla_f(g)-\nabla_g(f)=g_*(f)-f_*(g)$.)

***Доказательство.*** Для краткости обозначим $\partial_i(f)=f_i$, $\partial_i(g)=g_i$. Докажем более общее равенство

$$(f_n)^{1/n}=\mathrm{const}(g_m)^{1/m}.$$

В равенстве $f_*(g)=g_*(f)$ будем обозначать $o(u_{n+m-1})$ члены, которые не зависят от $u_{m+n}$ и $u_{m+n-1}$:

$$f_nD^n(g)+f_{n-1}D^{n-1}(g)=g_mD^m(f)+g_{m-1}D^{m-1}(f)+o(u_{n+m-1})$$

(в остальных слагаемых $u_{m+n}$ и $u_{m+n-1}$ заведомо нет, так как $D$ повышает порядок на 1).

При этом $D^{n-1}(g) = g_m u_{m+n-1} + o(u_{n+m-1})$ и

$$\begin{aligned}
D^n(g) &= D^{n-1}(g_m u_{m+1} + g_{m-1}u_m + \dots + g_0 u_1 + g_x) \\
&= g_{m,m}u_{n+m-1}u_{m+1} + (n-1)D(g_m)u_{n+m-1} + g_m u_{n+m} \\
&\qquad + g_{m-1,m}u_{n+m-1}u_m + g_{m-1}u_{n+m-1} + \dots \\
&\qquad + g_{0,m}u_{n+m-1}u_1 + g_{x,m}u_{n+m-1} + o(u_{n+m-1}) \\
&= nD(g_m)u_{n+m-1} + g_m u_{n+m} + g_{m-1}u_{n+m-1} + o(u_{n+m-1}).
\end{aligned}$$

Точно так же для $f$, тогда имеем

$$\begin{aligned}
&f_n(nD(g_m)u_{n+m-1} + g_m u_{n+m} + g_{m-1}u_{n+m-1}) + f_{n-1}g_m u_{m+n-1} \\
&\quad = g_m(mD(f_n)u_{n+m-1} + f_n u_{n+m} + f_{n-1}u_{n+m-1}) + g_{m-1}f_n u_{m+n-1}.
\end{aligned}$$

После сокращений, получаем

$$nf_nD(g_m) = mg_mD(f_n) \quad \Rightarrow \quad \frac{D(g_m)}{mg_m} = \frac{D(f_n)}{nf_n} \quad \Rightarrow$$

$$(f_n)^{1/n} = \mathrm{const}(g_m)^{1/m}.$$

**6.4** Докажите тождества ($y_i \ne y_j$ при $i \ne j$)

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^k}{\prod\limits_{s\ne j}(y_j - y_s)} = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, n-2, \\ 1 & k = n-1, \\ Y = y_1 + \dots + y_n & k = n. \end{cases}$$

***Доказательство.*** Одно из возможных решений основано на теории вычетов. Напомним, что если $f(z) = g(z)/h(z)$, где $g(z)$ и $h(z)$ аналитичны при $z = a$ и $h(z)$ имеет простой нуль в $z = a$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Отсюда следует, что слагаемое в $S_k$ можно интерпретировать как вычет в точке $z = y_j$ рациональной функции

$$f(z) = \frac{z^k}{P(z)}, \quad P(z) = (z - y_1) \dots (z - y_n).$$

Также используем свойство, что сумма вычетов по всем особым точкам, включая $z=\infty$, равна 0. Тогда

$$S_k=\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=y_j}\frac{z^k}{P(z)}=-\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^k}{P(z)}=c_{-1},$$

где $c_{-1}$ — коэффициент в ряде Лорана $f(z)=\sum c_jz^j$ в окрестности $z=\infty$.

Строим разложение:

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z^k}{P(z)}=\frac{z^k}{z^n-Yz^{n-1}+\dots}=\frac{z^k}{z^n}\left(1+\frac{Y}{z}+\dots\right)\\&=z^{k-n}+Yz^{k-n-1}+\dots.\end{aligned}$$

В зависимости от $k$ имеем

$$\begin{aligned}k\le n-2:&\quad c_{-1}=0,\\k=n-1:&\quad c_{-1}=1,\\k=n:&\quad c_{-1}=Y.\end{aligned}$$

***Замечание 1.*** На самом деле и вычеты не нужны. Рассмотрим разложение $1/P(z)$ на простые дроби, методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(z-y_1)\dots(z-y_n)} = \frac{a_1}{z-y_1} + \dots + \frac{a_n}{z-y_n} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{s\ne j}(z-y_s).$$

Полагая $z = y_j$, находим $a_j$ и получаем тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod_{s\ne j}(y_j-y_s)} \cdot \frac{1}{z-y_j} = \frac{1}{z^n - Yz^{n-1} + \dots}$$

Раскладываем обе части по $z^{-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod_{s\ne j}(y_j-y_s)} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{y_j}{z} + \frac{y_j^2}{z^2} + \dots\right) = \frac{1}{z^n}\left(1 + \frac{Y}{z} + \dots\right)$$

и сравниваем коэффициенты при $z^{-1}, \dots, z^{-1-n}$.

***Замечание 2.*** Суммы $S_k$ при $k > n$ также определяются разложением $1/P(z)$. Все они выражаются через элементарные симметрические многочлены от $y_1, \dots, y_n$:

$$\frac{1}{z} \cdot \left( S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n}$$

(где $\sigma_1 = Y$). Получается рекуррентное соотношение

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} - \dots - (-1)^n \sigma_n S_{k-n},$$

с начальными условиями $S_0 = \dots = S_{n-2} = 0$, $S_{n-1} = 1$.