

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 9 · 1 апреля 2024

Цепочка Вольтерры

VL (Volterra lattice)

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad u_n = u_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Непрерывный предел к КдФ
- Численные эксперименты
- Дискретное преобразование Миуры
- Законы сохранения и симметрии
- VL как преобразование Бэклунда
- Преобразование Бэклунда для VL

Вольтерра применял, для описания динамики биологических популяций, системы более общего вида:

$$\dot{u}_n = u_n \sum_{k=1}^N a_{nk} u_k, \quad n = 1, \dots, N.$$

Знаки коэффициентов a_{nk} отвечают за то, кто кем питается (знаменитая модель «хищники-жертвы»). Цепочка VL это очень специальный случай, отвечающий ситуации, когда у каждого вида имеется ровно один источник пищи, причем все коэффициенты усвояемости одинаковые. Конечно, в природе такое трудно представить.

Аналогичные системы применяются в химической кинетике (в этом случае u_n — концентрация одного из реагентов). В общем случае, при произвольных коэффициентах, это неинтегрируемая система.

- V. Volterra. Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1931.

В конце 60-х цепочка VL была выведена при описании ионных волн в плазме. Её интегрируемость, в смысле теории солитонов, была обнаружена в начале 70-х. С тех пор она является одной из наиболее популярных интегрируемых моделей.

- V.E. Zakharov, S.L. Musher, A.M. Rubenchik. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме. *JETP Lett.* **19:5** (1974) 249–253.
- С.В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах *JETP* **67** (1974) 543–555.
- М. Кас, P. van Moerbeke. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices. *Adv. in Math.* **16:2** (1975) 160–169.
- М. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.* **20** (1967) 431–436.

Некоторые другие интегрируемые эволюционные цепочки:
модифицированная VL

$$\dot{v}_n = v_n(v_n - \alpha)(v_{n+1} - v_{n-1}),$$

цепочка Тоды

$$\ddot{q}_n = e^{q_{n+1} - q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}.$$

Число соседних переменных в уравнении служит аналогом порядка по производным.

Интересным отличием от непрерывного случая является то, что некоторые цепочки допускают интегрируемые обобщения с любым числом соседей. Типичный пример — цепочки Богдавленского (иногда их называют «голодные цепочки Вольтерры»), где $k \geq 1$ — произвольное целое:

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+k} + \dots + u_{n+1} - u_{n-1} - \dots - u_{n-k}),$$

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+k} \dots u_{n+1} - u_{n-1} \dots u_{n-k}),$$

$$\dot{u}_n = u_n(u_n - \alpha)(u_{n+k} \dots u_{n+1} - u_{n-1} \dots u_{n-k})$$

(причем все они в непрерывном пределе дают КдФ, при любом k).

- O.I. Bogoyavlensky. Integrable discretizations of the KdV equation. *Phys. Lett. A* **134:1** (1988) 34–38.

Непрерывный предел VL к КдФ

Переменная n может служить аналогом непрерывного x . Зададим начальные данные плавной кривой. Для простоты программирования, замкнем решетку с большим периодом.

Получается система ОДУ большой размерности, но простой структуры. Она легко решается численно стандартными солверами.

Решение похоже на эксперимент Забуски–Краскала (лекция 1). Число солитонов зависит от начальной кривой, они распространяются с разной скоростью и, благодаря периодическому замыканию, всё время догоняют друг друга. Строго говоря, это не «чистое» многосолитонное решение, но достаточно хорошее приближение к нему.

Покажем, что VL допускает непрерывный предел к КдФ. Положим

$$u_n(t) = a + bh^2U(X, T), \quad X = nh + cht, \quad T = dh^3t, \quad (1)$$

где U — гладкая функция, h — шаг по решетке (малый параметр), a, b, c, d — некоторые константы, которые нужно подобрать. Тогда

$$\dot{u}_n = bh^3(cU_X + dh^2U_T),$$

$$u_{n\pm 1} = a + bh^2\left(U \pm hU_X + \frac{h^2}{2}U_{XX} \pm \frac{h^3}{6}U_{XXX} + \frac{h^4}{24}U_{XXXX} + O(h^5)\right).$$

Подставляя в уравнение и сокращая на bh^3 , получим

$$\begin{aligned} cU_X + dh^2U_T &= (a + bh^2U)\left(2U_X + \frac{h^2}{3}U_{XXX} + O(h^4)\right) \\ &= 2aU_X + \frac{h^2}{3}(aU_{XXX} + 6bUU_X) + O(h^4). \end{aligned}$$

При $c = 2a$, $d = a/3$, $b = a$ получается КдФ с точностью до $O(h^2)$.

Таким образом, цепочка Вольтерры служит дискретизацией КдФ. Однако, этим её содержание не исчерпывается. В отличие от неинтегрируемой схемы Забуски–Краскала, цепочка Вольтерры — самостоятельное интегрируемое уравнение. У неё есть всё, что положено:

- законы сохранения,
- высшие симметрии,
- представление Лакса,
- точные многосолитонные и конечнозонные решения.

Вообще, абсолютно все конструкции, которые мы изучили на примере КдФ, работают и здесь, *mutatis mutandis*.

В то же время, есть и отличия.

Например, заметим, что VL допускает стационарное решение вида $u_{2n} = a$, $u_{2n+1} = b$ с разными постоянными a и b . Если немного возмутить его, отдельно для чётных и нечётных переменных, то эти переменные так и останутся разделёнными. В КдФ такое невозможно.

ДЗ: подобрать непрерывный предел, отвечающий такому режиму

Преобразование типа Миуры

Утверждение 1. Пусть f_n — решение модифицированной цепочки Вольтерры (mVL)

$$\dot{f}_n = f_n(f_n - \alpha)(f_{n+1} - f_{n-1}). \quad (2)$$

Тогда каждая из следующих переменных удовлетворяет VL:

$$u_n = f_n(f_{n+1} - \alpha), \quad \tilde{u}_n = (f_n - \alpha)f_{n+1}. \quad (3)$$

Замену можно линеаризовать. Положим $f_n = \phi_n/\phi_{n-1}$ и подставим в первое уравнение (3):

$$u_n = \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \cdot \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \alpha \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \phi_{n+1} = \alpha\phi_n + u_n\phi_{n-1}.$$

Эта же замена приводит и саму цепочку (2) к линейному уравнению на ϕ . Заметим, что логарифмическая производная f_n — полная разность:

$$\frac{\dot{f}_n}{f_n} = (f_n - \alpha)(f_{n+1} - f_{n-1}) = (T - 1)(f_{n-1}f_n - \alpha f_n - \alpha f_{n-1}),$$

где $T : n \mapsto n + 1$ — оператор сдвига по решётке.

Замечание. Операторы полной разности и сдвига

$$\Delta = T - 1, \quad T : u_n \mapsto u_{n+1}$$

играют для цепочек ту же роль, что производная D_x в непрерывном случае. Действие T заключается просто в прибавлении 1 ко всем индексам в выражении, например,

$$T(u_n^2 u_{n-1} + 2u_n^3) = u_{n+1}^2 u_n + 2u_{n+1}^3.$$

С другой стороны, так как

$$\frac{\dot{f}_n}{f_n} = (T - 1) \left(\frac{\phi_{n-1,t}}{\phi_{n-1}} \right),$$

то имеем

$$\frac{\phi_{n,t}}{\phi_n} = f_n f_{n+1} - \alpha f_{n+1} - \alpha f_n + C = u_n - \alpha f_{n+1} + C = u_n - \alpha \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} + C,$$

где C — произвольная константа (ядро оператора $T - 1$).

В результате, пришли к паре линейных уравнений

$$\phi_{n+1} = \alpha \phi_n + u_n \phi_{n-1}, \quad \phi_{n,t} = (u_n + C) \phi_n - \alpha \phi_{n+1}.$$

Первое из них — дискретный аналог уравнения Шредингера, со спектральным параметром α . Второе задаёт эволюцию по t . Можно проверить, что условие совместности этой пары в точности эквивалентно VL. Константу можно выбирать произвольно, с учетом калибровочных замен $\phi_n \rightarrow \gamma^n e^{\delta t} \phi_n$. Для дальнейшего, примем следующую калибровку.

Утверждение 2. VL эквивалентна условию совместности линейных уравнений

$$\psi_{n+1} + u_n \psi_{n-1} = \lambda \psi_n, \quad \psi_{n,t} = \left(\frac{\lambda^2}{2} + u_n - 1 \right) \psi_n - \lambda u_n \psi_{n-1}, \quad (4)$$

Эти уравнения можно записать также в виде дискретного представления нулевой кривизны:

$$\Psi_{n+1} = L_n \Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = U_n \Psi_n \quad \Rightarrow \quad L_{n,t} = U_{n+1} L_n - L_n U_n,$$

где

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_{n-1} \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_n & \lambda \end{pmatrix},$$

$$U_n = \begin{pmatrix} -\lambda^2/2 + u_{n-1} - 1 & \lambda \\ -\lambda u_n & \lambda^2/2 + u_n - 1 \end{pmatrix}.$$

Законы сохранения

Для эволюционных цепочек, закон сохранения определяется, по аналогии с непрерывным случаем, как пара функций ρ и σ таких, что выполняется соотношение

$$D_t(\rho) = \Delta(\sigma) = (T - 1)(\sigma).$$

Роль сохраняющегося функционала $\int_{\mathbb{R}} \rho dx$ переходит к сумме

$$S[\rho] = \sum_j T^j(\rho)$$

по всем $j \in \mathbb{Z}$, что имеет смысл, если ряд сходится. Для этого, конечно, нужно следить за граничными условиями. Например, если ρ это многочлен, то можно потребовать условия быстрого убывания u_n .

Годится также периодическое замыкание $u_{n+N} = u_n$, в этом случае сумма берется по периоду $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. В обоих случаях, при дифференцировании получаем 0 в силу телескопического сокращения правой части:

$$D_t(S[\rho]) = \sum_j (T^{j+1}(\sigma) - T^j(\sigma)) = 0.$$

Для VL легко увидеть пару з.с.:

$$\begin{aligned}D_t(\log u_n) &= u_{n+1} - u_{n-1} = (T - T^{-1})(u_n) = (T - 1)(1 + T^{-1})(u_n) \\ &= (T - 1)(u_n + u_{n-1}), \\ D_t(u_n) &= u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = (T - 1)(u_{n+1}u_n).\end{aligned}$$

Заметим, что, как мы видели из численных экспериментов, для VL естественные граничные условия (на бесконечном интервале) это

$$u_n \rightarrow c \neq 0, \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

поэтому, для сходимости, плотности следует регуляризовать:

$$\rho_0 = \log(u_n/c), \quad \rho_1 = u_n - c.$$

При формальных вычислениях это не существенно.

Утверждение 3. VL обладает бесконечной последовательностью з.с..

Для доказательства применим тот же трюк, что и для КдФ: обращение преобразования Миуры. Заменим α на спектральный параметр z и построим решение уравнения

$$u_n = f_n(f_{n+1} - z)$$

в виде ряда

$$f_n = -\frac{u_n}{z}(1 + F_n), \quad F_n = \frac{F_n^{(1)}}{z^2} + \frac{F_n^{(2)}}{z^4} + \dots$$

Имеем

$$1 = \left(1 + \frac{F_n^{(1)}}{z^2} + \frac{F_n^{(2)}}{z^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{u_{n+1}}{z^2} + \frac{u_{n+1}F_{n+1}^{(1)}}{z^4} + \frac{u_{n+1}F_{n+1}^{(2)}}{z^6} + \dots\right),$$

откуда получаем рекуррентные соотношения

$$F_n^{(0)} := 1, \quad F_n^{(k)} = -u_{n+1}(F_n^{(0)}F_{n+1}^{(k-1)} + \dots + F_n^{(k-1)}F_{n+1}^{(0)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

В результате, получаем последовательность многочленов

$$F_n^{(k)} = F^{(k)}(u_{n+1}, \dots, u_{n+k}).$$

В случае КдФ это уже давало ответ, так как там переменная f была плотностью закона сохранения для мКдФ $f_t = (f_{xx} - 2f^3 + 6\alpha f)_x$.

Для mVL плотностью является не сама f_n , а логарифм от нее (как мы уже видели при линеаризации):

$$\frac{\dot{f}_n}{f_n} = (f_n - z)(f_{n+1} - f_{n-1}) = (T - 1)(f_{n-1}f_n - zf_n - zf_{n-1}).$$

Поэтому, нужно сделать ещё дополнительное перерасложение:

$$\begin{aligned} & \log f_n + \log(-z) - \log u_n = \log(1 + F_n) \\ & = F_n - \frac{F_n^2}{2} + \frac{F_n^3}{3} - \frac{F_n^4}{4} + \dots = -\frac{T(\rho^{(1)})}{z^2} + \frac{T(\rho^{(2)})}{z^4} - \frac{T(\rho^{(3)})}{z^6} + \dots \end{aligned}$$

В результате, получаем плотности

$$\rho^{(0)} = \log u_n,$$

$$\rho^{(1)} = u_n,$$

$$\rho^{(2)} = u_{n+1}u_n + \frac{1}{2}u_n^2,$$

$$\rho^{(3)} = u_{n+2}u_{n+1}u_n + u_{n+1}^2u_n + u_{n+1}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3, \quad \dots$$

Утверждение 4. VL обладает бесконечной последовательностью высших симметрий.

Полное доказательство пропустим. Схема такая же, как в непрерывном случае: симметрии выводятся из представления нулевой кривизны с матрицей U_n , полиномиальной по λ . Все коэффициенты рекуррентно вычисляются. В результате возникает оператор рекурсии

$$R = u_n + u_n(u_{n+1}T^2 - u_{n-1}T^{-1})(T - 1)^{-1} \frac{1}{u_n},$$

который позволяет строить симметрии по формуле

$$u_{n,t_{j+1}} = R(u_{n,t_j}),$$

начиная с $u_{n,t_1} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$. Простейшая симметрия имеет вид

$$u_{n,t_2} = u_n(T - T^{-1})(u_n h_n^{(2)}), \quad h_n^{(2)} = u_{n+1} + u_n + u_{n-1}.$$

Можно доказать, что и остальные симметрии имеют такую же структуру:

$$u_{n,t_j} = u_n(T - T^{-1})(u_n h_n^{(j)}),$$

где $h_n^{(j)}$ — многочлен от $u_{n-j+1}, \dots, u_{n+j-1}$, причем оказывается, что он выражается через вариационную производную плотности з.с.:

$$h_n^{(j)} = \frac{\delta \rho^{(j)}}{\delta u_n} = \sum_k T^k \left(\frac{\partial \rho^{(j)}}{\partial u_{n-k}} \right).$$

Аналогичное свойство для КдФ выглядело так:

$$u_{t_j} = D_x \left(\frac{\delta \rho^{(j)}}{\delta u} \right),$$

где вариационная производная (или оператор Эйлера) определяется равенством

$$\frac{\delta f}{\delta u} = \sum_k (-D_x)^k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \right).$$

Многосолитонное решение

Опишем кратко дискретный аналог конструкции потенциалов Баргманна (см. Лекцию 3). Стартуем с линейных уравнений

$$\psi_{n+1} + u_n \psi_{n-1} = \lambda \psi_n, \quad \psi_{n,t} = \left(\frac{\lambda^2}{2} + u_n - 1 \right) \psi_n - \lambda u_n \psi_{n-1}$$

и считаем, что

$$\lambda = z + z^{-1}, \quad u_n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

При $u_n \equiv 1$ имеется пара линейно независимых решений

$$\psi_n(t, z) = z^{-n} \exp\left(\frac{z^{-2} - z^2}{2}t\right) \quad \text{и} \quad \psi_n(t, z^{-1}) = z^n \exp\left(\frac{z^2 - z^{-2}}{2}t\right).$$

В общем случае определяем решение (функцию Бейкера–Ахиезера) умножая это затравочное решение на ряд по z^2 (то есть, строим квазиклассическое приближение внутри круга $|z| < 1$):

$$\psi_n(t, z) = z^{-n} \exp\left(\frac{z^{-2} - z^2}{2}t\right) P_n(t, z),$$
$$P_n(t, z) = 1 + p_n^{(1)} z^2 + \dots + p_n^{(N)} z^{2N} + \dots$$

Этот ряд удовлетворяет уравнениям

$$P_{n+1} - P_n = z^2(P_n - u_n P_{n-1}),$$

то есть, коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам

$$(T - 1)p_n^{(1)} = 1 - u_n, \quad (T - 1)p_n^{(k)} = (1 - u_n T^{-1})p_n^{(k-1)}.$$

Отсюда видно, что возможен полиномиальный обрыв $p_n^{(k)} = 0$ при $k > N$.

Рассмотрим «вронскиан» пары произвольных пси-функций

$$w_n(t, z) = g_n(\psi_{n+1}\tilde{\psi}_n - \psi_n\tilde{\psi}_{n+1}),$$

где g_n — не зависящий от z калибровочный множитель, такой, что $u_n = g_{n-1}/g_n$. Можно проверить, что w_n — постоянная:

$$w_{n+1} = w_n, \quad D_t(w_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_n(t, z) = w(z).$$

В качестве второго решения примем $\tilde{\psi}_n = \psi_n(z^{-1})$. Тогда

$$w(z) = -w(z^{-1}) = \text{const}(z - z^{-1}) \prod_{j=1}^N (1 - \alpha_j z^2)(1 - \alpha_j z^{-2}).$$

В точках $z = \sqrt{\alpha_j}$ функции ψ_n и $\tilde{\psi}_n$ линейно зависимы, причём коэффициенты пропорциональности не зависят от t , согласно соотношению

$$\psi_{n,t}\tilde{\psi}_n - \psi_n\tilde{\psi}_{n,t} = (z + z^{-1})f_n w_n \quad \Rightarrow \quad D_t \left(\frac{\tilde{\psi}_n}{\psi_n} \right) \Big|_{z=\alpha_j} = 0.$$

В результате, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha_j^{-1} - \alpha_j)t} (1 + p_n^{(1)}\alpha_j + \dots + p_n^{(N)}\alpha_j^N) = \\ & = (-1)^{N+1-j} c_j \alpha_j^n (1 + p_n^{(1)}\alpha_j^{-1} + \dots + p_n^{(N)}\alpha_j^{-N}), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем следующий ответ.

Утверждение 3. VL обладает решениями вида $u_n = 1 - p_{n+1}^{(1)} + p_n^{(1)}$, где

$$p_n^{(1)} = - \det \begin{pmatrix} m_n^{1,0} & m_n^{1,2} & \dots & m_n^{1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n^{N,0} & m_n^{N,2} & \dots & m_n^{N,N} \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} m_n^{1,1} & m_n^{1,2} & \dots & m_n^{1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n^{N,1} & m_n^{N,2} & \dots & m_n^{N,N} \end{pmatrix},$$

$$m_n^{j,k} = \alpha_j^k + (-1)^{N-j} c_j \alpha_j^{n-k} e^{(\alpha_j^{-1} - \alpha_j)t}.$$

Как и в случае КдФ, необходимо уточнять, как выбирать константы, чтобы решение было регулярным. Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1$, тогда нули $z = \sqrt{\alpha_j}$ лежат внутри единичной окружности и отвечают дискретному спектру. Можно показать, подсчитывая числа перемен знака ψ -функций, что регулярным решениям отвечают $c_j > 0$.

СОЛИТОН

В простейшем случае, при $N = 1$ приходим, после переобозначений, к решению

$$u_n(t) = \frac{w_{n-2}w_{n+1}}{w_{n-1}w_n}, \quad w_n = 1 + a^n \exp((a - a^{-1})t + d). \quad (5)$$

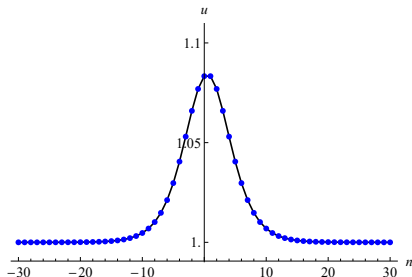
Отметим, что оно имеет вид бегущей волны. Однако, если искать такие решения прямой подстановкой

$$u_n(t) = y(\tau), \quad \tau = t + nh,$$

то на y возникает не ОДУ, а ДУ с *отклоняющимся аргументом*,

$$y'(\tau) = y(\tau)(y(\tau + h) - y(\tau - h)),$$

которое не очень-то ясно, как решать...



Альтернативный способ даёт стационарное уравнение для суммы потоков VL и её следующей симметрии

$$u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})) + Au_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0.$$

Это аналог уравнения Новикова для КдФ. Его порядок понижается до второго (то есть, на трёх соседних точках):

$$F_n = u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1}) + Au_n + B + C(-1)^n = 0.$$

Можно проверить, что дифференцирование этой связи по t даёт тождество, в силу неё самой:

$$\dot{F}_n = u_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = 0.$$

Из условия $u_n \rightarrow 1$ следует, что $A + B + 3 = 0$, $C = 0$.

Можно проверить, что (5) удовлетворяет этой связи, при $B = a + 1 + a^{-1}$.

Преобразование Бэклунда для VL

Как и в случае КдФ, наличие пары преобразований Миуры позволяет построить последовательность преобразований Бэклунда — одевающую цепочку. Теперь это полностью дискретное уравнение:

$$f_n^{j+1}(f_{n+1}^{j+1} - \alpha^{j+1}) = (f_n^j - \alpha^j)f_{n+1}^j.$$

Ее можно использовать для построения N -солитонного решения, по той же схеме, что и в непрерывном случае, стартуя с постоянного затравочного решения.

VL как преобразование Бэклунда

Рассмотрим простейшую высшую симметрию VL. В её правой части содержатся более далёкие соседи по решетке (число соседей играет роль порядка по производным для непрерывных уравнений).

$$u_{n,T} = u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})). \quad (6)$$

Как обычно, это означает, что векторные поля ∂_t и ∂_T коммутируют, что позволяет строить их общее решение $u_n(t, T)$ как функцию от трех переменных, дискретной и двух непрерывных.

Зафиксируем любой номер n и заметим, что все переменные u_{n+k} могут быть явно выражены через две соседние переменные

$$(u, v) = (u_n, u_{n+1})$$

и их производные по t , поскольку VL можно переписать в виде

$$u_{n-1} = u_{n+1} - \frac{u_{n,t}}{u_n}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{u_{n+1,t}}{u_{n+1}}.$$

Заменим, при помощи этих формул, сдвиги на производные в симметрии (6). Тогда для u и v получается эволюционная система

$$u_T = -u_{tt} + (u^2 + 2uv)_t, \quad v_T = v_{tt} + (v^2 + 2uv)_t. \quad (7)$$

Так как n произвольно, этой системе удовлетворяет любая пара соседей, в том числе $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$.

Переход от $(u, v) = (u_n, u_{n+1})$ к $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ задаётся преобразованием

$$\tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = u + \frac{v_t}{v}, \quad (8)$$

переводящим любое решение (с $v \neq 0$) системы (7) в решение этой же системы. Это явная и обратимая дифференциальная подстановка, простейший тип преобразования Бäckлунда.

В этих формулах дискретная переменная интерпретируется не как аналог непрерывной, а просто как номер, счётчик некоторых отображений.

- D. Levi. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* **14:5** (1981) [1083–1098](#).

Домашнее задание

9.1 Выше было численно проиллюстрировано, что VL допускает режим с разделением переменных на чётные и нечётные номера. Пусть $u_{2n} = p_n$, $u_{2n+1} = q_n$, тогда VL переписывается в виде двухкомпонентной цепочки

$$p_{n,t} = p_n(q_n - q_{n-1}), \quad q_{n,t} = q_n(p_{n+1} - p_n).$$

Попробуйте подобрать формулы, аналогичные (1), сводящие эту цепочку в непрерывном пределе к некоторой эволюционной системе на две полевые переменные $P(X, T)$, $Q(X, T)$. (Естественно предположить, что это будет система Леви или какая-то близкая к ней.)

9.2 Цепочка Тоды имеет вид (заменяли здесь t на x)

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}.$$

Проверьте, что она обладает симметрией

$$q_{n,t} = q_{n,x}^2 + e^{q_{n+1}-q_n} + e^{q_n-q_{n-1}},$$

то есть, выполняется тождество $(q_{n,xx})_t = (q_{n,t})_{xx}$.

Покажите, что в силу этих двух цепочек переменные $u = e^{q_n}$ и $v = e^{-q_{n-1}}$ удовлетворяют нелинейному уравнению Шрёдингера

$$u_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2.$$

Перепишите сдвиг $(q_{n-1}, q_n) \mapsto (q_n, q_{n+1})$ в цепочке Тоды как преобразование Бэклунда $(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ для этой системы.

9.3 Проверьте, что следующие формулы определяют связь между цепочкой Тоды и VL (с x вместо t):

$$u_{2n+1} + u_{2n+2} = y_n = q_{n,x}, \quad u_{2n}u_{2n+1} = z_n = e^{q_n - q_{n-1}}.$$

Выпишите уравнения, которым удовлетворяют промежуточные переменные y_n, z_n .

Замечание. В данном примере преобразование устроено по схеме $u \rightarrow (y, z) \leftarrow q$, поэтому соответствие между u и q неявное в обе стороны. Такие преобразования тоже называют преобразованиями Бэклунда, то есть, ПБ может быть и между разными уравнениями, не обязательно между одинаковыми.