В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 8 · 25 марта 2024

Приложения одевающей цепочки

План

- Метод факторизации
  - Условие форм-инвариантности
  - Пример: гармонический осциллятор
- Квазипериодическое замыкание
  - Периодический случай: конечнозонные решения
  - Квазипериодический случай: решения типа Пенлеве, обобщения гармонического осциллятора

Решения одевающей цепочки

На прошлой лекции было показано, что последовательность преобразований Дарбу для стационарного уравнения Шрёдингера

$$\psi'' = (u - \lambda)\psi$$

($\psi' = D(\psi) = d\psi/dx$) определяется одевающей цепочкой

$$f_n' + f_{n+1}' = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}.$$

Её решение можно строить по известным волновым функциям ψ_0^n затравочного потенциала u_0, последовательно определяя

$$f_n = (\log \psi_n^n)', \quad \psi_{n+1}^j = (D - f_n)(\psi_n^j).$$

В частности, если $u_0 = 0$, то это даёт n-солитонные решения КдФ. Можно действовать и наоборот — найти какое-то решение $f_n(x)$ и по нему определить потенциалы и соответствующие ψ-функции

$$u_n = f_n^2 + f_n' + \alpha_n, \quad \psi_n^n = e^{\int f_n \, dx}.$$

Мы разберём два сюжета, связанных с этой идеей.

- ***Метод факторизации*** («суперсимметричная квантовая механика»). Этот метод использовался для построения точно-решаемых потенциалов ещё до открытия солитонов.
  - E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940/1941) 9–16 [Э. Шредингер. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976]; Further studies on solving eigenvalue problems by factorization. *Proc. Roy. Irish Acad.* **A 46** (1940/1941) 183–206; The factorization of hypergeometric equation. *Proc. Roy. Irish Acad.* **A 47** (1941/1942) 53–54.
  - L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) 21–68 [Сб. переводов “Математика” **10:3** (1966) 39].

Основная идея: потенциалы u_n должны быть «примерно» одинаковыми (shape invariance), то есть, преобразование Дарбу должно только менять параметры. Оказывается, есть решения вида

$$f_n(x) = (n-c)F(x) + G(x) + H(x)/(n-c), \tag{1}$$

где F, G, H некоторые фиксированные функции, которые легко находятся. При этом ψ-функции выражаются через классические спецфункции (Эрмита, Лагерра и т.д.). Простейший пример — гармонический осциллятор.

• *Квазипериодическое замыкание*

- А.П. Веселов, А.Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера. *Функц. анализ* **27:2** (1993) 1–21.

Основная идея: положим

$$f_{n+N} = f_n, \quad \alpha_{n+N} = \alpha_n + 2c, \tag{2}$$

тогда цепочка превратится в систему ОДУ, по решению которой восстанавливается потенциал и волновые функции, отвечающие значениям $\alpha_n + 2ck$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При $c = 0$ получаются конечнозонные потенциалы. При $c \neq 0$ — трансцендентные обобщения гармонического осциллятора, в частности, при $N = 3$ и 4 задача сводится к уравнениям Пенлеве P_4 и P_5.

Замечание. За исключением случая строгой периодичности, который сводится к уравнениям Новикова, оба условия замыкания (1) и (2) *несовместны* с динамикой по t, определяемой КдФ. То есть, производная по t от этих условий не обращается тождественно в 0. Поэтому для построения решений КдФ эти замыкания не годятся.

Метод факторизации

Ранее мы предполагали, что для u_0 известно много частных решений φ_0^n при $\lambda=\alpha_n$ и строили последовательность ПД по такой схеме:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & u_0 & \longrightarrow & u_1 & \longrightarrow & u_2 & \longrightarrow & u_3 & \dots \\
\hline
\alpha_0 & \varphi_0^0 & \xrightarrow{A_0} & 0 & & & & & \\
\alpha_1 & \varphi_0^1 & \xrightarrow{A_0} & \varphi_1^1 & \xrightarrow{A_1} & 0 & & & \\
\alpha_2 & \varphi_0^2 & \xrightarrow{A_0} & \varphi_1^2 & \xrightarrow{A_1} & \varphi_2^2 & \xrightarrow{A_2} & 0 & \\
 & & & \dots & \dots & \dots & & &
\end{array}
$$

$$A_n = D - f_n$$

$$f_n = \frac{(\varphi_n^n)'}{\varphi_n^n}$$

По построению, возникающая последовательность f_n удовлетворяет одевающей цепочке

$$f_n' + f_{n+1}' = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1},$$

а $\varphi_n^n, \varphi_n^{n+1}, \varphi_n^{n+2}, \dots$ служат в.ф. для потенциалов

$$u_n = f_n^2 + f_n' + \alpha_n,$$

Теперь предположим, что у нас есть последовательность функций f_n, удовлетворяющая ОЦ. Тогда мы можем по ним определить φ_n^n и найти функции φ_0^n пользуясь обратными ПД:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & u_0 & \longleftarrow & u_1 & \longleftarrow & u_2 & \longleftarrow & u_3 \quad \dots \\
\hline
\alpha_0 & \varphi_0^0 & & & & & & \\
\alpha_1 & \varphi_0^1 & \xleftarrow{A_0^\dagger} & \varphi_1^1 & & & & \\
\alpha_2 & \varphi_0^2 & \xleftarrow{A_0^\dagger} & \varphi_1^2 & \xleftarrow{A_1^\dagger} & \varphi_2^2 & & \\
 & & & \dots & \dots & \dots & &
\end{array}
$$

$$A_n^\dagger = -D - f_n$$

$$\varphi_n^n = \exp\Big(\int_{x_0}^x f_n\,dx\Big)$$

В результате, мы получим потенциал u_0, для которого известны частные волновые функции при всех $\lambda = \alpha_n$.

Допустим, что f_n не имеет особенностей, а функция

$$\varphi_n^n = \exp\left(\int_{x_0}^x f_n\,dx\right)$$

суммируема с квадратом. Тогда φ_n^n определяет основное состояние для L_n (так как не имеет нулей). Оператор $A_{n-1}^\dagger$ переводит ее в с.ф. оператора L_{n-1} при этом же значении λ, которое для L_{n-1} является уже вторым, и так далее.

Для потенциала u_0 получаем собственные функции

$$\varphi_0^n = A_0^\dagger A_1^\dagger \cdots A_{n-1}^\dagger \varphi_n^n \tag{3}$$

для n-го собственного значения α_n. Поэтому, $A_n^\dagger$ называют операторами рождения или повышающими операторами, A_n — операторами уничтожения или понижающими.

Многие точно-решаемые квантовомеханические задачи открытые в 1920–30 вкладываются в эту схему.

Гармонический осциллятор

Одевающая цепочка

$$f'_n + f'_{n+1} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}$$

имеет очевидное решение

$$f_n = -cx, \quad \alpha_n = 2cn + \alpha_0.$$

Для него имеем

$$u_n = f_n^2 + f'_n + \alpha_n = c^2x^2 + c(2n-1) + \alpha_0,$$
$$\varphi_n^n = \exp\Big(\int_{x_0}^x f_n\,dx\Big) \propto e^{-cx^2/2}.$$

Пусть $c > 0$, тогда φ_n^n — собственная функция без нулей, то есть, основное состояние.

Случай $c < 0$, на самом деле, не сильно отличается, просто вместо собственной функции имеем дополнительную растущую. Но, удобнее работать с собственными. Примем $c = 1$.

Все f_n и операторы A_n, $A_n^\dagger$ одинаковы:

$$f_n = -x, \quad A_n = A = D + x, \quad A_n^\dagger = A^\dagger = -D + x, \quad \varphi_n^n = e^{-x^2/2},$$

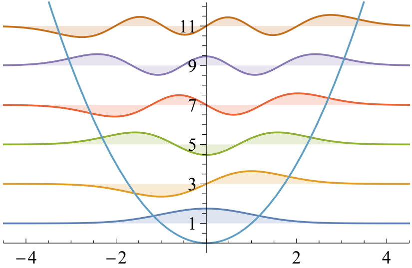
$$\alpha_n = 2n + 1, \quad u_n = x^2 + 2n.$$

Следовательно, с.ф. и с.з. для u_0 находятся совсем просто (то, что ничего не пропущено, обосновывается подсчётом числа нулей):

$$\varphi_0^n = (x - D)^n (e^{-x^2/2}) = H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad \alpha_n = 2n + 1,$$

где H_n — полиномы Эрмита

$$H_0 = 1,$$
$$H_1 = 2x,$$
$$H_3 = 2(2x^2 - 1),$$
$$H_4 = 4x(2x^2 - 3),$$
$$H_5 = 4(4x^3 - 12x^2 + 3), \quad \dots$$



(на графике функции нормированы).

Замыкание по Инфельду и Халлу (1951)

Условие форм-инвариантности: пусть все f_n имеют вид (1)

$$f_n(x) = (n-c)F(x) + G(x) + H(x)/(n-c),$$

с какими-то функциями F, G, H, которые нужно уточнить.

Для краткости обозначим $m = n - c$. Подстановка в цепочку даёт

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = (2m+1)(F' + F^2) + 2(G' + FG) + \left(\frac{2}{m+1} - \frac{2}{m}\right) GH + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m}\right) H' + \left(\frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{m^2}\right) H^2.$$

Так как α_n не зависит от x, а функции от m в правой части линейно независимы, то коэффициенты при них должны быть постоянными. На F, G, H получается система

$$F' + F^2 = c_1, \quad G' + FG = c_2, \quad GH = c_3, \quad H^2 = c_4,$$

где c_i — постоянные.

В зависимости от выбора c_i, имеется несколько типов решений. Все они выражаются через элементарные функции.

Параметры α_n и потенциалы u_n имеют вид $(m = n - c)$

$$-\alpha_n = c_1 m^2 + 2c_2 m + 2c_3/m + c_4/m^2,$$
$$u_n = -m(m-1)F' - (2m-1)G' + G^2 + 2FH.$$

Потенциалы получаются не обязательно регулярными на всей оси x, среди них есть и полюсные, что отвечает потенциальным ямам на полуоси или на отрезке.

Значения α_n определяют «алгебраический» спектр, в том смысле, что соответствующие волновые функции находятся явно, в квадратурах. Но, перебор случаев показывает, что при правильном выборе констант они отвечают также и за физический спектр, то есть, это те значения, для которых волновые функции суммируемы. Конструкция оказывается вполне содержательной с точки зрения квантовой механики.

Упрощённая классификация по Инфельду и Халлу ($m = n - c$):

	f_n	α_n	u_n
(A)	$\dfrac{d}{\sin(ax+b)}$ $+am\cot(ax+b)$	a^2m^2	$\dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}(a^2m(m-1)+d^2$ $+ad(2m-1)\cos(ax+b))$
(B)	$-e^x - m$	$-m^2$	$e^{2x} - (2m-1)e^x$
(C)	$m/x + dx$	$-d(4m+1)$	$m(m-1)/x^2 - 2dm + d^2x^2$
(D)	$-x$	$2n+1$	$x^2 + 2n$
(E)	$am\cot(ax+b) + d/m$	$a^2m^2 - d^2/m^2$	$m(m-1)\dfrac{a^2}{\sin^2(ax+b)}$ $+2ad\cot(ax+b)$
(F)	$m/x + d/m$	$-d^2/m^2$	$m(m-1)/x^2 + 2d/x$

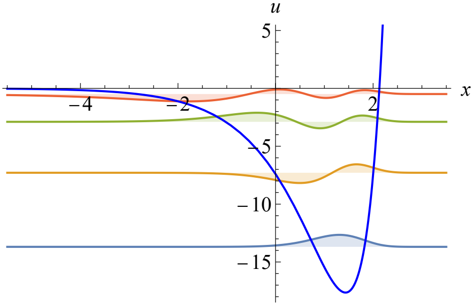
(A) потенциалы Пёшля–Теллера
(B) потенциал Морзе
(C) гармонический осциллятор на полуоси
(D) гармонический осциллятор (его мы разобрали)
(E) потенциалы Маннинга–Розена
(F) задача Кеплера

В случаях (A) и (E) есть также варианты с гиперболическими функциями.

Также следует учесть, что кроме целочисленного параметра n, определяющего энергетические уровни α_n, в этих решениях возможно ещё квантование некоторых других параметров входящих в потенциалы, так что картина более богатая, чем кажется на первый взгляд. В [Infeld & Hull, 1951] можно найти детальный анализ.

Потенциал Морзе при $c = 3.7$

Здесь $f_n = c - n - e^x$ и функции $\varphi_n^n = \exp((c-n)x - e^x)$ нормируемы при $n < \lfloor c \rfloor$. Следовательно, для потенциала $u_0 = e^{2x} - 8.4e^x$ имеется четыре собственных значения $-(c-n)^2$ при $n = 0, 1, 2, 3$. Собственные функции строятся по общей формуле (3).



Квазипериодическое замыкание

Для гармонического осциллятора условие форм-инвариантности особенно просто: $f_{n+1}=f_n$. Это легко обобщить в другом направлении, не добавляя зависимость от n как в (1), но увеличивая период [Веселов & Шабат, 1993]:

$$f_{n+N}=f_n.$$

Уравнение цепочки при сдвиге на N должно перейти в себя, что даёт

$$f'_n+f'_{n+1}-f_n^2+f_{n+1}^2=\alpha_n-\alpha_{n+1}=\alpha_{n+N}-\alpha_{n+N+1}.$$

Отсюда следует, что параметры должны удовлетворять условию

$$\alpha_{N+n}=\alpha_n+2c.$$

Будем называть случай $c=0$ периодическим и $c\neq 0$ квазипериодическим.

Кроме того, свойства замыкания зависят от чётности N.

Одевающая цепочка сводится к системе на переменные $f_1, \dots, f_N$:

$$\begin{cases} f_1' + f_2' = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_1 - \alpha_2, \\ f_2' + f_3' = f_2^2 - f_3^2 + \alpha_2 - \alpha_3, \\ \qquad \dots \\ f_N' + f_1' = f_N^2 - f_1^2 + \alpha_N - \alpha_{N+1}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_{N+1} = \alpha_1 + 2c$.

Если N нечётно, то матрица при производных невырождена и система легко приводится к нормальному виду.

Если N чётно, то матрица вырождена. Однако, если сложить уравнения, чередуя знаки, то появляется дополнительная связь

$$f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 - \dots - f_N^2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_N + c = 0, \tag{5}$$

что позволяет выписать систему на $N-1$ переменную.

При любом N есть первый интеграл

$$J = f_1 + \dots + f_N + cx, \quad J' = 0. \tag{6}$$

Периодический случай

Как мы помним, одевающая цепочка эквивалентна матричному уравнению нулевой кривизны

$$F_n' = U_{n+1}F_n - F_nU_n, \quad U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} -f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & -f_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, при любом k,

$$(F_{n+k} \cdots F_n)' = U_{n+k-1}F_{n+k} \cdots F_n - F_{n+k} \cdots F_nU_n.$$

В периодическом случае имеем

$$u_{n+N} = f_{n+N}^2 + f_{n+N}' + \alpha_{n+N} = f_n^2 + f_n' + \alpha_n = u_n,$$

следовательно $U_{n+N} = U_n$ и выполняется уравнение Лакса

$$M_n' = [U_n, M_n], \quad M_n = F_{n+N-1} \cdots F_n,$$

с полиномиальной по λ матрицей M_n.

Это в точности совпадает с уравнением Лакса для стационарных высших симметрий КдФ (= для уравнений Новикова)

$$U_T = V_x + [V, U] \quad \xrightarrow{\partial_T = 0} \quad V_x = [U, V].$$

В лекции 4 было показано, что V имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} -A' & 2A \\ -A'' + 2A(u-\lambda) & A' \end{pmatrix},$$

где A многочлен от λ, коэффициенты которого — дифференциальные многочлены от u.

Так как M_n полиномиальна по λ, она фактически совпадает с V, просто сейчас мы имеем эту матрицу в факторизованном виде. Несложно показать, что при $N = 2m+1$ и $N = 2m+2$ степень A равна m. Определитель M_n — первый интеграл (вместо u пишем u_n)

$$2AA'' - (A')^2 - 4(u_n - \lambda)A^2 = C(\lambda),$$

и на нули A выписывается система уравнений Дубровина порядка m. Она совместна с динамикой по t в силу КдФ и интегрируется в квадратурах.

Итак, периодическое замыкание сводится к m-зонным потенциалам.

Квазипериодический случай

При $c \neq 0$ представление Лакса портится, так как $U_{n+N} \neq U_n$. Определитель $\det M_n$ уже не является первым интегралом. Вообще, можно убедиться, что выживает лишь один первый интеграл (6)

$$J = f_1 + \dots + f_N + cx.$$

В результате, система для f_n становится неинтегрируемой. Также, теряется совместность с уравнением КдФ. Тем не менее, f_n — это некоторые конкретные функции, их можно найти хотя бы численно, и по ним дальше строить потенциалы и собственные функции, как обычно.

В результате возникает обобщение гармонического осциллятора — потенциал с квадратичным ростом и спектром, состоящим из N арифметических прогрессий

$$\alpha_{kN} = \alpha_0 + 2kc, \quad \alpha_{1+kN} = \alpha_1 + 2kc, \ \dots, \ \alpha_{N-1+kN} = \alpha_{N-1} + 2kc.$$

Пример с $N = 3$

Простейший нетривиальный случай отвечает $N = 3$. Обозначим $y_n = f_n + f_{n+1}$, $\delta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} y_1' = y_1(y_3 - y_2) + \delta_1, \\ y_2' = y_2(y_1 - y_3) + \delta_2, \\ y_3' = y_3(y_2 - y_1) + \delta_3. \end{cases} \tag{7}$$

Примем нормировку $c = 1$,

$$y_1 + y_2 + y_3 = -2x, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2.$$

Отсюда можно исключить y_3:

$$y_1' = -y_1(y_1 + 2y_2 + 2x) + \delta_1, \quad y_2' = y_2(2y_1 + y_2 + 2x) + \delta_2.$$

Из первого уравнения выразим y_2 и подставим во второе, тогда на функцию $w = y_1 = -x - f_3$ получается уравнение

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4xw^2 + 2(x^2 - a)w + \frac{b}{w}, \qquad \mathrm{P}_4$$

где $a = \delta_2 + \dfrac{\delta_1}{2} + 1$, $b = -\dfrac{\delta_1^2}{2}$.

Это одно из шести уравнений Пенлеве, которые определяют некоторый класс аналитических функций со специальными свойствами. Подробнее мы поговорим о этих уравнениях на одной из следующих лекций.

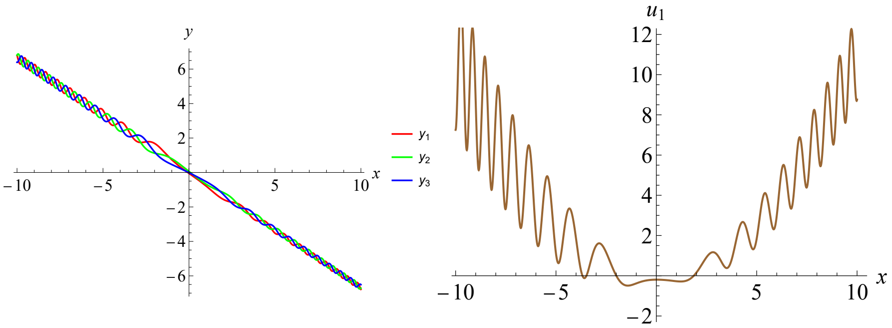
Пока отметим лишь, что общиее решения уравнений Пенлеве не выражаются через элементарные или специальные функции (хотя есть некоторые частные рациональные решения и решения в терминах классических спецфункций, для некоторых выделенных значений параметров и начальных условий). То есть, уравнения Пенлеве определяют некоторые новые спецфункции — трансценденты Пенлеве.

При численном счете для системы (7), в пространстве параметров и начальных условий можно найти некоторую конечную область, отвечающую регулярным решениям (без полюсов на вещественной оси). При этом все $\delta_n < 0$,

$$f_n = -\frac{x}{3} + O(1), \quad u_n = \frac{x^2}{9} + O(x), \quad x \to \pm\infty,$$

то есть, решения устроены примерно, как в случае гармонического осциллятора, но теперь на него накладываются высокочастотные осцилляции.

Типичное решение выглядит так:

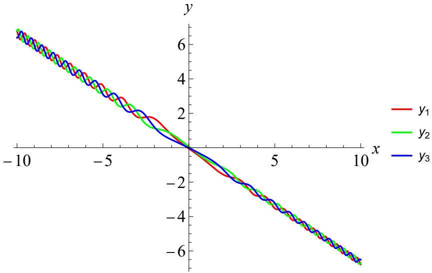


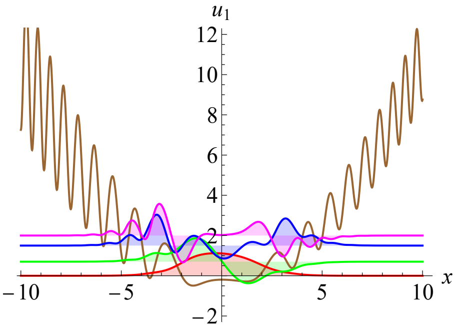
Значения параметров: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 1.5$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 2, \dots,$
начальные условия: $y_1(0) = -0.05$, $y_2(0) = 0.06$, $y_3(0) = -0.01$.

Потенциал u_1 определяется по решению y_1, y_2, y_3 согласно формулам

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f_1^2 + f_1' + \alpha_1 = (y_2 + x)^2 - y_2' - 1 + \alpha_1 \\
&= (y_2 + x)^2 - y_2(y_1 - y_3) + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 1.
\end{aligned}
$$

Типичное решение выглядит так:





Значения параметров: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 1.5$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 2, \dots,$
начальные условия: $y_1(0) = -0.05$, $y_2(0) = 0.06$, $y_3(0) = -0.01$.

Потенциал u_1 определяется по решению y_1, y_2, y_3 согласно формулам

$$u_1 = f_1^2 + f_1' + \alpha_1 = (y_2 + x)^2 - y_2' - 1 + \alpha_1$$
$$= (y_2 + x)^2 - y_2(y_1 - y_3) + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 1.$$

Как построить собственные функции? Согласно общей схеме, функция

$$\varphi_n^n = e^{\int f_n \, dx}$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера с потенциалом u_n, при $\lambda = \alpha_n$. Для решений, которые ведут себя так, как на графике, эта функция не имеет нулей и является быстроубывающей. Следовательно, это основное состояние для потенциала u_n.

Применяя операторы $A_k^\dagger$, получаем собственные функции для любого из потенциалов u_1, u_2, u_3.

При этом собственнные значения для u_1 образуют возрастающую последовательность

$$\alpha_{1+3k} = \alpha_1 + 2k, \quad \alpha_{2+3k} = \alpha_2 + 2k, \quad \alpha_{3(k+1)} = \alpha_3 + 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то есть, спектр состоит из трёх арифметических прогрессий с шагом 2.

Численные эксперименты показывают, что решения такого типа имеются при всех нечётных N.

Для чётных N всё немного усложняется (в частности, при $N = 4$ система сводится к уравнению P_5, это тоже уравнение второго порядка, но более громоздкое, чем P_4). Вообще, при чётных N решение имеет неподвижную особую точку при $x = 0$ и соответствующие операторы Шрёдингера служат аналогами гармонического осциллятора на полуоси (тип (C) в классификации Инфельда–Халла).

Итак, на этих примерах мы видим, что возможна ситуация, когда квантово-механическая задача является точно-решаемой в том смысле, что спектр допускает явное описание, хотя сам потенциал и собственные функции выражаются через некоторые трансцендентные функции.

Домашнее задание

8.1. Постройте операторы рождения и собственные функции для решений одевающей цепочки типа (C) из таблицы (гармонический осциллятор на полуоси).

8.2. Покажите, что система (7) в строго периодическом случае, то есть, при $\delta_1+\delta_2+\delta_3=0$, интегрируется в эллиптических функциях (очевидно, один первый интеграл это $y_1+y_2+y_3=\mathrm{const}$, найдите ещё один и сведите систему к уравнению первого порядка, на любую из переменных).

8.3. Проверьте прямым вычислением, что одевающая цепочка $f'_n+f'_{n+1}=f^2_n-f^2_{n+1}+\alpha_n-\alpha_{n+1}$ инвариантна относительно следующего преобразования, переставляющего пару соседних параметров α_i, α_{i+1} и меняющего соответствующие переменные f_i, f_{i+1}:

$$R_i:\quad \begin{cases} \tilde f_i=f_i+\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{f_i+f_{i+1}},\quad \tilde f_{i+1}=f_{i+1}-\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{f_i+f_{i+1}},\\ \tilde\alpha_i=\alpha_{i+1},\quad \tilde\alpha_{i+1}=\alpha_i,\\ \tilde f_n=f_n,\quad \tilde\alpha_n=\alpha_n \quad \text{при} \quad n\ne i,i+1 \end{cases}$$

Попробуйте объяснить это преобразование со свойством коммутативности преобразований Бэклунда из предыдущей лекции.

8.4. Проверьте групповые свойства преобразований R_i (id — тождественное преобразование):

$$R_i^2 = \mathrm{id}, \quad (R_i R_{i+1})^3 = \mathrm{id}, \quad (R_i R_j)^2 = \mathrm{id} \text{ при } |i-j| > 1$$

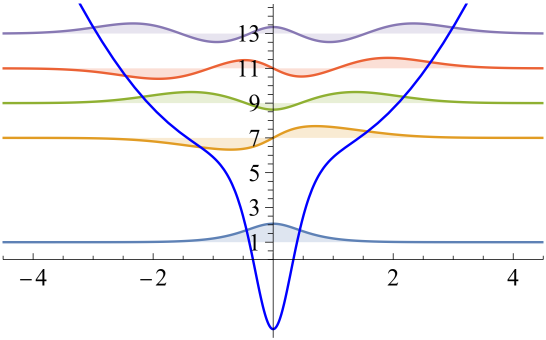
(последние два равенства можно записать также, как $R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$, $R_i R_j = R_j R_i$).

8.5. Рассмотрим простейшее решение, отвечающее гармоническому осциллятору $u_0 = x^2$:

$$\begin{aligned} &f_0 = -x, \quad f_1 = -x, \quad f_2 = -x, \quad f_3 = -x, \quad \dots \\ &\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 7, \quad \dots \end{aligned}$$

Примените преобразование R_0 к этой последовательности. В результате f_0 и f_1 заработают полюсы. Примените к новой последовательности R_1 и проверьте, что f_2 не имеет полюсов при вещественных x. Вычислите соответствующий потенциал u_2 и покажите, что он имеет спектр $1, 7, 9, 11, \dots$, то есть, из спектра гармонического осциллятора удалены значения 3 и 5 (иллюстрация на следующем слайде). Постройте соответствующие собственные функции. В явном виде не обязательно, достаточно определения через операторы рождения (можно также на компьютере, используя приложенную программу как заготовку).

К задаче 8.5: осциллятор со щелью в спектре



8.6. Попробуйте обобщить трюк с удалением собственных чисел, применяя больше преобразований R_i. Можно попробовать и для других потенциалов.