В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 7 · 18 марта 2024

Одевающая цепочка

План

- Дискретные переменные
- Преобразования Дарбу–Бэклунда
- Одевающая цепочка для КдФ
- Перестановочность преобразований Бэклунда
- Ещё один способ вывода n-солитонных решений

Уравнения с дискретными переменными

Дискретные переменные переменные могут интерпретироваться по разному, даже в одном и том же уравнении:

- как сеточная переменная для приближения x или t
- просто как номер
- как счётчик некоторого преобразования

Примеры:

1) Разностная схема Забуски–Краскала

$$u_n^{j+1} - u_n^{j-1} = a(u_{n+2}^j - 2u_{n+1}^j + 2u_{n-1}^j - u_{n-2}^j) \\ + 2ah^2(u_{n+1}^j + u_n^j + u_{n-1}^j)(u_{n+1}^j - u_{n-1}^j).$$

Это неинтегрируемое уравнение, само по себе, но в непрерывном пределе даёт КдФ (см. лекцию 1).

2) Дифференциально-разностные уравнения, типа цепочки Вольтерры

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad u_n = u_n(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

и цепочки Тоды

$$u_{n,tt} = \exp(u_{n+1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n-1}).$$

На одной из лекций мы рассмотрим эти уравнения подробнее.

Цепочки Вольтерры и Тоды допускают непрерывный предел (к КдФ и НШ, соответственно).

Однако, это не только разностные схемы, а, в первую очередь, самостоятельные интегрируемые уравнения: у них есть представления Лакса, законы сохранения и высшие симметрии, многосолитонные решения.

Также, отображения $(u_{n-1}, u_n) \mapsto (u_n, u_{n+1})$, определяемые этими цепочками, служат преобразованиями Бэклунда, действующими на решениях некоторых УЧП.

3) Одевающая цепочка

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}$$

— основная интерпретация в том, что она определяет ПБ для КдФ.

4) Разностное уравнение КдФ (так называют и другие уравнения)

$$(v_{n,m} - v_{n+1,m+1})(v_{n+1,m} - v_{n,m+1}) = \alpha_n - \beta_m$$

определяет формулу нелинейной суперпозиции ПБ для КдФ (но, это уравнение также можно использовать и как численную схему, то есть, имеется непрерывный предел к КдФ).

На этой лекции обсудим эти два уравнения.

Преобразование Бэклунда для КдФ

Для некоторых уравнений ПБ получаются как композиция двух подстановок, действующих в разные стороны. Типичным примером служат уравнения

$$\text{КдФ}: \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x \qquad \text{и} \qquad \text{мКдФ}: \quad f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\alpha)f_x.$$

Напомним (см. лекцию 2), что имеется преобразование Миуры, отображающее решения мКдФ в решения КдФ:

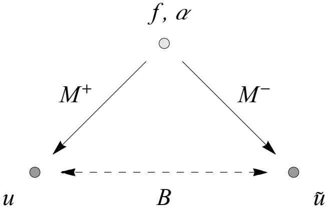
$$M^+: \quad u = f^2 + f_x + \alpha.$$

Уравнение для f инвариантно относительно замены $f \to -f$. Это даёт ещё одну подстановку между теми же уравнениями:

$$M^-: \quad \tilde{u} = f^2 - f_x + \alpha.$$

Уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают, но сами решения *разные*.

Преобразование между u и $\tilde{u}$ неявное. Это и есть ПБ для КдФ.



Пусть решение $u(x,t)$ задано. Чтобы получить $\tilde{u}$, нужно сначала обратить M^+_α, для чего необходимо построить f как решение пары ОДУ

$$f_x = u - \alpha - f^2, \qquad f_t = u_{xx} - 2u_x f - 2(u + 2\alpha)(u - f^2 - \alpha), \tag{1}$$

(второе уравнение это мКдФ, в котором f_x и f_{xxx} заменены через u). Так как u удовлетворяет КдФ, то эта система совместна. Далее, $\tilde{u}$ находится уже по явным формулам при помощи M^-_α.

Замечание 1. При выводе законов сохранения, мы строили f в виде ряда по $\sqrt{-\lambda}$. В качестве настоящего решения этот формальный ряд не годится. Сейчас требуется решение в виде функции от x, t, при некотором конкретном числовом значении $\lambda = \alpha$.

Промежуточную переменную f можно исключить и привести ПБ к соотношениям непосредственно между u и $\tilde{u}$. Имеем:

$$u = f^2 + f_x + \alpha, \quad \tilde{u} = u - 2f_x. \tag{2}$$

Отсюда находим $2f^2 = u + \tilde{u} - 2\alpha$ и тогда

$$u_x + \tilde{u}_x = (u - \tilde{u})\sqrt{2(u + \tilde{u} - 2\alpha)}. \tag{3}$$

Это «x-часть» преобразования Бэклунда.

Ещё одно уравнение, «t-часть», получается, если подставить f во второе уравнение (1) или непосредственно в уравнение мКдФ; это даст

$$u_t + \tilde{u}_t = (u_{xx} - \tilde{u}_{xx} - 3u^2 + 3\tilde{u}^2)\sqrt{2(u + \tilde{u} - 2\alpha)}. \tag{4}$$

Перекрёстным дифференцированием проверяется, что из (3) и (4) следует

$$u_t - u_{xxx} + 6uu_x = \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxx} + 6\tilde{u}\tilde{u}_x,$$

то есть, если одна переменная удовлетворяет КдФ, то это верно и для второй; кроме того, дифференцирование (3) в силу КдФ дает тождество (является следствием (3) при дифференцировании по x).

Одевающая цепочка

Преобразование (3) неудобно из-за корня. Но, мы можем взглянуть на картину и с другой стороны:

$$\begin{tikzcd}
f,\alpha \arrow[rr, dashed, leftrightarrow, "B"] \arrow[dr, "M^-"'] & & \tilde f,\tilde\alpha \arrow[dl, "M^+"] \\
& \tilde u &
\end{tikzcd}$$

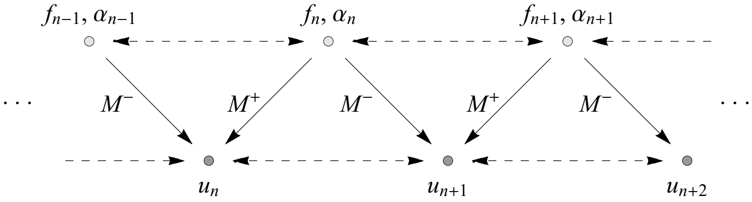
Вместо того, чтобы исключать f, исключим $\tilde u$ из соотношений

$$M^- :\ \tilde u = f^2 - f_x + \alpha, \qquad M^+ :\ \tilde u = \tilde f^2 + \tilde f_x + \tilde\alpha.$$

Параметр $\tilde\alpha$ выбирается независимо от α. Это даёт x-часть ПБ между двумя уравнениями мКдФ с разными параметрами:

$$f_x + \tilde f_x = f^2 - \tilde f^2 + \alpha - \tilde\alpha. \tag{5}$$

Так как мы собираемся применять ПБ многократно, то принципиальной разницы между этими двумя диаграммами нет — они склеиваются в одну общую последовательность:



Переменные u_n, f_n связаны следующими соотношениями с произвольными параметрами α_n:

$$u_n = f_n^2 + f_{n,x} + \alpha_n, \qquad u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Исключение u_n приводит к ***одевающей цепочке***:

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \tag{7}$$

исключение f_n — к цепочке

$$u_{n,x} + u_{n+1,x} = (u_n - u_{n+1})\sqrt{2(u_n + u_{n+1} - 2\alpha_n)}.$$

Удобна также переменная v, определяемая по формулам

$$u_n = 2v_{n,x}, \quad v_n = f_n - f_{n+1}. \tag{8}$$

Постоянные интегрирования можно выбрать так, чтобы эта переменная удовлетворяла, при каждом n, потенциальному уравнению КдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2. \tag{9}$$

Соответствующая цепочка имеет вид

$$v_{n,x} + v_{n+1,x} = (v_n - v_{n+1})^2 + \alpha_n. \tag{10}$$

Все три цепочки, для переменных f, u и v, определяют x-часть ПБ для соответствующих эволюционных уравнений.

Про t-часть можно особо не думать, достаточно помнить, что цепочки совместны с динамикой по t. При построении решений это позволяет определять зависимость постоянных интегрирования от t.

Преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера

Одевающую цепочку можно вывести, стартуя с линейной задачи для КдФ. Покажем, что уравнение Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi \tag{11}$$

допускает преобразования вида

$$\tilde\psi = \psi_x - f\psi. \tag{12}$$

То есть, можно так выбрать f, чтобы $\tilde\psi$ также удовлетворяла УШ, с новым потенциалом $\tilde u$.

Дифференцируя (12) и заменяя ψ_{xx} из (11), получаем

$$\tilde\psi_x = \psi_{xx} - f_x\psi - f\psi_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f\psi_x; \tag{13}$$

дифференцируя ещё раз, получаем

$$\tilde\psi_{xx} = (u_x - f_{xx} - f(u-\lambda))\psi + (u - 2f_x - \lambda)\psi_x.$$

С другой стороны, должно быть

$$\tilde\psi_{xx} = -(\tilde u + \lambda)\tilde\psi = -(\tilde u + \lambda)(\psi_x - f\psi).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$\tilde{u}=u-2f_x,\quad u_x-f_{xx}+f(\tilde{u}-u)=0.$$

Заменив во втором уравнении $\tilde{u}-u=-2f_x$ и проинтегрировав, получим

$$u=f^2+f_x+\alpha,\quad \tilde{u}=u-2f_x$$

— это в точности те же соотношения (2), что были получены из преобразований Миуры.

- Преобразование (12), (2) называется преобразованием Дарбу для уравнения Шрёдингера.

- Отличие между ПБ и ПД заключается в том, что ПБ выписывается на полевые переменные u, f, а ПД определяет *расширение* этого преобразования на волновые функции.

- Напомним, что преобразование Миуры можно линеаризовать:

$$f=\varphi_x/\varphi,\qquad \varphi_{xx}=(u-\alpha)\varphi.$$

Следовательно, ПД строится по частному решению φ УШ при частном значении спектрального параметра $\lambda=\alpha$.

- Преобразования $u \to \tilde{u}$ и $\tilde{u} \to u$ отличаются только сменой знака f. На решениях УШ, действие обратного ПД имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \lambda}(\tilde{\psi}_x + f\tilde{\psi}). \tag{14}$$

Это легко получить из (12) и (13): имеем

$$\tilde{\psi}_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f\psi_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f(\tilde{\psi} + f\psi) \quad \Rightarrow$$
$$\tilde{\psi}_x + f\tilde{\psi} = (u - f_x - f^2 - \lambda)\psi = (\alpha - \lambda)\psi.$$

- Преобразование в матричном виде, с индексом n:

$$\Psi_{n,x} = U_n\Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = F_n\Psi_n,$$

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} -f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & -f_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n,x} \end{pmatrix}$$

(вторая строка A_n получается из (13), если заменить $u = f^2 + f_x + \alpha$). Условие совместности (полудискретное представление нулевой кривизны)

$$F_{n,x} = U_{n+1}F_n - F_nU_n \tag{15}$$

эквивалентно соотношениям (6) $u_n = f_n^2 + f_{n,x} + \alpha_n$, $u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}$.

Сплетающие операторы

Альтернативный способ вывода и записи ПД — с использованием дифференциальных операторов вместо матриц. Запишем УШ как

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad L = -D^2 + u$$

(на этой лекции $D = d/dx$). Разложим $L - \alpha$ в произведение операторов первого порядка:

$$\begin{aligned} L - \alpha &= -D^2 + u - \alpha = -(D - g)(D - f) \\ &= -D^2 + gD + Df - gf = -D^2 + (g + f)D + f_x - fg. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $g = -f$, а f связана с u знакомым соотношением

$$u = f_x + f^2 + \alpha.$$

Итак,

$$L = A^\dagger A + \alpha, \quad A = D - f, \quad A^\dagger = -D - f$$

и УШ записывается как

$$A^\dagger A\psi = (\lambda - \alpha)\psi.$$

Определим новую ψ-функцию $\tilde{\psi} = A\psi$, тогда

$$A^\dagger\tilde{\psi} = (\lambda - \alpha)\psi \quad \Rightarrow \quad AA^\dagger\tilde{\psi} = (\lambda - \alpha)\tilde{\psi},$$

то есть, $\tilde{\psi}$ — решение УШ с новым оператором

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= -D^2 + \tilde{u} = AA^\dagger + \alpha\\ &= (D - f)(-D - f) + \alpha = -D^2 - f_x + f^2 + \alpha.\end{aligned}$$

В результате, получили то же самое преобразование Дарбу:

$$u = f_x + f^2 + \alpha \quad \to \quad \tilde{u} = -f_x + f^2 + \alpha.$$

Навешивая n, получаем последовательность операторов

$$L_n = A_n^\dagger A_n + \alpha_n, \quad L_{n+1} = A_n A_n^\dagger + \alpha_n \quad \Rightarrow \quad A_n L_n = L_{n+1} A_n$$

— аналог матричного представления (15).

Ещё один способ вывода n-солитонного решения КдФ

Переход $u_n \mapsto u_{n+1}$ согласно (6) требует решения уравнения Риккати. Формулы становятся явными, если при некотором n (пусть при $n=0$) известно достаточно много частных решений уравнения Шрёдингера.

Схема такая:

1. Пусть при $n=0$ известен набор решений φ^j_0, отвечающих попарно различным частным значениям спектрального параметра:
$$\varphi^j_{0,xx} = (u_0 - \alpha_j)\varphi^j_0 = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \tag{16}$$
2. Если u_n и φ^j_n известны, используем одну из φ^j_n, чтобы построить f_n как логарифмическую производную. Для определенности, используем φ^n_n:
$$f_n = \varphi^n_{n,x}/\varphi^n_n. \tag{17}$$
3. Применяем ПД для пересчета остальных φ^j_n в φ^j_{n+1} и для определения u_{n+1}:
$$\varphi^j_{n+1} = \varphi^j_{n,x} - f_n\varphi^j_n, \quad u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}. \tag{18}$$
4. Идем к шагу 2 для $n=n+1$ и повторяем, пока не надоест.

Отметим, что на каждом шаге пропадает одна волновая функция, так как φ_n^n принадлежит ядру оператора $A_n = D - f_n$.

Если изначально задано N функций φ_0^j, то мы сможем сделать N шагов.

Если набор начальных функций бесконечный, процесс продолжается сколь угодно долго.

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & u_0 & \xrightarrow{f_0} & u_1 & \xrightarrow{f_1} & u_2 & \xrightarrow{f_2} & u_3 & \dots \\
\hline
\alpha_0 & \varphi_0^0 & \to & 0 & & & & & \\
\alpha_1 & \varphi_0^1 & \to & \varphi_1^1 & \to & 0 & & & \\
\alpha_2 & \varphi_0^2 & \to & \varphi_1^2 & \to & \varphi_2^2 & \to & 0 & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Замечание 2. На самом деле, пропажа функции восполнима, так как $D - f_n$ можно применить ко второму линейно-независимому решению уравнения Шредингера, которое находится квадратурой. Это позволяет строить преобразования с кратными значениями α_j (правда, при этом кроме дифференцирования приходится использовать и интегрирование). Для простоты, мы не рассматриваем этот случай; пусть все α_n различны.

Замечание 3. Описанная процедура неоднозначна, так как зависит от нумерации α_j. На n-м шаге можно использовать любую функцию φ_n^j из тех, что остались на данный момент. Результат преобразования на шаге $n+1$ зависит от этого выбора. Возникает вопрос (мы на него ответим) — сколько разных потенциалов получается за счёт изменения порядка преобразований.

Свернем результат n-кратного ПД в компактную вронскианную формулу. По существу, она совпадает с той, что уже выводилась для n-солитонного решения (потенциалы Баргманна, лекция 3). Предварительно докажем следующее тождество.

Лемма 1. Для вронскианов $W(y_1,\dots,y_n)=\det(D^{k-1}(y_j))\big|_{j,k=1}^{n}$ верно тождество

$$W(y_1,\dots,y_n)=y_1W(A(y_2),\dots,A(y_n)),\qquad A=D-y_{1,x}/y_1. \tag{19}$$

Доказательство. Обе части равенства — линейные дифференциальные операторы степени $n-1$ по D, действующие на y_n. Их ядра совпадают (натянуты на $y_1,\dots,y_{n-1}$), откуда следует, что они отличаются на скалярный множитель. Коэффициенты при $D^{n-1}(y_n)$ дают равенство (19) для $n-1$ и утверждение следует по индукции. ∎

Введем обозначения

$$\Delta_n = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}), \qquad n = 1, 2, \dots,$$
$$\Delta_n(\varphi) = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}, \varphi),$$

где φ произвольная функция. Для единообразия, пусть

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_0(\varphi) = \varphi.$$

Из формул (17), (18) получаем, пользуясь Леммой 1,

$$\Delta_n = \varphi_0^0 W(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{n-1}) = \varphi_0^0 \varphi_1^1 W(\varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{n-1}) = \dots = \varphi_0^0 \cdots \varphi_{n-1}^{n-1}$$

и, аналогично,

$$\Delta_n(\varphi_0^j) = \varphi_0^0 \cdots \varphi_{n-1}^{n-1} \varphi_n^j, \quad j \ge n.$$

В результате, волновые функции потенциала u_n выражаются через вронскианы от волновых функций потенциала u_0:

$$\varphi_n^j = \frac{\Delta_n(\varphi_0^j)}{\Delta_n}, \quad j \ge n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

В частности, имеем $\varphi^n_n = \Delta_{n+1}/\Delta_n$, откуда получаем выражение для f_n:

$$f_n = \frac{\Delta_{n+1,x}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n,x}}{\Delta_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(при $n = 0$ второе слагаемое равно 0).

Подставляя это в формулу $u_n = u_0 - 2f_{0,x} - \dots - 2f_{n-1,x}$, получаем

$$u_n = u_0 - 2D^2 \log \Delta_n.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть φ^j_0 частные волновые функции потенциала u_0, отвечающие попарно различным собственным значениям. Потенциал, возникающий в результате n-кратного преобразования Дарбу, построенного по этим функциям, имеет вид

$$u_n = u_0 - 2D^2 \log W(\varphi^0_0, \dots, \varphi^{n-1}_0). \tag{20}$$

Волновая функция этого потенциала равна

$$\psi_n(x, \lambda) = \frac{W(\varphi^0_0, \dots, \varphi^{n-1}_0, \psi_0(x, \lambda))}{W(\varphi^0_0, \dots, \varphi^{n-1}_0)}.$$

Простейший пример получается для затравочного потенциала $u_0 = 0$. Для него уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\psi_{0,xx} = -\lambda\psi_0$$

и решается явно при любом λ. Чтобы получить решение КдФ, нужно еще восстановить зависимость от t. Это легко, нужно лишь решить вспомогательную линейную задачу по t для ψ_0:

$$\psi_{0,t} = u_{0,x}\psi_0 - 2(2\lambda + u_0)\psi_{0,x} = -4\lambda\psi_{0,x}.$$

Отсюда следует, что в качестве φ_0^j выступают функции вида

$$\varphi_0^j = a_j e^{k_j x} + b_j e^{-k_j x}, \quad k_j^2 = -\alpha_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Легко видеть, что (20) даёт в точности ту же формулу для потенциалов Баргманна, что мы ранее получили по формулам Крамера для системы линейных уравнений, возникающей при обрыве ряда для ψ-функции (лекция 3). Как и там, в этом выводе на параметры нет никаких ограничений, кроме $\alpha_i \neq \alpha_j$, так как это чисто алгебраическая процедура. Напомним, что требование вещественности и регулярности решений приводит к правилу чередования знаков при экспонентах.

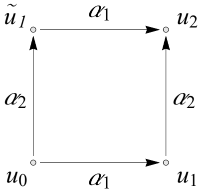
Коммутативность преобразований Бэклунда

Из формулы (20) ясно, что конечный результат n-кратного ПД не зависит от того, в каком порядке используются затравочные волновые функции φ_0^j. Их перенумерация приводит лишь к перестановке столбцов в вронскиане, что не меняет u_n. При этом промежуточные потенциалы, будут, конечно разными.

Пусть B_i обозначает преобразование Дарбу–Бэклунда с параметром α_i. Тогда, если u_0 и u_1 связаны B_1, а u_1 и u_2 связаны B_2, то найдется еще потенциал $\tilde{u}_1$, который связан с u_0 и u_2 преобразованиями с переставленными параметрами. Это свойство коммутативности

$$B_2B_1 = B_1B_2$$

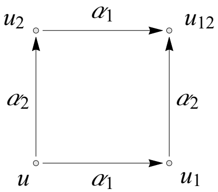
выражается диаграммой Бьянки



Здесь удобно немного сменить обозначения, чтобы подчеркнуть равноправие каждого из путей. Будем теперь обозначать действие B_i приписыванием индекса i:

$$u \xrightarrow{B_1} u_1 \xrightarrow{B_2} u_{12} \xrightarrow{B_3} u_{123} \xrightarrow{B_4} u_{1234} \dots,$$

тогда свойство коммутативности формулируется, как совпадение переменных, отличающихся перестановкой индексов: $u_{12} = u_{21}$.



Это свойство можно доказать и не пользуясь вронскианными формулами. Кроме того, замечательным обстоятельством является то, что между переменными в вершинах квадрата имеется некая алгебраическая связь. В принципе, ее можно вывести прямо для переменных u, u_1, u_2 и u_{12}, но в них она выглядит достаточно громоздко (так как и само ПБ в этих переменных записывается с корнем).

Удобнее всего работать с переменной v, связанной с u соотношением $u = 2v_x$. Для нее преобразование B_i определяется уравнением (10); в новых обозначениях,

$$B_i: \quad v_x + v_{i,x} = (v - v_i)^2 + \alpha_i. \tag{21}$$

Теорема 3. (Формула нелинейной суперпозиции). Пусть переменная v связана с v_i преобразованием B_i и с v_j преобразованием B_j, причем $\alpha_i \neq \alpha_j$. Тогда существует единственная переменная v_{ij}, связанная с v_i преобразованием B_j и с v_j преобразованием B_i. Эта переменная однозначно выражается через v, v_i, v_j из уравнения

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j. \tag{22}$$

Доказательство. Утверждается, что если функции v, v_i и v_j связаны соотношениями

$$v_x + v_{i,x} = (v - v_i)^2 + \alpha_i, \quad v_x + v_{j,x} = (v - v_j)^2 + \alpha_j,$$

то существует функция v_{ij} такая, что

$$v_{i,x} + v_{ij,x} = (v_i - v_{ij})^2 + \alpha_j, \quad v_{j,x} + v_{ij,x} = (v_j - v_{ij})^2 + \alpha_i.$$

Эти уравнения можно сложить с нужными знаками, так что все производные сократятся:

$$(v - v_i)^2 + \alpha_i - (v_i - v_{ij})^2 - \alpha_j = (v - v_j)^2 + \alpha_j - (v_j - v_{ij})^2 - \alpha_i.$$

Нетрудно проверить, что это даёт в точности соотношение (22). Таким образом, если искомая переменная v_{ij} существует, то она единственна и находится из этого уравнения (деление возможно, так как если $v_i = v_j$, то и $\alpha_i = \alpha_j$). Далее, следует еще проверить, что определённая таким образом v_{ij} действительно удовлетворяет двум последним дифференциальным уравнениям. Это делается прямой подстановкой; оказывается, что они выполняются тождественно в силу двух первых уравнений. ∎

Применение форулы суперпозиции даёт более эффективный способ построения солитонных решений, чем вронскианы, поскольку вычисление определителей большого порядка — трудоемкая операция.

Проиллюстрируем сначала для $n = 2$.

Пример. Построим 2-солитонное решение. Пусть $v = 0$. Решаем уравнение для v_j, полагая $\alpha_j = -k_j^2$, $k_j > 0$:

$$v_{j,x} = v_j^2 - k_j^2.$$

Зависимость от t уточняется подстановкой в уравнение $v_t = v_{xxx} - 6v_x^2$, в результате получаем решения двух типов

$$v_j = -k_j \tanh X_j \quad \text{или} \quad v_j = -k_j \coth X_j, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 t + d_j \tag{23}$$

(при дифференцировани tanh получается солитон КдФ, $u = 2v_x$).

Теперь используем формулу суперпозиции, причем возьмём решения разных типов. Это даст

$$v_{ij} = -\frac{\alpha_i - \alpha_j}{v_i - v_j} = \frac{k_j^2 - k_i^2}{k_i \tanh X_i - k_j \coth X_i}.$$

Так как $|\tanh x| < 1$ и $|\coth x| > 1$, то знаменатель не обращается в ноль при выборе $k_j > k_i > 0$. При дифференцировании, это дает 2-солитонное решение КдФ.

Солитонная лестница

Чтобы получить n-солитонное решение, стартуем с тривиального решения $v=0$ и n штук 1-кинковых вида (23)

$$v_1,\quad v_2,\quad v_2,\quad \dots\quad v_n.$$

Чтобы конечный результат был без полюсов, нужно чередовать $\tanh$ и $\coth$ в зависимости от упорядочения k_j, но не будем за этим следить. На первом шаге эти решения превращаются в 2-кинковые ($n-1$ штуки)

$$v_{12},\quad v_{23},\quad v_{34},\quad \dots\quad v_{n-1,n}$$

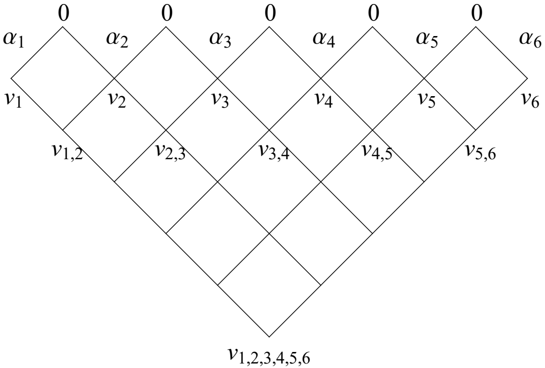
по формуле (22). Здесь каждая пара соседей имеет общего «предка», поэтому можно опять применить (22). Это даёт $n-2$ решения

$$v_{123},\quad v_{234},\quad \dots\quad v_{n-2,n-1,n}.$$

Опять, индексы у соседей отличаются одним элементом. Продолжаем процесс, пока не дойдем до одного n-кинкового решения

$$v_{1,2,\dots,n}.$$

Каждый квадрат — диаграмма Бьянки. Параметры α_j приписаны рёбрам решётки так, что противоположным рёбрам квадрата отвечает один и тот же параметр.



Всего формула суперпозиции применяется $n(n-1)/2$ раз, что действительно даёт существенный выигрыш по сравнению с прямым вычислением определителя n-го порядка ($n!$ операций).

Это вычисление можно интерпретировать также как рекурсивное определение функций:

$$v(x,t)=0,\qquad v(x,t;k,d)=-k\tanh(kx+4k^3t+d), \tag{24}$$

$$v(x,t;K,k,d,k',d')=v(x,t;K)+\frac{k^2-(k')^2}{kv(x,t;K,k,d)-k'v(x,t;K,k',d')}, \tag{25}$$

где $K=\overline{k_1,d_1,\dots,k_j,d_j}$.

Домашнее задание

8.1. Затравочные функции $f = v(x,t;k,d)$ (24) служат решением также для мКдФ $f_t = f_{xxx} - 6(f^2 - k^2)f_x$. Используя замену (8) покажите, что рекуррентное соотношение (где $K = \overline{k_1, d_1, \dots, k_j, d_j}$)

$$F = f(x,t;K,k,d,k',d') = -f(x,t;K,k,d) + \frac{k^2 - (k')^2}{f(x,t;K,k,d) - f(x,t;K,k',d')}$$

дает решение для $F_t = F_{xxx} - 6(F^2 - (k')^2)F_x$.

8.2. Классическим примером (Бэклунд, 1883) служат следующие преобразования для уравнения sin-Гордона:

$$\tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sin\frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\tilde{u} + u}{2} \tag{26}$$

(x-часть и y-часть ПБ, в отличие от случая КдФ, здесь они равноправны). Докажите, что если u и $\tilde{u}$ удовлетворяют этим уравнениям, то каждая из этих переменных удовлетворяет уравнению

$$u_{xy} = \sin u.$$

8.3. При замене $iu = v$ уравнение sin-Гордона переходит в $v_{xy} = \sinh v$. Примените дальнейшую замену $p = e^{v/2}$ и покажите, что она приводит и уравнение и ПБ к рациональному виду. Выведите рациональные формулы для суперпозиции ПБ, аналогично тому, как это было сделано для (22).

8.4. Для самого sin-Гордона замена $p = e^{iu/2}$ портит вещественность. Покажите, что в этом случае еще одна замена $\frac{p-1}{p+1} = iq$ также приводит к рациональным уравнениям, причем q остается вещественной переменной ($q = \tan u/4$). Получите рациональные формулы суперпозиции для q (немного более громоздкие, чем для p).