В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 6 · 11 марта 2024

Конечнозонные решения КдФ

План лекции

- Стационарные уравнения для высших симметрий (уравнения Новикова)
- Общее решение в виде бегущей волны (кноидальная волна)
- Эллиптические функции
- Численное построение двухфазного решения
- Произвольное n: понижение порядка, уравнения Дубровина
- Интегрирование в квадратурах

Уравнения Новикова

Мы установили, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{1}$$

допускает бесконечную последовательность высших симметрий, которые строятся при помощи оператора рекурсии:

$$u_{t_{2n+1}} = g_{2n+1} = R^n(u_x), \quad R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}. \tag{2}$$

Первые несколько симметрий ($u_1 = u_x$, $u_2 = u_{xx}$, ...):

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1, \qquad (\text{сдвиг по } x)\\
u_{t_3} &= u_3 - 6uu_1, \qquad (\text{сдвиг по } t)\\
u_{t_5} &= D(u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3),\\
u_{t_7} &= D(u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4),\\
&\dots
\end{aligned}$$

и так далее.

Симметрией является и произвольная линейная комбинации конечного числа этих потоков. Наша цель сегодня — исследовать стационарное уравнение для такой симметрии, то есть, ОДУ порядка $2n+1$ вида

$$G = g_{2n+1} + c_1 g_{2n-1} + \dots + c_n g_1 = 0, \tag{3}$$

что впервые было сделано в статье

- С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974) 54–66.

Согласно определению симметрии, (3) определяет связь, совместную с динамикой по t в силу КдФ, так как выполняется тождество

$$D_t(G) = (D^3 - 6uD - 6u_1)(G) = 0.$$

Уравнение (3) допускает понижение порядка. Так как все $g_{2j-1} = D(a_j)$, $j = 1, \dots, n+1$ — полные производные по x, то оно сводится к уравнению порядка $2n$

$$F = a_{n+1} + c_1 a_n + \dots + c_n a_1 + c_{n+1} = 0. \tag{4}$$

Совместность с динамикой по t не нарушается, при условии, что постоянная интегрирования c_{n+1} не зависит от t: можно проверить, что

$$D_t(F) = (D^3 - 6uD)(F) = 0.$$

- Уравнение (3) можно записать в виде

$$u_{t_{2n+1}} + c_1 u_{t_{2n-1}} + \dots + c_n u_{t_1} = 0$$

— это линейное УЧП первого порядка, общее решение которого (по методу характеристик) представимо в виде

$$u = F(c_1 t_{2n+1} - t_{2n-1}, c_2 t_{2n+1} - t_{2n-3}, \dots, c_n t_{2n+1} - t_1),$$

то есть, u — функция от n линейных «фаз». Поэтому, решения уравнения Новикова иногда называют ***n-фазными***. Конечно, в этом «ответе» функция F не произвольна и нуждается в определении.

- Другое название — ***n-зонные*** решения, будет объяснено чуть позже.

- Уравнение (4) допускает дальнейшее понижение порядка. Наша цель — показать, что порядок понижается до n за счёт алгебраических первых интегралов, а затем можно ввести ещё $n-1$ дополнительных первых интегралов при помощи квадратур.

- В результате, решение уравнения (4) сводится к квадратурам и обращению неявных функций. Этот последний этап — самый сложный. Конструктивно, он осуществляется при помощи тэта-функций от многих переменных.

1-зонное решение

При $n=1$ имеем уравнение

$$u_{xxx}-6uu_x+cu_x=0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t+cu_x=0.$$

Это решение в виде бегущей волны $u(x,t)=u(x-ct)$, которое уже рассматривалось на первой лекции. Двукратное интегрирование даёт

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 3u^2-cu+c_1/2 \quad \Rightarrow \qquad\qquad \Big|\ \times 2u_x\ \Big| \\ u_x^2 &= 2u^3-cu^2+c_1u+c_2=P(u). \end{aligned}$$

Ранее мы требовали, чтобы решение было быстроубывающим, что фиксировало значения первых интегралов $c_1=c_2=0$. Теперь не делаем этого, пусть c_1,c_2 произвольны. Механическая интерпретация — движение частицы в поле с кубическим потенциалом $-\frac{1}{2}P(u)$ см. напр.

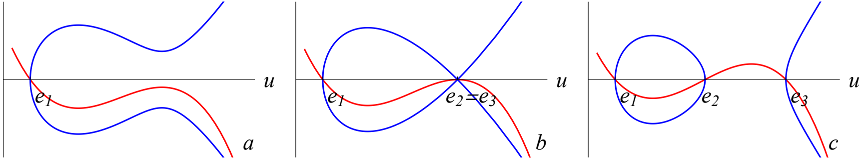
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т.1, Механика (§11). М.: Наука, 1988.

При этом u — координата частицы, x играет роль времени, c_2 — энергия, её мы включили в потенциал, так что частица находится на нулевом уровне энергии.

Функция u находится в неявном виде при помощи квадратуры:

$$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = x - ct + \delta.$$

Это неполный эллиптический интеграл. Если корни P различны, то он не берётся в элементарных функциях. Тем не менее, легко понять, как нужно выбирать константы и начальное условие, чтобы решение было ограниченным на вещественной оси.



■ кривая $y^2 = P(u)$, ■ график многочлена $y = -\frac{1}{2}P(u)$

В зависимости от расположения корней P возможны три случая (пять, с учётом вырождений $e_1 = e_2$ и $e_1 = e_2 = e3$).

Три типа движения:

- Движение по овалу — частица в потенциальной яме, ограниченное периодическое движение.

- Неограниченные ветви на рис. a и c — частица за конечное время уходит на бесконечность (полюсные решения).

- Петля на рис. b получается, если край ямы находится точно на нулевом уровне энергии. Ей отвечает сепаратрисное решение — предельный случай периодического движения с бесконечно большим периодом. Это и есть солитон.

Эллиптические функции

Уравнение для u совпадает, с точностью до линейной замены, с уравнением для эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Начальное условие: $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$ при $z \to 0$.

Общее определение: эллиптические функции — это аналитические функции $f(z)$ такие, что $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

Для $\wp$, параметры g_2 и g_3 выражаются через периоды ω_1, ω_2 (как некоторые ряды).

Произвольная э.ф. с теми же периодами представима как рациональная функция от $\wp$, $\wp'$.

- А.Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- Н.И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- А.И. Маркушевич. Замечательные синусы. М.: Наука, 1974.

Класс уравнений

$$(y')^2 = P(y), \quad \deg P \le 4 \tag{5}$$

сохраняется при дробно-линейных заменах $Y = \dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$:

$$(Y')^2 = Q(Y), \quad P(y) = \frac{(\gamma y + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} Q\Big(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\Big).$$

Другие важные функции: $\zeta(z)$ (мероморфная с простыми полюсами), $\sigma(z)$ и $\theta(z)$ (целые)

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = -(\sigma'(z)/\sigma(z))';$$

$$\sigma(z) = k_1 e^{k_2 z^2 + k_3 z} \theta(k_4 z + k_5; \tau),$$

где k_i — некоторые константы и

$$\theta(z, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(m^2\tau + 2mz)\pi i}. \tag{6}$$

Итак, ответ можно записать в виде

$$u(x,t) + C = 2\wp(x - ct + d) = -2\partial_x^2 \log \sigma(x - ct + d).$$

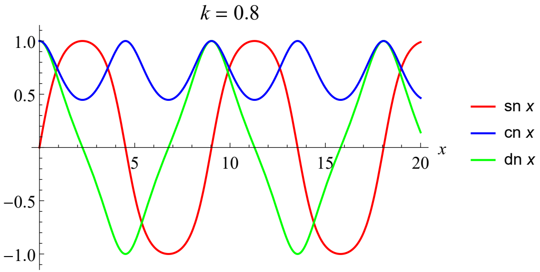
Некоторым недостатком функций Вейерштрасса является то, что в данном ответе трудно выделить вещественные решения. Для этой цели более удобны эллиптические функции Якоби.

Функции Якоби

Функции $\mathrm{sn}(x;k), \mathrm{cn}(x;k), \mathrm{dn}(x;k)$ — решения задачи Коши

$$(\mathrm{sn}\,x)' = \mathrm{dn}\,x\,\mathrm{cn}\,x, \quad (\mathrm{cn}\,x)' = -\,\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{sn}\,x, \quad (\mathrm{dn}\,x)' = -k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x,$$
$$\mathrm{sn}\,0 = 0, \quad \mathrm{cn}\,0 = 1, \quad \mathrm{dn}\,0 = 1.$$

Параметр k принимает значения $0 \le k \le 1$.



Первые интегралы:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1.$$

Отсюда следует

$$(\operatorname{cn}' x)^2 = \operatorname{dn}^2 x \operatorname{sn}^2 x = (\operatorname{cn}^2 x - 1)(k^2 \operatorname{cn}^2 x - 1)$$

— это уравнение вида (5) (аналогичные уравнения есть и для $\operatorname{sn}, \operatorname{dn}$). Поэтому эти функции дробно-линейно связаны с $\wp$, но есть и другие замены. Нетрудно проверить, что если

$$u = K_1 + K_2 \operatorname{cn}^2(bx; k),$$

то u_x^2 будет равно многочлену третей степени от cn^2, то есть, от самого u.

Подставляя в уравнение $u_x^2 = P(u) = 2u^3 - cu^2 + c_1 u + c_2$ и сравнивая коэффициенты при u^3 и u^2, выражаем K_1, K_2 через b, c и k:

$$u(x,t) = \frac{4b^2(2k-1)+c}{6} - 2b^2 k \operatorname{cn}^2(b(x-ct)+d; k).$$

Это так называемая ***кноидальная*** волна.

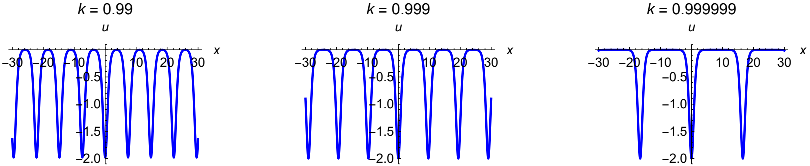
Коэффициенты c_1 и c_2 также выражаются через b, и k, но эти формулы особо не нужны.

За счёт растяжения можно положить $b = 1$. Преобразование Галилея позволяет уничтожить свободный член (что отвечает $c = 4 - 8k$), тогда график будет касаться оси x. Наконец, d уничтожается сдвигом x или t и остаётся лишь один существенный параметр k:

$$u = -2k\,\mathrm{cn}^2(x + 8kt; k).$$

В пределе $k \to 0$ функции Якоби переходят в обычную тригонометрию, но при этом амплитуда u стремится к 0.

Предел $k \to 1$ отвечает солитону. Пички в кноидальной волне разъезжаются друг от друга и в пределе остается солитонное решение.



Пример численного решения при $n=2$

Уравнение (4) эквивалентно $2n$-мерной динамической системе по x, относительно переменных $u, u_1, \dots, u_{2n-1}$. Само уравнение КдФ тоже можно переписать как динамическую систему по t для этих переменных. Эти системы совместны, то есть, соответствующие векторные поля коммутируют. При $n=2$ имеем:

$$\begin{cases} u_x \;\; = u_1, \\ u_{1,x} = u_2, \\ u_{2,x} = u_3, \\ u_{3,x} = 10uu_2 + 5u_1^2 - 10u^3 - c_1(u_2 - 3u^2) - c_2 u - c_3, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_t \;\; = u_3 - 6uu_1, \\ u_{1,t} = (4u - c_1)u_2 - u_1^2 - 10u^3 + 3c_1 u^2 - c_2 u - c_3, \\ u_{2,t} = (4u - c_1)u_3 + 2u_1 u_2 - (30u^2 - 6c_1 u + c_2)u_1, \\ u_{3,t} = 6u_1 u_3 + 2u_2^2 + (10u^2 - 8c_1 u - c_2 + c_1^2)u_2 - (40u - c_1)u_1^2 \\ \qquad\quad - 40u^4 + 22c_1 u^3 - (4c_2 + 3c_1^2)u^2 + (c_1 c_2 - 4c_3)u + c_1 c_3. \end{cases} \tag{8}$$

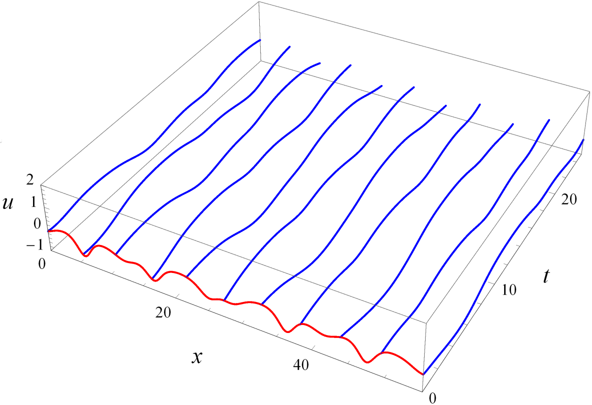
Зададим параметры и начальные условия u, u_1, u_2, u_3 при $(x,t)=(0,0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (7) по x до некоторого x_1.

Полученное решение в точках $x+j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (8) по t до некоторого t_1.

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t. Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t, получим сечения, параллельные оси x. Коммутативность гарантирует, что оба набора кривых пересекаются в точках сетки, так что получается некоторая поверхность. Если взять шаги достаточно маленькими, получается 3D график решения.



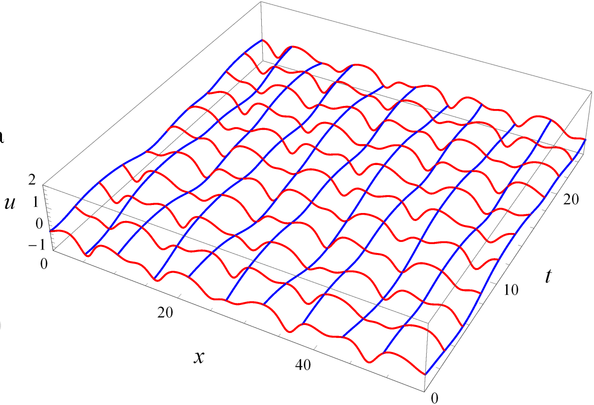
Зададим параметры и начальные условия u, u_1, u_2, u_3 при $(x,t)=(0,0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (7) по x до некоторого x_1.

Полученное решение в точках $x+j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (8) по t до некоторого t_1.

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t. Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t, получим сечения, параллельные оси x. Коммутативность гарантирует, что оба набора кривых пересекаются в точках сетки, так что получается некоторая поверхность. Если взять шаги достаточно маленькими, получается 3D график решения.



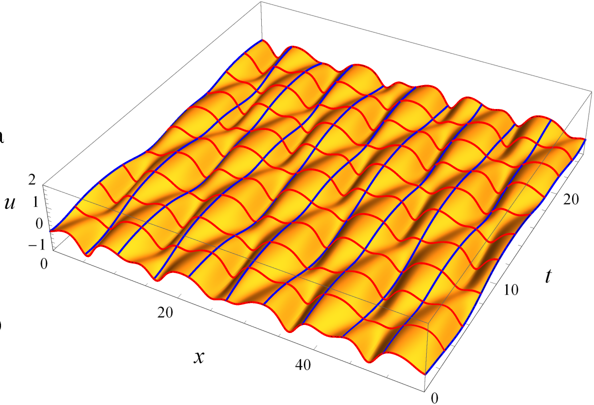
Зададим параметры и начальные условия u, u_1, u_2, u_3 при $(x,t)=(0,0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (7) по x до некоторого x_1.

Полученное решение в точках $x+j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (8) по t до некоторого t_1.

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t. Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t, получим сечения, параллельные оси x. Коммутативность гарантирует, что оба набора кривых пересекаются в точках сетки, так что получается некоторая поверхность. Если взять шаги достаточно маленькими, получается 3D график решения.



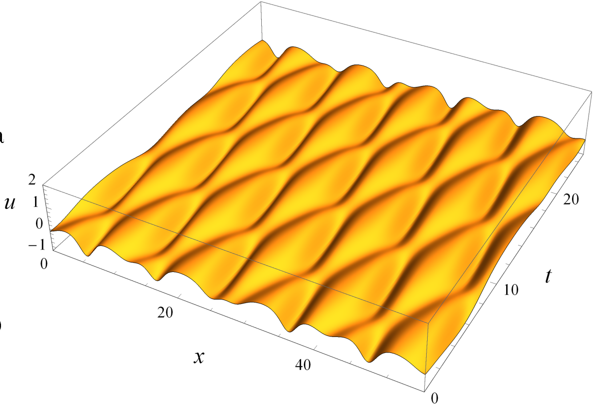
Зададим параметры и начальные условия u, u_1, u_2, u_3 при $(x,t)=(0,0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (7) по x до некоторого x_1.

Полученное решение в точках $x+j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (8) по t до некоторого t_1.

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t. Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t, получим сечения, параллельные оси x. Коммутативность гарантирует, что оба набора кривых пересекаются в точках сетки, так что получается некоторая поверхность. Если взять шаги достаточно маленькими, получается 3D график решения.



Как и в однозонном случае, важное значение имеет выбор параметров и начальных условий. Если выбрать неудачно, то решение будет иметь полюсы: при численном счёте решение станет неограниченно расти и произойдет ошибка.

С другой стороны, если выбрать *очень* удачно, то можно получить и двухсолитонные решения — как и предыдущем примере, они являются специальными сепаратрисными решениями.

Случай произвольного n

Для произвольного n в переменных u_j работать трудно. Необходимо выбрать некоторые новые координаты, что было сделано в статье

- Б.А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. *Функц. анализ* **9:3** (1975) 41–51.

Сначала выпишем уравнения для некоторых многочленов от λ (удобно обозначить $\mu = -4\lambda$). Доказательство следующего утверждения фактически дублирует вывод квадратичной формулы для производящего ряда высших симметрий, которую мы уже использовали на прошлой лекции, чтобы доказать их локальность.

Утверждение 1. Уравнение Новикова (4) эквивалентно уравнению

$$\mu Q^2 = 2QQ_{xx} - Q_x^2 - 4uQ^2 + P \tag{9}$$

с полиномами

$$Q(\mu) = \mu^n + q_1(x,t)\mu^{n-1} + \dots + q_n(x,t),$$
$$P(\mu) = \mu^{2n+1} + \gamma_1\mu^{2n} + \dots + \gamma_{2n+1} = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Напомним, что величины a_j из (4) служат коэффициентами производящей функции

$$A = 1/2 - a_1/\mu - \dots - a_n/\mu^n - \dots,$$

удовлетворяющей уравнению (оно эквивалентно рекуррентной схеме (2))

$$\mu A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_x A. \tag{10}$$

Уравнение Новикова (4)

$$a_{n+1} + c_1 a_n + \dots + c_n a_1 - c_{n+1}/2 = 0$$

означает в точности, что существует ряд с постоянными коэффициентами

$$C = \mu^n(1 + c_1/\mu + c_2/\mu^2 + \dots),$$

такой, что $Q = CA$ — многочлен степени n. Он также удовлетворяет (10):

$$\mu Q_x = Q_{xxx} - 4uQ_x - 2u_x Q.$$

Это уравнение допускает интегрирующий множитель $2Q$, что и даёт (9) с постоянной интегрирования P. Так как A — многочлен, то и P — многочлен, причём уравнение (9) по прежнему совместно с КдФ, если P не зависит от t. ∎

Замечание 2. При построении n-солитонных решений мы требовали существования решения уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi,$$

полиномиального по $z = \sqrt{-\lambda}$, с точностью до множителя e^{zx+4z^3t} (обрыв функции Бейкера–Ахиезера). Оказывается, n-зонные решения тоже можно определить условием обрыва, но не для самих пси-функций, а для их произведения. Следующее свойство легко проверяется (ДЗ):

Утверждение 2. Произведение любых двух ψ-функций $q = \psi\tilde{\psi}$ и их вронскиан $w = \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi}$ удовлетворяют уравнению (9)

$$2qq_{xx} - q_x^2 + 4(\lambda - u)q^2 + w^2 = 0, \quad w_x = 0.$$

В качестве Q можно взять $Q = \psi(z)\psi(-z)$. Если ψ — оборванный ряд по z, то Q — многочлен по λ. Следовательно, n-солитонные решения удовлетворяют уравнению Новикова (9).

Обратное неверно — не все решения (9) являются n-солитонными. Это лишь подкласс специальных, сепаратрисных решений, выделенных условием быстроубывания. Для общего n-зонного решения условие полиномиальности ψ-функций не выполняется.

Уравнения Дубровина

Нужная замена переменных — переход к нулям многочленов Q, P. Пусть

$$Q(\mu) = (\mu - y_1)\cdots(\mu - y_n),$$
$$P(\mu) = (\mu - e_1)\cdots(\mu - e_{2n+1}).$$

Положим в (9) $\mu = y_j$. Слагаемые с Q^2 и QQ_{xx} исчезнут и останется

$$Q_x^2\big|_{\mu=y_j} = P(y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как

$$Q_x\big|_{\mu=y_j} = -y_{j,x}\prod_{i\neq j}(y_j - y_i),$$

то получается система ОДУ на переменные y_j — уравнения Дубровина

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{i\neq j}(y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Фактически, понижение порядка происходит при переходе от уравнения Новикова (4) к проинтегрированному уравнению (9).

Исходное уравнение (4) имело порядок $2n$ и содержало $n+1$ постоянную $c_1,\dots,c_{n+1}$. Мы свели её к системе порядка n, содержащей $2n+1$ постоянную $e_1,\dots,e_{2n+1}$. При замене ничего не потерялось.

Потенциал u восстанавливается по e_j, y_j согласно формуле

$$4u = 2y_1 + \dots + 2y_n - e_1 - \dots - e_{2n+1}, \tag{12}$$

что следует прямо из (9).

Кроме системы (11) по $x = t_1$, можно выписать системы, определяющие динамику по другим временам. Если ∂_{t_k} отвечает многочлену $A^{(k)} = \frac{1}{2}\mu^k - \dots - a_k$ в линейной задаче, то Q удовлетворяет уравнению

$$Q_{t_k} = 2(A^{(k)}Q_x - A^{(k)}_x Q). \tag{13}$$

Подставляя $\mu = y_j$, получаем $Q_{t_k}|_{\mu=y_j} = 2A^{(k)}Q_x|_{\mu=y_j}$, то есть

$$\frac{y_{j,t_k}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{2A^{(k)}(y_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $Q = CA$, то $A^{(k)}$ — это линейные комбинации q_i. В свою очередь, все q_i выражаются через симметрические многочлены от корней y_j, что даёт замкнутую систему.

В частности, дифференцированию ∂_t в силу КдФ отвечает $A^{(2)} = \frac{1}{2}\mu - u$, поэтому

$$\frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{y_j - 2u}{\prod\limits_{i\neq j}(y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{14}$$

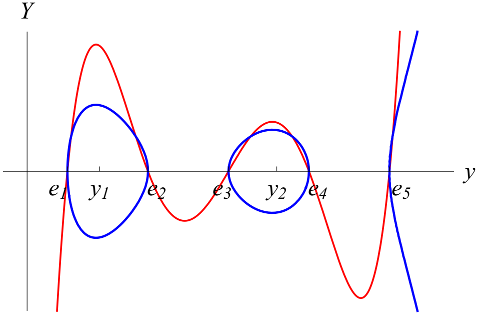
где u задано формулой (12).

Качественное поведение решения

Будем предполагать, что все корни e_k различны и вещественны. Пусть

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_{2n+1}.$$

Чтобы решение системы было вещественным, нужно, чтобы все переменные y_j лежали в тех интервалах, где $P(y) \geq 0$, то есть, $[e_{2k-1}, e_{2k}]$, $k = 1, \ldots, n$, или $[e_{2n+1}, \infty)$.



Синяя линия — кривая $Y^2 = P(y)$, красная — сам многочлен $Y = P(y)$.

Если начальные условия для y_i и y_j попадут в один интервал, в решении возникнет особенность из-за знаменателя $y_i - y_j$ в правой части (11).

Также, решение будет неограниченным, если какая-то переменная лежит в интервале $[e_{2n+1}, \infty)$. Таким образом, для вещественности и ограниченности решения следует задавать начальные условия для y_j так:

$$e_1 \le y_1 \le e_2 < e_3 \le y_2 \le e_4 < \dots < e_{2n-1} \le y_n \le e_{2n} < e_{2n+1}.$$

В этом случае переменные y_j отделены друг от друга и никаких особенностей в системе (11) возникнуть не может.

Переменные y_j крутятся каждая в своем овале, поэтому из формулы (12) ясно, что решение представляет собой ограниченную, квазипериодическую функцию по x и t.

Случай, когда все пары корней e_{2k} и e_{2k+1} сливаются, отвечает n-солитонному вырождению (конечно, возможны случаи, когда сливаются не все пары, тогда получается солитонное решение на конечнозонном фоне).

Замечание 4. Возвращаясь к ψ-функциям, можно доказать, что они строятся по формуле

$$\psi(x,\lambda) = Q(-4\lambda)^{1/2} \exp\left(\pm\sqrt{P(-4\lambda)} \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{2Q(-4\lambda)}\right). \qquad (15)$$

Рассмотрим последовательность интервалов, на которых P меняет знак.

При тех μ, для которых $P(\mu) < 0$ имеем экспоненту с мнимым показателем и регулярным подынтегральным выражением (поскольку нули A лежат там, где $P \geq 0$). Следовательно, для таких μ существует пара ограниченных, осциллирующих ψ-функций. Такие интервалы, следовательно, относятся к непрерывному спектру, они называются *разрешенными (стабильными) зонами*.

Дополнительные интервалы (в которых лежат нули y_j) называются *запрещенными зонами*, отвечающие им ψ-функции растут на одной или другой бесконечности.

Для ограниченного потенциала общего вида число чередующихся стабильных и нестабильных зон бесконечно. Решения уравнения Новикова характеризуются тем, что это число конечно, что и объясняет название.

Интегрирование в квадратурах

В элементарных функциях уравнения Дубровина не решаются. Мы видели, что при $n=1$ ответ записывается неявно через неполный эллиптический интеграл, обращение которого — эллиптическая функция.

При $n=2$ имеем ($2E=e_1+\dots+e_5$, $Y=y_1+y_2$, $4u=2Y-E$)

$$\begin{cases} \dfrac{y_{1,x}}{\sqrt{P(y_1)}}=\dfrac{1}{y_1-y_2},\\[2mm] \dfrac{y_{2,x}}{\sqrt{P(y_2)}}=\dfrac{1}{y_2-y_1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y_{1,t}}{\sqrt{P(y_1)}}=\dfrac{E-y_2}{y_1-y_2},\\[2mm] \dfrac{y_{2,t}}{\sqrt{P(y_2)}}=\dfrac{E-y_1}{y_2-y_1}. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольную точку y_0 и определим функции

$$F_k(y_1,y_2)=\int_{y_0}^{y_1}\omega_k+\int_{y_0}^{y_2}\omega_k,\quad k=0,1,$$

где $\omega_k=\dfrac{y^k\,dy}{\sqrt{P(y)}}$ (абелевы дифференциалы).

Несложно проверить, что

$$F_{0,x} = \frac{1}{y_1 - y_2} + \frac{1}{y_2 - y_1} = 0,$$
$$F_{1,x} = \frac{y_1}{y_1 - y_2} + \frac{y_2}{y_2 - y_1} = 1,$$
$$F_{0,t} = \frac{E - y_2}{y_1 - y_2} + \frac{E - y_1}{y_2 - y_1} = 1,$$
$$F_{1,t} = \frac{y_1(E - y_2)}{y_1 - y_2} + \frac{y_2(E - y_1)}{y_2 - y_1} = E,$$

то есть

$$F_0(y_1, y_2) = t + \delta_0, \quad F_1(y_1, y_2) = x + Et + \delta_1$$

— это два дополнительных первых интеграла (неавтономных).

Задача решена, в том смысле, что она сведена к разрешению этих неявных уравнений относительно y_1, y_2, после чего решение КдФ находится по формуле $u = (2y_1 + 2y_2 - E)/4$.

Для произвольного n имеем

$$2E = e_1 + \dots + e_{2n+1}, \quad Y = y_1 + \dots + y_n, \quad 4u = 2Y - E$$

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{s \neq j}(y_j - y_s)}, \quad \frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{E - Y + y_j}{\prod_{s \neq j}(y_j - y_s)}.$$

Определим

$$F_k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_0}^{y_j} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{P(y)}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Имеют место следующие элементарные алгебраические тождества:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^k}{\prod_{s \neq j}(y_j - y_s)} = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, n-2, \\ 1 & k = n-1, \\ Y & k = n. \end{cases} \tag{16}$$

Отметим, что их можно продолжить и для $k > n$, при этом в правой части возникают некоторые симметрические многочлены от y_j, например, при $k = n+1$ получается $\sum y_j^2 + \sum_{i<j} y_i y_j$ и так далее. Однако, нам достаточно $k \le n$.

Из этих тождеств следует, что

$$F_{0,x} = \dots = F_{n-2,x} = 0, \quad F_{n-1,x} = 1,$$

$$F_{0,t} = \dots = F_{n-3,t} = 0, \quad F_{n-2,t} = 1, \quad F_{n-1,t} = E.$$

Следовательно, ответ в квадратурах получен и задача сведена к разрешению неявных уравнений

$$F_0 = \delta_0, \dots, \; F_{n-3} = \delta_{n-3}, \; F_{n-2} = t + \delta_{n-2}, \; F_{n-1} = x + Et + \delta_{n-1},$$

где F_i зависят от $y_1, \dots, y_n$.

Осуществление этого последнего шага может быть сделано конструктивно, но это выходит за рамки нашей лекции. Опишем лишь примерно, что происходит.

Так как $\sqrt{P(y)}$ имеет точки ветвления, то значения интегралов F_k зависят от пути интегрирования, то есть, это многозначные функции. Правильно понимать их, как симметрические функции от n точек $(y_j, \sqrt{P(y_j)})$ на римановой поверхности гиперэллиптической кривой

$$\Gamma: \; Y^2 = P(y).$$

На этой поверхности есть $2n$ независимых циклов, при обходе вдоль которых значения интегралов от абелевых дифференциалов меняются на некоторые периоды. В результате, вектор $(F_0, \dots, F_{n-1})$ лежит на $2n$-мерном торе, который называется многообразием Якоби гиперэллиптической кривой (обобщение параллелограмма периодов для эллиптических функций).

Преобразование $(y_1, \dots, y_n) \to (F_0, \dots, F_{n-1})$ осуществляет отображение Абеля

$$\Gamma^n / S_n \to \mathbb{C}^{2n} / \Lambda,$$

где S_n — симметрическая группа, Λ — решетка периодов. Задача построения обратного отображения решается при помощи тета-функций на многообразии Якоби — они определяются рядами вида

$$\theta(z; B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \exp((m^t B m + 2z^t m)\pi i), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где B — некоторая матрица размера $n \times n$ (при $n = 1$ получается (6)).

- Б.А. Дубровин. Тэта-функции и нелинейные уравнения. *УМН* **36:2** (1981) 11–80.
- Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Мир, 1960.
- Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.

Домашнее задание

5.1. Проверьте, что если ψ, ϕ удовлетворяют уравнениям

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

то $Q = \psi\phi$ удовлетворяет (9). Чему при этом равно P? Используйте это для обоснования того, что P не зависит от x и t, а также того, что многосолитонным решениям отвечает случай, когда P имеет кратные корни.

5.2. В условиях предыдущей задачи, проверьте, что

$$Q_t = 2(aQ_x - a_xQ),$$

что подтверждает уравнение (13).

5.3. Докажите (с учетом предыдущих задач) формулу (15).

5.4. Докажите тождества (16).