В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 5 · 4 марта 2024

Высшие симметрии КдФ

План лекции

- Симметрии эволюционных уравнений
- Построение иерархии КдФ по однородности
- Другие примеры
- Коммутативность симметрий
- Построение иерархии КдФ по представлению нулевой кривизны
- Оператор рекурсии

Симметрии

Пусть дано эволюционное уравнение (напомним, что $u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, \ldots$; определения $\mathcal{F}$, $D = D_x$, D_t, ∇_f и f_* см. в лекции 2)

$$u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_n). \tag{1}$$

Его симметрией (высшей, если $m > n$) называется уравнение

$$u_\tau = g(x, u, u_1, \ldots, u_m) \tag{2}$$

такое, что перекрестные производные по t и τ совпадают: $(u_t)_\tau = (u_\tau)_t$. Иначе говоря, должно выполняться равенство, тождественно по u_j:

$$\nabla_g(f) = \nabla_f(g) \quad \Leftrightarrow \quad [f, g] := \nabla_f(g) - \nabla_g(f) = 0. \tag{3}$$

Это можно записать также, как

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0 \quad \text{или} \quad f_*(g) = g_*(f).$$

Замечание. Для простоты, мы рассматриваем автономный случай, когда f, g не зависят явно от t, τ (исключения будут позже для некоторых классических симметрий).

Простейший пример: иерархия Бюргерса

Ясно, что все линейные функции с постоянными коэффициентами коммутируют:

$$[u_n, u_m] = D^m(u_n) - D^n(u_m) = 0.$$

При точечных заменах и дифференциальных подстановках свойство коммутативности сохраняется. Сделаем замену к уравнению Бюргерса:

$$q_t = q_{xx} \quad \xrightarrow{q=e^v} \quad v_t = v_{xx} + v_x^2 \quad \xrightarrow{u=v_x=q_x/q} \quad u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Высшие симметрии пересчитываются так же:

$$q_{t_n} = q_n \quad \to \quad v_{t_n} = e^{-v}D^n(e^v) \quad \to \quad u_{t_n} = D(e^{-v}D^n(e^v))|_{v_{j+1}\to u_j}.$$

Это можно переписать так:

$$u_{t_n} = D(e^{-v}De^v)^n(1)|_{v_{j+1}\to u_j} = D(D+u)^n(1).$$

В результате получаем следующую последовательность уравнений:

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1,\\
u_{t_2} &= u_2 + 2uu_1,\\
u_{t_3} &= u_3 + 3uu_2 + 3u_1^2 + 3u^2{}_1,\\
u_{t_4} &= u_4 + 4uu_3 + 10u_1u_2 + 6u^2u_2 + 12uu_1^2 + 4u^3u_1, \quad \dots
\end{aligned}
$$

Здесь свойство коммутативности замаскировано, но можно проверить прямым вычислением, что оно выполняется (см. программу).

Заметим также, что

$$u_{t_{n+1}} = D(D+u)^{n+1}(1) = D(D+u)D^{-1}D(D+u)^n(1) = D(D+u)D^{-1}(u_{t_n}).$$

Так как

$$D(D+u)D^{-1} = (D^2 + uD + u_1)D^{-1} = D + u + u_1D^{-1},$$

то можно записать

$$u_{t_{n+1}} = R(u_{t_n}), \quad R = D + u + u_1D^{-1}. \tag{4}$$

Такие операторы, переводящие симметрию в симметрию более высокого порядка, называются *операторами рекурсии*.

Алгебра Ли симметрий

Несложно показать, что множество $\nabla_{\mathcal{F}} = \{\nabla_f : f \in \mathcal{F}\}$ всех эволюционных дифференцирований замкнуто относительно сложения и умножения на число, а также относительно коммутирования

$$[\nabla_f, \nabla_g] := \nabla_f \nabla_g - \nabla_g \nabla_f. \tag{5}$$

Утверждение 1. Для любых $f, g \in \mathcal{F}$

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f,g]}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно сравнить действие левой и правой части на динамические переменные. Используем то, что $\nabla_f(u_j) = D^j(f)$ и коммутативность $[\nabla_f, D] = 0$. Тогда:

$$\begin{aligned}
[\nabla_f, \nabla_g](u_j) &= \nabla_f(\nabla_g(u_j)) - \nabla_g(\nabla_f(u_j)) \\
&= \nabla_f(D^j(g)) - \nabla_g(D^j(f)) \\
&= D^j(\nabla_f(g) - \nabla_g(f)) \\
&= D^j([f,g]) = \nabla_{[f,g]}(u_j).
\end{aligned}$$

■

Следствие 1. Из определения (5) автоматически следует тождество Якоби

$$[[\nabla_f,\nabla_g],\nabla_h]+[[\nabla_g,\nabla_h],\nabla_f]+[[\nabla_h,\nabla_f],\nabla_g]=0,$$

поэтому замкнутость $\nabla_{\mathcal{F}}$ относительно коммутатора означает, что это множество есть алгебра Ли.

Следствие 2. Множество $\mathcal{F}$ само образует алгебру Ли относительно коммутатора $[f,g]=\nabla_f(g)-\nabla_g(f)$, причём отображение $f\mapsto\nabla_f$ является изоморфизмом. В частности, верно тождество

$$[[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0.$$

Следствие 3. Определение симметрии (3) равносильно коммутированию соответствующих эволюционных дифференцирований:

$$[f,g]=0\quad\Leftrightarrow\quad[\nabla_f,\nabla_g]=0,$$

то есть, перекрёстные производные совпадают не только для u, но также при действии на любые функции из $\mathcal{F}$.

Следствие 4. Из тождества Якоби следует, что коммутатор симметрий есть симметрия: если g и h коммутируют с f, то это же верно и для $[g, h]$. Иначе говоря, симметрии фиксированного уравнения

$$\mathrm{Sym}_f = \{g \in \mathcal{F} : \ [f, g]\}$$

образуют алгебру Ли (подалгебру Ли в $\nabla_{\mathcal{F}}$).

Достаточно типична ситуация, когда Sym_f — коммутативная алгебра Ли (по крайней мере, если ограничиться автономными симметриями), то есть, высшие симметрии являются симметриями и друг для друга. Это полезное свойство, но его нужно доказывать отдельно в каждом случае.

Существование высших симметрий — очень жесткое требование, характеризующее интегрируемые уравнения, наравне с существованием высших законов сохранения.

Гипотеза Фокаса. Если (скалярное) уравнение $u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_n)$ имеет хотя бы одну высшую симметрию, то оно имеет симметрии сколь угодно высокого порядка.

- A.S. Fokas. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* **21:6** (1980) 1318–1325.
- N.H. Ibragimov, A.B. Shabat. Evolutionary equations with nontrivial Lie–Bäcklund group. *Funct. Anal. Appl.* **14:1** (1980) 25–36.

Приложения симметрий

1) Построение конечномерных редукций

Пусть дано уравнение $u_t = f$. Стационар любой его симметрии $u_\tau = g$, то есть, уравнение $g = 0$ — это некоторое ОДУ, совместное с исходным уравнением. Действительно, по определению симметрии

$$D_t(g) = f_*(g) = 0 \ \text{ если } \ g = 0.$$

Так как высших симметрий много (если уж они вообще есть) и их можно складывать, то такие ОДУ есть в неограниченном количестве

$$c_1 g_1 + c_2 g_2 + \dots + c_k g_k = 0, \tag{7}$$

сколь угодно высокого порядка по производным. Это редукции, сводящие решение УЧП к решению ОДУ.

Многосолитонные решения КдФ вкладываются в эту схему: они удовлетворяют стационарным уравнениям для высших симметрий КдФ (уравнения Новикова). При этом условие быстроубывания фиксирует нулевые значения первых интегралов для этих стационарных уравнений.

Если же не требовать быстроубывания, то возникают более общие решения — конечнозонные. Благодаря тому, что алгебра высших симметрий КдФ коммутативна, уравнения Новикова наследуют эту алгебру, то есть, (7) совместно не только с КдФ, но и самими высшими симметриями. Это приводит к тому, что уравнения Новикова оказываются интегрируемыми в смысле теоремы Лиувилля–Арнольда. Их решение сводится к квадратурам, хотя и весьма сложным. Этим мы займёмся на следующей лекции.

Данную конструкцию можно обобщать, добавляя в сумму (7) неавтономные симметрии (так называемые струнные уравнения). Однако, для них совместность с высшими симметриями нарушается, в результате интегрируемость в квадратурах пропадает. Решения выражаются через трансценденты Пенлеве или их высшие аналоги (или, лучше сказать, что эти уравнения определяют эти трансценденты...). Этой темы мы тоже слегка коснёмся в конце курса.

2) Классификация интегрируемых уравнений

Для *заданного* уравнения $u_t = f(x, u, \ldots, u_n)$ вычисление симметрии $u_\tau = g(x, u, \ldots, u_m)$ фиксированного порядка m — достаточно алгоритмическая задача. Уравнение $[f, g] = 0$ расщепляется по переменным $u_{m+1}, \ldots, u_{m+n-1}$, поэтому оно сводится к некоторой переопределенной системе в частных производных относительно g. Из неё постепенно уточняется зависимость g от аргументов, начиная с u_m. На некотором шаге может возникнуть противоречивая система, тогда симметрия не существует.

В частности, нетрудно доказать следующее утверждение (оставляется в качестве ДЗ).

Утверждение 2. Если старшая производная входит в уравнение линейно с постоянным коэффициентом, то и симметрия (если она существует) имеет такую же структуру:

$$u_t = u_n + F(x, u, \ldots, u_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad u_\tau = u_m + G(x, u, \ldots, u_{m-1}),$$

при $n, m > 1$ (коэффициенты можно считать равными 1 без потери общности, так как потоки можно умножать на число).

Можно доказать и более общую формулу

$$(\partial_{u_n}(f))^{1/n} = \mathrm{const}(\partial_{u_m}(g))^{1/m}.$$

Поиск *всех* уравнений, допускающих симметрии, то есть, пар функций f, g — существенно более сложная задача. В общем случае она вряд ли разрешима, даже при небольших n, m. Для целей классификации интегрируемых уравнений обычно требуют те или иные дополнительные условия.

Известны классификационные результаты (в виде конечных списков уравнений) для следующих классов эволюционных уравнений:

$$u_t = f(x, u, u_1, u_2),$$
$$u_t = a(x, u, u_1, u_2)u_3 + F(x, u, u_1, u_2),$$
$$u_t = u_5 + F(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Уравнения порядков $4, 6, \dots$ являются симметриями уравнений второго порядка. Для уравнений нечётного порядка, по-видимому, верно, что уравнения порядка $7, 9, 11, \dots$ являются симметриями уравнений порядка 3 или 5.

Также имеется классификация систем (типа уравнения НШ и Буссинеска)

$$u_t = u_2 + a(x, u, v, u_1, v_1), \quad v_t = -v_2 + b(x, u, v, u_1, v_1),$$

гиперболических уравнений $u_{xy} = \ldots$, дифференциально-разностных уравнений $u_{n,t} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ (здесь n — номер, а не производная) и некоторых других типов уравнений.

- A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* **42:4** (1987) 1–63.
- A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. *in: V.E. Zakharov (ed). What is Integrability? Springer-Verlag, 1991*, pp. 115–184.

Вычисление симметрий КдФ по однородности

Для полиномиальных уравнений (а также для некоторых рациональных) для построения высших симметрий можно использовать свойство однородности. Для КдФ мы видели, что плотности законов сохранения можно искать методом неопределенных коэффициентов, это же годится и для симметрий. Уравнение КдФ однородно относительно весов

$$\partial_t : \partial_x : u = 3 : 1 : 2,$$

причём в каждом весе имеется конечное число мономов:

вес 2:	u
вес 3:	u_1
вес 4:	$u_2,\ u^2$
вес 5:	$u_3,\ uu_1$
вес 6:	$u_4,\ uu_2,\ u_1^2,\ u^3$
вес 7:	$u_5,\ uu_3,\ u_1u_2,\ u^2u_1$
вес 8:	$u_6,\ uu_4,\ u_1u_3,\ u_2^2,\ u^2u_2,\ uu_1^2,\ u^4$

и так далее.

- Составляем симметрию $u_\tau = g$, где g — линейная комбинация мономов одного веса.
- Из Утв. 2 следует, что старшая производная входит в g линейно с постоянным коэффициентом, то есть, в симметрию порядка m обязательно входит моном u_m. Коэффициент при нём сразу берем равным 1, коэффициенты при остальных мономах — неопределённые.
- Вычисляем коммутатор, собираем коэффициенты, решаем систему линейных уравнений. Можно гарантировать, что если решение существует, то оно единственно (так как если есть два разных решения, то их разность — симметрия без линейного члена u_m, что невозможно).

В результате возникает такая последовательность симметрий:

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1 \\
u_{t_3} &= u_3 - 6uu_1 \\
u_{t_5} &= (u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3)_x \\
u_{t_7} &= (u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4)_x \\
u_{t_9} &= (u_8 - 18uu_6 - 54u_1u_5 - 114u_2u_4 - 69u_3^2 + 126u^2u_4 \\
&\qquad + 504uu_1u_3 + 378uu_2^2 + 462u_1^2u_2 - 420u^3u_2 - 630u^2u_1^2 + 126u^5)_x \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Это вычисление проиллюстрировано в приложенной программе. Симметрии чётного порядка не обнаруживаются, и оказывается, что правые части лежат в $\operatorname{Im} D$.

Можно еще немного поэкспериментировать. Попробуем поискать с неопределёнными коэффициентами не только g, но и f. В третьем порядке понятно, что кроме КдФ ничего нет. В четвертом порядке тоже ничего не находится. В пятом порядке, разумеется, находится симметрия КдФ, но, кроме неё, обнаруживаются ещё пара уравнений:

Савады–Котеры [K. Sawada, T. Kotera. *Progr. Theor. Phys.* ***51:5*** (1974) 1355–1367]

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1$$

и Каупа–Купершмидта [D.J. Kaup. *Stud. Appl. Math.* **62:3** (1980) 189–216]

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1.$$

У каждого из них есть симметрии порядков 7, 11, 13, 17,..., то есть, из натурального ряда вычеркиваются числа, кратные 2 и 3 (тогда как для КдФ вычеркиваются только кратные 2).

Можно поэкспериментировать и с другими весами (например, $\partial_x : u = 1 : 1$, как в уравнениях Бюргерса и мКдФ), но мы не будем на этом останавливаться.

Коммутативность высших уравнений КдФ

Высшие уравнения КдФ служат симметриями не только для КдФ, но и друг для друга, то есть, они образуют коммутативную алгебру Ли. Это можно доказать разными способами, в частности, используя другие их определения через представления Лакса или нулевой кривизны. Но, есть и очень простое доказательство, использующее свойство полиномиальности.

Утверждение 3. Пусть уравнение имеет вид

$$u_t = u_n + P(u, \dots, u_{n-1}),$$

где P — многочлен по u_j без свободного члена, и обладает симметриями такого же вида

$$u_{\tau_1} = g_1 = u_{m_1} + P_1(u, \dots, u_{m_1-1}), \quad u_{\tau_2} = g_2 = u_{m_2} + P_2(u, \dots, u_{m_2-1}),$$

где P_1, P_2 многочлены без свободного члена. Тогда $[g_1, g_2] = 0$.

Доказательство. Согласно Следствию 4, $h=[g_1,g_2]$ является симметрией исходного уравнения. Тогда из Утверждения 2 следует, что $h=c(u_l+H)$, где l — старшая переменная. Однако, в коммутаторе g_1 и g_2 линейных членов нет, так как линейные слагаемые из g_1, g_2 коммутируют, а мономы более высокой степени линейных членов не дают (если G_i — моном общей степени r_i по всем u_j, то $[G_1,G_2]$ есть некоторая сумма мономов степени r_1+r_2-1). Следовательно $c=0$. ∎

Вывод симметрий КдФ из уравнений для ψ

Как мы помним, уравнение КдФ есть условие совместности для уравнений вида

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \qquad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x$$

или, в матричной записи

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2(u-\lambda)a & a_x \end{pmatrix}.$$

Условие совместности

$$U_t = V_x + [V, U] \tag{9}$$

эквивалентно одному скалярному уравнению

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a \tag{10}$$

и даёт КдФ при выборе $a = -2\lambda - u$. Пусть теперь a — многочлен по λ (удобно его записывать по степеням -4λ):

$$a = -a_0(-4\lambda)^n - a_1(-4\lambda)^{n-1} - \dots - a_n. \tag{11}$$

Подставим это в (10) и соберем коэффициенты:

$$
\begin{array}{lcl}
(-4\lambda)^{n+1} & : & a_{0,x} = 0 \\
(-4\lambda)^{n} & : & a_{1,x} = a_{0,xxx} - 4ua_{0,x} - 2u_x a_0 \\
(-4\lambda)^{n-1} & : & a_{2,x} = a_{1,xxx} - 4ua_{1,x} - 2u_x a_1 \\
\quad \dots & : & \qquad\qquad \dots \\
(-4\lambda)^{1} & : & a_{n,x} = a_{n-1,xxx} - 4ua_{n-1,x} - 2u_x a_{n-1} \\
\quad 1 & : & u_t = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n =: a_{n+1,x}.
\end{array}
$$

Получаются рекуррентные соотношения, из которых находятся $a_0, \dots, a_n$, а последнее уравнение превращается в эволюционное уравнение на u. Это и будет высшая симметрия КдФ.

Положим $a_0 = -1/2$ и будем пренебрегать константами интегрирования. Тогда последовательно находим

$$
\begin{gathered}
a_{1,x} = u_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = u; \\
a_{2,x} = a_{1,xxx} - 4ua_{1,x} - 2u_x a_1 = u_3 - 6uu_1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = u_2 - 3u^2; \\
a_{3,x} = a_{2,xxx} - 4ua_{2,x} - 2u_x a_2 = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1 \quad \Rightarrow \\
a_3 = u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3
\end{gathered}
$$

и так далее.

Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ строится по одним и тем же формулам при всех n: от n зависит лишь, в каком месте она обрывается.

Естественно, для разных n получаются разные уравнения для u. Обозначим соответствующее время через t_{2n+1}:

$$u_{t_{2n+1}} = g_n = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n = a_{n+1,x}. \tag{12}$$

Возникает бесконечная последовательность уравнений, которая в точности совпадает с (8).

Возникают два вопроса:

— почему $g_j \in \mathcal{F}$, хотя вычисления по формулам (12) требуют интегрирования по x. Действительно ли можно продолжать эту последовательность неограниченно?

— как доказать, что получается именно последовательность (8)?

Локальность высших уравнений КдФ

Переход от a_j к a_{j+1} включает в себя интегрирование. Докажем, что оно не выводит за пределы дифференциальных многочленов. Оказывается, интегрирование можно провести сразу для всех a_j. Рассмотрим производящую функцию

$$A = -a_0 - a_1/(-4\lambda) - a_2/(-4\lambda)^2 - \dots - a_n/(-4\lambda)^n - \dots,$$

то есть, делим многочлен (11) на $(-4\lambda)^n$ и устремляем n к бесконечности. В результате, в уравнении (10) пропадает свободный член u_t и для A получается уравнение

$$-4\lambda A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_xA \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda A_x = K(A). \tag{13}$$

Оно допускает интегрирующий множитель $2A$:

$$-8\lambda AA_x = 2AA_{xxx} - 8uAA_x - 4u_xA^2 \quad \Rightarrow$$

$$-4\lambda A^2 = 2AA_{xx} - A_x^2 - 4uA^2 + c, \tag{14}$$

где $c = -4a_0^2\lambda + c_0 + c_1/(-4\lambda) + c_2/(-4\lambda)^2 + \dots$ — постоянная интегрирования.

Если расписать уравнение (14) по степеням -4λ, то получится

$$\begin{aligned}-a_0a_{n+1}-\dots-a_{n+1}a_0=2(&a_0a_{n,xx}+\dots+a_{0,xx}a_n)\\&-(a_{0,x}a_{n,x}+\dots+a_{n,x}a_{0,x})\\&-4u(a_0a_n+\dots+a_na_0)+c_n.\end{aligned}$$

Так как $a_0=-1/2$, это даёт явное выражение для a_{n+1} через все предыдущие a_j. Отсюда следует, что все a_n действительно являются дифференциальными многочленами от u.

Замечание. Есть и другой, «более научный» способ вывода соотношения (14). Он полезен, когда интегрирующий множитель не очевиден. Используем представление нулевой кривизны (9) $U_t-V_x=[V,U]$, разделим его на $(-4\lambda)^n$ и устремим n к бесконечности. При этом матрица V перейдет в матрицу

$$M=\begin{pmatrix}-A_x & 2A\\ -A_{xx}+2A(u-\lambda) & A_x\end{pmatrix},$$

а уравнение (9) превратится в матричное уравнение Лакса

$$M_x=[U,M].$$

Из тождества Лиувилля (мы его уже вспоминали в лекции про многосолитонные решения)

$$(\log\det M)_x = \operatorname{tr}(M_x M^{-1})$$

следует

$$(\log\det M)_x = \operatorname{tr}([U,M]M^{-1}) = \operatorname{tr} U - \operatorname{tr} MUM^{-1} = 0,$$

то есть,

$$\det M = 2AA_{xx} - A_x^2 - 4(u-\lambda)A^2 = -c = \mathrm{const},$$

что совпадает с (14).

Оператор рекурсии

Рекуррентные соотношения удобно записать в операторном виде. Пусть

$$K = D^3 - 4uD - 2u_x,$$

тогда

$$g_n = D(a_{n+1}) = K(a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0 = \mathrm{const}\,.$$

Очевидно, это можно записать как

$$a_{n+1} = D^{-1}K(a_n),$$

где D^{-1} — оператор интегрирования по x. Аналогично, можно написать уравнение для g_n: так как $a_n = D^{-1}(g_{n-1})$, то

$$g_n = KD^{-1}(g_{n-1}) = R(g_{n-1}), \qquad R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}. \tag{15}$$

Оператор R называется оператором рекурсии. Высшие уравнения КдФ можно определить, как

$$u_{t_{2n+1}} = R^n(u_x).$$

Определение. Оператор R называется оператором рекурсии для уравнения $u_t = f$, если он переводит любую симметрию этого уравнения в симметрию (то есть, если $u_\tau = g$ — симметрия, то и $u_T = R(g)$ — симметрия).

Утверждение 4. Для того, чтобы R был оператором рекурсии, достаточно, чтобы он удовлетворял соотношению

$$[\nabla_f - f_*, R] = 0. \tag{16}$$

Доказательство. По определению, симметрия $u_\tau = g$ характеризуется равенством

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0.$$

Применяя R, получаем

$$R((\nabla_f - f_*)(g)) = (\nabla_f - f_*)(R(g)) = 0,$$

что и означает, что $u_T = R(g)$ — тоже симметрия. ∎

Заметим, что для любого дифференциального оператора вида

$$R = r_n D^n + \dots + r_0 + \dots + r_{-k} D^{-k},$$

с $r_j \in \mathcal{F}$, коммутатор $[\nabla_f, R]$ сводится просто к дифференцированию всех коэффициентов:

$$[\nabla_f, R] = \nabla_f(r_n) D^n + \dots + \nabla_f(r_0) + \dots + \nabla_f(r_{-k}) D^{-k} =: \nabla_f(R).$$

Действительно, так как ∇_f коммутирует с D, то для любой функции $h \in \mathcal{F}$ имеем

$$[\nabla_f, R](h) = \nabla_f(R(h)) - R(\nabla_f(h)) = \nabla_f(R)(h).$$

С учётом этого замечания, (16) можно записать, как

$$\nabla_f(R) = [f_*, R]. \tag{17}$$

Пример

Проверим, что $R = D + u_1$ — оператор рекурсии для потенциального уравнения Бюргерса

$$u_t = u_2 + u_1^2. \tag{18}$$

Имеем

$$f = u_2 + u_1^2, \quad f_* = D^2 + 2u_1 D = (D + u_1)(D + u_1) - u_2 - u_1^2 = R^2 - f,$$

тогда

$$\nabla_f(R) = \nabla_f(u_1) = D(f),$$
$$[f_*, R] = [R^2 - f, R] = [R, f] = [D + u_1, f] = [D, f] = D(f),$$

результаты совпали.

Следовательно, (18) допускает симметрии

$$u_{t_3} = (D + u_1)(u_2 + u_1^2) = u_3 + 3u_1 u_2 + u_1^3,$$
$$u_{t_4} = u_4 + 4u_1 u_3 + 3u_2^2 + 6u_1^2 u_2 + u_1^4$$

и так далее.

Оператор рекурсии для КдФ

Покажем, что все высшие уравнения КдФ

$$u_{t_{2n+1}} = R^n(u_1), \quad R = D^2 - 4u - 2u_1 D^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

являются симметриями КдФ. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 5. Оператор R служит оператором рекурсии для уравнения $u_t = u_3 - 6uu_1$.

Доказательство. Имеем

$$\nabla_f(R) = -4u_t - 2u_{1,t}D^{-1} = -4(u_3 - 6uu_1) - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}. \quad (19)$$

Теперь вычислим коммутатор $f_* = D^3 - 6uD - 6u_1$ и R, разбивая R на слагаемые.

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6(uD^3+2u_1D^2+u_2D)+6u_1D^2+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-4uD^3-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+4uD^3+24u^2D+24uu_1-24u^2D$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3 \\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D \\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}. \qquad \blacksquare
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,D^2]&=[-6uD-6u_1,D^2]\\
&=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1\\
&=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3\\
&=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-4u]&=[D^3-6uD,-4u]\\
&=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D\\
&=-4uD^3-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+4uD^3+24u^2D+24uu_1-24u^2D\\
&=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]&=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]\\
&=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u\\
&=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u\\
&=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}. \qquad \blacksquare$$

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] = [-6uD - 6u_1, D^2]$$
$$= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1$$
$$= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3$$
$$= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] = [D^3 - 6uD, -4u]$$
$$= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D$$
$$= -\cancel{4uD^3} - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2D}$$
$$= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] = [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}]$$
$$= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u$$
$$= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u$$
$$= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.$$

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-\cancel{2u_1D^2}-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+\cancel{12uu_1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+\cancel{2u_1D^2}-\cancel{12u_1u}$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] = [-6uD - 6u_1, D^2]\\
&\quad = -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1\\
&\quad = -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3\\
&\quad = \cancel{12u_1D^2} + \cancel{18u_2D} + \cancel{6u_3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] = [D^3 - 6uD, -4u]\\
&\quad = -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D\\
&\quad = -\cancel{4uD^3} - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2D}\\
&\quad = -\cancel{12u_1D^2} - \cancel{12u_2D} - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] = [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}]\\
&\quad = -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u\\
&\quad = -\cancel{2u_1D^2} - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + \cancel{12uu_1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + \cancel{2u_1D^2} - \cancel{12u_1u}\\
&\quad = -\cancel{6u_2D} - \cancel{6u_3} - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (19):

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

Выводы

Итак, уравнение КдФ обладает бесконечномерной и коммутативной алгеброй Ли высших симметрий (иерархия КдФ). Любое из этих уравнений ничуть не хуже КдФ по свойствам. В частности, для него есть представление нулевой кривизны и можно повторить все вычисления многосолитонных решений из лекции 3 (метод потенциалов Баргманна). Различие будет только в показателях экспонент: если в случае КдФ фазы имели вид

$$k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j,$$

то фазы для решения, удовлетворяющего всей иерархии равны

$$k_j x + 4k_j^3 t_3 + 16k_j^5 t_5 + 64k^7 t_7 + \cdots + \delta_j.$$

Если положить $t_{2n+1} = 0$ начиная с какого-то номера, то решение будет функцией от $x, t_3, \ldots, t_{2n-1}$, удовлетворяющей каждому из уравнений $u_{t_{2j+1}} = g_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Все ли симметрии КдФ мы получили? Оказывается, нет — есть и другие. Мы рассматривали только автономные симметрии. Но, есть и симметрии, в которые явно входит t. Во-первых, это классические симметрии Галилея и растяжения. Во-вторых, к этим классическим симметриям можно применять оператор рекурсии — это даст еще одну последовательность высших симметрий. Однако, они будут более сложными — мало того, что неавтономные, но и еще нелокальные и некоммутативные. Тем не менее, их тоже можно применять для построения решений (Пенлеве типа).

Домашнее задание

5.1. Докажите прямой проверкой уравнения (17), что оператор (4) — оператор рекурсии для уравнения Бюргерса.

5.2. Докажите сделанное выше Утверждение 2 о уравнениях с отделённой старшей производной:

пусть $f = u_n + F(x, u, \dots, u_{n-1})$, $n \geq 2$, и $[f, g] = 0$, где $g = g(x, u, \dots, u_m)$, $\partial_{u_m}(g) \neq 0$, тогда $g = u_m + G(x, u, \dots, u_{m-1})$ с точностью до числового множителя.

Для этого в уравнении $[f, g] = 0$ необходимо проследить за всеми членами содержащими u_{m+n} (они должны сократиться тождественно) и u_{m+n-1} (из них получится требуемое утверждение).

5.3. Все определения можно обобщить на случай систем. Проверьте, на простейшем языке перекрестного дифференцирования, что система НШ

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2v^2 u$$

обладает симметрией

$$u_\tau = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_\tau = v_{xxx} + 6uvv_x.$$

5.4. (необязательно) Оператор рекурсии для НШ имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} D^{-1}(v, u),$$

где подразумевается, что симметрии записываются в виде вектора-столбца и $D^{-1}(v,u)$ — это оператор скалярного умножения на вектор-строку (v,u) и последующего интегрирования. Проверьте, что уравнения из предыдущей задачи строятся применением R к затравочной симметрии

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_0} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}.$$

Эти вычисления нетрудно реализовать и на компьютере.