В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 4 · 26 февраля 2024

Представления Лакса и нулевой кривизны
Примеры

План лекции

- Матричные представления нулевой кривизны
- Представления Лакса в дифференциальных операторах
- Примеры

Представление нулевой кривизны

На предыдущей лекции мы проверили, что уравнение КдФ $\Leftrightarrow$ условию совместности некоторых вспомогательных линейных уравнений. Формализуем это вычисление.

Пусть даны линейные уравнения общего вида

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \tag{1}$$

где Ψ — n-мерный вектор, U и V матрицы $n \times n$. Это конечномерные системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Условие их совместности записывается совершенно прозрачно:

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= U_t\Psi + U\Psi_t = (U_t + UV)\Psi \\ &= V_x\Psi + V\Psi_x = (V_x + VU)\Psi. \end{aligned}$$

Так как Ψ — вектор из независимых переменных, то это равносильно тому, что коэффициенты при Ψ тождественно равны. В результате, приходим к следующему определению.

Определение 1. УЧП допускает *представление нулевой кривизны*, если оно эквивалентно уравнению

$$U_t - V_x = [V, U], \tag{2}$$

где U и V матрицы подходящей размерности > 1, зависящие от динамических переменных (полей) для данного уравнения и от спектрального параметра λ.

Пример с КдФ сюда прекрасно подходит. Напомним наши уравнения. Мы стартовали с

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \qquad \psi_t = b\psi + 2a\psi_x,$$

нашли отсюда

$$\psi_{xt} = (b_x + 2(u - \lambda)a)\psi + (b + 2a_x)\psi_x$$

и затем проверили, что равенство $(\psi_{xt})_x = (\psi_{xx})_t$ равносильно

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u - \lambda)a_x + 2u_x a.$$

Здесь можно считать $b = -a_x$ без потери общности.

Приходим к уравнению

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a \tag{3}$$

и получаем КдФ при выборе $a = -2\lambda - u$.

Уравнения для ψ записываются в матричном виде (1), если положить

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2(u-\lambda)a & a_x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Уравнению КдФ отвечает матрица V с $a = -2\lambda - u$, то есть

$$V = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda - 2u \\ u_{xx} + 2(\lambda - u)(2\lambda + u) & -u_x \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В результате, все наши вычисления переформулируются в виде следующего утверждения, которое можно проверить и независимо.

Утверждение 1. Уравнение КдФ допускает представление нулевой кривизны (2) с указанными матрицами U и V.

Заметим, что выбор a — не единственно возможный. В качестве a можно было бы принять произвольную функцию от $u, u_1, u_2, \dots, u_n = \partial_x^n(u)$, что превращает (3) в эволюционное уравнение довольно общего вида.

Однако, требуется, чтобы это уравнение не содержало параметра λ, то есть, он должен тождественно сокращаться в правой части.

Это делает конструкцию жёсткой — коэффициент a должен быть многочленом по λ (это неправда...), и все его коэффициенты однозначно определяются, с точностью до констант интегрирования.

В результате, возникает последовательность «высших» уравнений КдФ. Мы обсудим их на следующей лекции. Пока ограничимся одним примером, следующим по простоте за КдФ:

$$\begin{aligned} a &= -2\lambda - u && \Rightarrow \quad u_t = u_3 - 6uu_1, \\ a &= 8\lambda^2 + 4u\lambda - u_2 + 3u^2 && \Rightarrow \quad u_t = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1. \end{aligned}$$

- С точки зрения построения решений, требование, чтобы матрицы зависели от λ важно для того, чтобы ψ-функции удовлетворяющие (1) имели нетривиальную зависимость от λ, как параметра. Мы видели, что это применяется в конструкциях, связанных с разложениями в ряды по λ. Также, метод обратной задачи рассеяния основан на изучении спектральных свойств уравнений (1) (при каких λ имеются локализованные или ограниченные решения; данные рассеяния и их зависимость от t).

- Существование нетривиального представления является сильным свойством, которое можно принять за определение интегрируемости. В принципе, есть некоторые алгоритмы, позволяющие для заданного уравнения найти матрицы U, V или доказать, что их не существует. Однако, они довольно сложны и не универсальны, и мы не будем на этом останавливаться.

Замечание. При поиске и использовании матричных представлений следует учитывать *калибровочные преобразования*

$$\Psi = K\tilde{\Psi}, \quad U = K\tilde{U}K^{-1} + D_x(K)K^{-1}, \quad V = K\tilde{V}K^{-1} + D_t(K)K^{-1},$$

где $K = K[u,\lambda]$ произвольная невырожденная матрица. Представления, связанные такой заменой, называются калибровочно эквивалентными. Требуется, чтобы они не получались из каких-то тривиальных (например, диагональных или без λ). Например, пусть

$$U = \begin{pmatrix} u & \lambda(u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} f & \lambda(f+1) \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $f = f(x,u,u_1,\dots,u_n) \in \mathcal{F}$ произвольная функция, тогда (2) эквивалентно уравнению $u_t = D_x(f)$. Получается, что представление нулевой кривизны есть у *произвольного* уравнения такого вида? Увы, это *fake representation*: U и V получаются из диагональных матриц:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Никакой пользы от такого представления нет. Распознать фальшивые представления может быть не так-то просто.

Другие примеры

Конечно, кроме КдФ есть и другие нетривиальные примеры.

Пример 1. Рассмотрим матрицы вида

$$U=\begin{pmatrix}-\lambda & -v\\ u & \lambda\end{pmatrix},\quad V=2\lambda U+U_1,\quad U_1=\begin{pmatrix}-uv & v_x\\ u_x & uv\end{pmatrix},\tag{6}$$

тогда уравнение (2) оказывается эквивалентным 2-компонентной эволюционной системе

$$u_t=u_{xx}+2u^2v,\quad -v_t=v_{xx}+2uv^2.\tag{7}$$

Это нелинейное уравнение Шрёдингера (система Захарова–Шабата или система Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура). Заметим, что здесь можно выделить несколько вещественных форм. Во-первых, можно считать $u,v\in\mathbb{R}$. Во-вторых, можно сделать замену $t\to it$, после чего появляются редукции $v=\pm u^*$, приводящие к уравнениям

$$-iu_t=u_{xx}\pm 2|u|^2u.\tag{NLS$^\pm$}$$

Как и в случае КдФ, увеличивая степень V по λ, получим системы более высокого порядка. Например, выбор

$$V = 4\lambda^2 U + 2\lambda U_1 + U_2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & -v_{xx} - 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & u_x v - uv_x \end{pmatrix}, \tag{8}$$

приводит к системе

$$u_t = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_t = v_{xxx} + 6uvv_x. \tag{9}$$

Здесь возможны редукции $v = \pm u$, приводящие к мКдФ$^{\pm}$

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2 u_x.$$

Также можно положить $v = 1$, в результате опять получится КдФ.

Пример 2. Пусть

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda & -u_x\\ u_x & -\lambda\end{pmatrix},\quad V=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & \sin u\\ \sin u & -\cos u\end{pmatrix},$$

тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению sin-Гордон

$$u_{xt}=\sin u. \tag{10}$$

Если же взять

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda & u_x\\ u_x & -\lambda\end{pmatrix},\quad V=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}\cosh u & -\sinh u\\ \sinh u & -\cosh u\end{pmatrix},$$

то получится уравнение sinh-Гордон

$$u_{xt}=\sinh u. \tag{11}$$

Отметим, что матрица U здесь фактически та же, что и в (6), с точностью до замены $u\to u_x$, $v\to \pm u_x$ и несущественных переобозначений. Как и в случае уравнений мКдФ$^\pm$, НШ$^\pm$, уравнения (10) и (11) эквивалентны, если считать переменную u комплексной, но вещественные решения этих уравнений друг к другу не сводятся.

Представление Лакса

Определение 2. Нелинейное УЧП допускает представление Лакса, если оно эквивалентно уравнению

$$L_t = [A, L], \tag{12}$$

где A и L — дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от динамических переменных для данного уравнения.

Замечание. L и A могут быть и другой природы, например, это могут быть разностные или матричные операторы, или элементы некоторой алгебры Ли; но для КдФ нужны дифференциальные операторы, как и было в оригинальной работе Лакса.

Для КдФ, перепишем линейные уравнения

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \qquad \psi_t = u_x\psi - 2(2\lambda + u)\psi_x$$

в операторном виде. Здесь уравнение для ψ_t не содержит производных ψ по x выше первого порядка, так как они исключены в силу уравнения Шрёдингера.

Но, вместо исключения производных можно исключать параметр λ — это и приводит к операторам. Продифференцируем первое уравнение по x и сократим во втором член с $\lambda\psi_x$, тогда уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi.$$

Это можно записать как

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = A\psi, \tag{13}$$

где L — оператор Шрёдингера, а A — оператор третьего порядка:

$$L = -D_x^2 + u, \quad A = 4D_x^3 - 6uD_x - 3u_x. \tag{14}$$

Тогда условие совместности записывается так:

$$(L_t + LA)\psi = \lambda A\psi = AL\psi \quad \Rightarrow \quad L_t = [A, L].$$

Поясним, что ДО состоят не только из дифференцирований, но и из умножений на функции: если $L = -D_x^2 + u$, то $L\psi = -\psi_{xx} + u\psi$.

Произведение ДО определяется правилом композиции:

$$(AB)(f) = A(B(f)).$$

Отсюда, в частности, следует правило Лейбница для перестановки $D = D_x$ и оператора умножения на a:

$$(Da)(b) = D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad \Rightarrow \quad Da = aD + D(a).$$

По индукции можно доказать также формулу

$$D^n a = aD^n + \binom{n}{1} D(a) D^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} D^{n-1}(a) D + D^n(a),$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (ясно, что это просто формула для $D^n(ab)$).

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(uD^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4uD^3 \\
&\qquad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u]\\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD\\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x\\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3\\
&\qquad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D\\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D\\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx})\\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L=-D^2+u,\quad A=4D^3-6uD-3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t,L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t=u_t&=[4D^3-6uD-3u_x,-D^2+u]\\
&=4D^3u-4uD^3+6uD^3-6D^2uD\\
&\qquad-6uDu+6u^2D+3u_xD^2-3D^2u_x\\
&=4(\cancel{u}D^3+3u_xD^2+3u_{xx}D+u_{xxx})-4\cancel{u}D^3\\
&\qquad+6\cancel{u}D^3-6(\cancel{u}D^2+2u_xD+u_{xx})D\\
&\qquad-6u(uD+u_x)+6u^2D\\
&\qquad+3u_xD^2-3(u_xD^2+2u_{xx}D+u_{xxx})\\
&=u_{xxx}-6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3\cancel{u}_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2\cancel{u}_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Проверим, что уравнение Лакса с операторами

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3\cancel{u}_xD^2 + 3\cancel{u}_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2\cancel{u}_xD + \cancel{u}_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2\cancel{u}_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Домашнее задание

4.1. Проверьте, что уравнение Буссинеска

$$u_{tt} + 3(u_{xx} + 2u^2)_{xx} = 0 \tag{15}$$

допускает представление Лакса $L_t = [A, L]$ с операторами

$$L = D_x^3 + uD_x + v, \quad A = 3D_x^2 + 2u.$$

(Сначала выпишите систему на u, v, затем исключите v). Перепишите это представление (используя уравнения (13)) в виде представления нулевой кривизны в матрицах 3×3.

4.2. Покажите, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили

$$(u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x = 3u_{yy} \tag{16}$$

служит условием совместности $\psi_{yt} = \psi_{ty}$ для вспомогательных линейных уравнений вида

$$\psi_y = \psi_{xx} - u\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x + v\psi. \tag{17}$$

(Получите систему на коэффициенты u, v и исключите в ней v.) Как это можно записать в операторной форме?

Замечание. Уравнения (17) отличаются от примеров на лекции. Во-первых, параметра λ нет. Во-вторых, относительно ψ это не ОДУ, а эволюционные уравнения. Поэтому ψ, ψ_x, $\psi_{xx}, \dots$ являются динамическими переменными. Их бесконечно много, они и заменяют степени λ в одномерных спектральных задачах. Эти отличия являются принципиальными для 2D и 3D уравнений.

4.3. Покажите, что решения уравнения (16), не зависящие от y, сводятся к решениям КдФ. (То, что решения КдФ удовлетворяют КП — очевидно. В обратную сторону это неверно, так как есть лишняя производная по x. Однако, это оказывается не существенным и компенсируется простой заменой. Найдите её.) Для решений u не зависящих от y, зависимость ψ от y можно отделить, положив $\psi(x,y,t) = e^{-\lambda y}\psi(x,t)$. Покажите, что при этом уравнения (17) сводятся к линейным задачам для КдФ.

4.4. Аналогично, решения (16) не зависящие от t удовлетворяют уравнению Буссинеска (совпадает с (15) с точностью до обозначений и растяжений)

$$3u_{yy} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 0.$$

Введите спектральный параметр, полагая $\psi(x,y,t) = e^{\lambda t}\psi(x,y)$ и выведите из (17) представление Лакса из первой задачи (растяжения делать не обязательно).