В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 3 · 19 февраля 2024

Многосолитонное решение КдФ

План лекции

- Линеаризация преобразования Миуры
- Функция Бейкера–Ахиезера
- Полиномиальная редукция: потенциалы Баргманна и n-солитонные решения КдФ
- Система ОДУ на коэффициенты многочлена
- Сведение к линейной алгебре
- Вронскианные формулы для потенциала и волновой функции

Линеаризация преобразования Миуры

На прошлой лекции мы проверили, что уравнения

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \qquad \text{KdV}$$

$$v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \lambda)v_x \qquad \text{mKdV}$$

связаны преобразованием Миуры

$$u = v_x + v^2 + \lambda. \tag{1}$$

Это уравнение Риккати относительно v. Его решение в виде ряда по $1/z = 1/\sqrt{-4\lambda}$ дало бесконечную последовательность з.с. для КдФ.

Теперь вспомним, что уравнение Риккати можно линеаризовать, при помощи дальнейшей замены:

$$v = \frac{\psi_x}{\psi}. \tag{2}$$

Тогда (1) превращается в стационарное одномерное уравнение Шрёдингера с потенциалом u:

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi. \tag{3}$$

Само уравнение мКдФ при этой подстановке также превращается в уравнение, линейное относительно ψ. Интегрируя по x, получаем:

$$v_t = v_{xxx} - 6(v^2+\lambda)v_x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_t = (v_{xx} - 2v^3 - 6\lambda v)_x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\psi_t}{\psi} = v_{xx} - 2v^3 - 6\lambda v + C(t).$$

Функцию $C(t)$ можно считать равной 0 без потери общности: она уничтожается заменой $\psi = c(t)\tilde{\psi}$, где $c'/c = C$.

Далее, так как

$$v_{xx} = u_x - 2vv_x = u_x - 2v(u-\lambda-v^2) = u_x - 2(u-\lambda)v + 2v^3,$$

то уравнение для ψ переписывается как

$$\frac{\psi_t}{\psi} = u_x - 2uv - 4\lambda v = u_x - (2u+4\lambda)\frac{\psi_x}{\psi} \quad \Rightarrow$$

$$\psi_t = u_x\psi - (4\lambda+2u)\psi_x. \tag{4}$$

Вспомогательные линейные уравнения

Уравнение КдФ является следствием уравнений мКдФ и (1). Так как уравнения (3) и (4) им эквивалентны, то КдФ является также и их следствием. Переформулируем это утверждение в чуть более общем виде и проведём прямую проверку.

Утверждение 1. (Gardner, Greene, Kruskal & Miura, 1967) Условие совместности линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \qquad \psi_t = b\psi + 2a\psi_x \tag{5}$$

имеет вид

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = -a_{xxx} + 4(u - \lambda)a_x + 2u_x a. \tag{6}$$

В частности, при

$$a = -2\lambda - u, \quad b = u_x,$$

уравнения (6) эквивалентны уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Доказательство. Чтобы проверить совместность, нужно вычислить смешанную производную ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (4) по x и заменяем $\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi$:

$$\begin{aligned} \psi_t &= b\psi + 2a\psi_x \quad \Rightarrow \\ \psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx} \\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b+2a_x)\psi_x. \end{aligned} \tag{7}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (3) по t:

$$\begin{aligned} \psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_xa + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x \\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b+2a_x)(u-\lambda)\psi \\ &= (b_{xx} + 2u_xa + (u-\lambda)(b+4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + (u-\lambda)a)\psi_x \\ &= ((u-\lambda)\psi)_t \\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(b\psi + 2a\psi_x). \end{aligned} \tag{8}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_xa.$$

что эквивалентно (6). ■

Доказательство. Чтобы проверить совместность, нужно вычислить смешанную производную ψ_{xxt} двумя разными способами.
Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (4) по x и заменяем $\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi$:

$$\begin{aligned} \psi_t &= b\psi + 2a\psi_x \quad \Rightarrow \\ \psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx} \\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b+2a_x)\psi_x. \end{aligned} \tag{7}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (3) по t:

$$\begin{aligned} \psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_xa + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x \\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b+2a_x)(u-\lambda)\psi \\ &= (b_{xx} + 2u_xa + (u-\lambda)(\cancel{b} + 4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + \cancel{(u-\lambda)}a)\psi_x \\ &= ((u-\lambda)\psi)_t \\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(\cancel{b\psi} + \cancel{2a\psi_x}). \end{aligned} \tag{8}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_xa.$$

что эквивалентно (6). ■

Равенство смешанных производных является условием совместности в локальной форме. Глобально, оно обеспечивает, что любое решение $\psi(x,\lambda)$ первого уравнения (5) можно достроить до решения $\psi(x,t,\lambda)$ удовлетворяющего обоим уравнениям, взяв $\psi(x,\lambda)$ в качестве начального условия при $t=t_0$.

Проделанную проверку совместности можно формализовать, что приводит к общим понятиям представления Лакса (1968) и матричного представления нулевой кривизны (Захаров и Шабат, 1971). На следующих лекциях мы обсудим эти представления более подробно, не только для КдФ, но и на других примерах.

В любой формулировке, в основе различных методов построения общих и частных решений нелинейных УЧП лежит именно то свойство, что данное УЧП служит условием совместности для вспомогательных линейных уравнений. С одной из таких конструкций (потенциалы Баргманна) мы сейчас и познакомимся.

Функция Бейкера–Ахиезера

Итак, уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{9}$$

равносильно условию совместности $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ для линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x, \tag{10}$$

где $a = -2\lambda - u$.

Уравнение Риккати для логарифмической производной $v = \psi_x/\psi$ допускает формальное решение в виде ряда

$$v(z) = -z/2 + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \cdots, \quad \lambda = -z^2/4,$$

с локальными коэффициентами $F_j \in \mathcal{F}$, что даёт бесконечно много законов сохранения (см. предыдущую лекцию).

Теперь будем строить в виде аналогичного ряда саму функцию ψ. Отличия:

- на этот раз удобнее заменить λ на $-z^2$, а не $-z^2/4$;
- коэффициенты не будут принадлежать $\mathcal{F}$.

Определение 1. Формальной функцией Бейкера–Ахиезера называется ряд вида

$$\psi(x,t,z)=e^{zx+4z^3t}\Big(1+\frac{\varphi_1(x,t)}{z}+\frac{\varphi_2(x,t)}{z^2}+\cdots\Big), \tag{11}$$

удовлетворяющий уравнениям (10) с $\lambda=-z^2$.

Множитель e^{zx+4z^3t} — это частное решение уравнений (10) при $u=0$:

$$\psi_{xx}=z^2\psi,\quad \psi_t=4z^2\psi_x.$$

Покажем, что данное определение корректно, в том смысле, что коэффициенты ряда рекуррентно определяются. Обозначим

$$\psi=e^X\Phi,\quad X=zx+4z^3t,\quad \Phi=1+\frac{\varphi_1}{z}+\frac{\varphi_2}{z^2}+\dots,$$

и перепишем уравнения для Φ.

Имеем

$$\psi_{xx} = e^X(z^2\Phi + 2z\Phi_x + \Phi_{xx}) = e^X(u + z^2)\Phi,$$
$$\psi_t = e^X(4z^3\Phi + \Phi_t) = e^X\big(u_x\Phi + (4z^2 - 2u)(z\Phi + \Phi_x)\big).$$

Уравнение по x:

$$2z\Phi_x = -\Phi_{xx} + u\Phi.$$

В уравнении по t удобно выгнать z:

$$\begin{aligned}\Phi_t &= (4z^2 - 2u)\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi\\ &= 2z(-\Phi_{xx} + u\Phi) - 2u\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi\\ &= -2z\Phi_{xx} - 2u\Phi_x + u_x\Phi\\ &= (\Phi_{xx} - u\Phi)_x - 2u\Phi_x + u_x\Phi\\ &= \Phi_{xxx} - 3u\Phi_x.\end{aligned}$$

Расписываем по степеням z, получаем, при $j = 1, 2, \dots$:

$$2\varphi_{1,x} = u, \quad 2\varphi_{j+1,x} = -\varphi_{j,xx} + u\varphi_j, \tag{12}$$

$$\varphi_{j,t} = \varphi_{j,xxx} - 3u\varphi_{j,x}. \tag{13}$$

- Уравнение (12) — это рекуррентные соотношения, из которых φ_j находятся по заданному u. При этом приходится интегрировать по x. Легко видеть, что $\varphi_j \notin \mathcal{F}$, то есть, коэффициенты не выражаются как локальные функции от $u, u_x, \dots$, в отличие от коэффициентов ряда $v(z) = \psi_x/\psi$.

- В отличие от ряда $v(z)$, ответ не единственный, так как на каждом шаге добавляется постоянная интегрирования. Это эквивалентно тому, что функцию (11) можно умножать на произвольный постоянный ряд $1 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \dots$.

- По построению, (12) и (13) совместны, если u удовлетворяет КдФ. Поэтому, подстановка в (13) функций, найденных из (12), не приводит к противоречиям — просто уточняется зависимость постоянных интегрирования от t.

- Замечательное свойство уравнений (12) и (13) — их можно оборвать на любом номере. Точнее: если выполняется свойство, что $\varphi_{n+1} = 0$, то и $\varphi_{n+2}, \varphi_{n+3}, \dots$ можно выбрать равными 0. Это позволяет ввести следующий класс потенциалов.

Потенциалы Баргманна

Определение 2. Функция $u(x,t)$, вещественная, быстроубывающая и без особенностей, называется потенциалом Баргманна, если уравнения (10) с $\lambda=-z^2$ допускают решение в виде квазимногочлена

$$\psi(x,t,z)=e^{zx+4z^3t}(z^n+\varphi_1z^{n-1}+\dots+\varphi_n). \tag{14}$$

Это определение восходит к статье

V. Bargmann. On the connection between phase shifts and scattering potential. *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 488–493.

(точнее, там рассматривалось уравнение Шрёдингера на полупрямой, при $n=1,2$ и без зависимости от t).

- Для произвольного потенциала условие обрыва не выполняется, то есть, формула (14) выделяет некий специальный класс потенциалов. Мы найдём их в явном виде и покажем, что, с учётом зависимости от t, получается $2n$-параметрическое семейство решений КдФ.

- Наибольшую трудность представляет анализ условий вещественности, быстрого убывания и регулярности. Сегодня мы не будем за этим следить — требуем только обрыв.

При обрыве, уравнения (12) и (13) превращаются в совместную пару систем ОДУ порядка $2n$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{j,xx} = -2\varphi_{j+1,x} + 2\varphi_{1,x}\varphi_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ &\varphi_{n,xx} = \phantom{-2\varphi_{j+1,x} +} 2\varphi_{1,x}\varphi_n, \\ &\varphi_{j,t} = \varphi_{j,xxx} - 6\varphi_{1,x}\varphi_{j,x}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{15}$$

(Точнее, уравнения по t нужно расписать как динамическую систему относительно $2n$ переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{1,x}, \dots, \varphi_{n,x}$.)

Наша цель — построить в явном виде общее (то есть, зависящее от $2n$ произвольных постоянных) совместное решение этих систем. При этом, искомое решение КдФ определяется по формуле

$$u = 2\varphi_{1,x}. \tag{16}$$

Мы предъявим полный набор из $2n$ первых интегралов и сведём задачу к линейной алгебре. Для этого нам понадобится одна лемма. Она верна для любых двух решений уравнений (10), не обязательно в виде рядов.

Лемма 2. Пусть функции ψ и $\tilde\psi$ удовлетворяют уравнениям (10)

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

тогда их вронскиан постоянен:

$$w := W(\psi,\tilde\psi) = \psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi = \begin{vmatrix} \psi & \tilde\psi \\ \psi_x & \tilde\psi_x \end{vmatrix}, \quad w_x = 0, \quad w_t = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$w_x = \begin{vmatrix} \psi & \tilde\psi \\ \psi_{xx} & \tilde\psi_{xx} \end{vmatrix} = (u-\lambda)\begin{vmatrix} \psi & \tilde\psi \\ \psi & \tilde\psi \end{vmatrix} = 0.$$

Для дифференцирования по t используем уравнение для ψ_t и его следствие

$$\psi_{xt} = (-a_{xx} + 2a(u-\lambda))\psi + a_x\psi_x.$$

Тогда

$$w_t = \begin{vmatrix} \psi_t & \tilde\psi_t \\ \psi_x & \tilde\psi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde\psi \\ \psi_{xt} & \tilde\psi_{xt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_x\psi & -a_x\tilde\psi \\ \psi_x & \tilde\psi_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde\psi \\ a_x\psi_x & a_x\tilde\psi_x \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание. В более общем виде: пусть $w=\det\Psi$, где Ψ — фундаментальная матрица для уравнений

$$\Psi_x=U\Psi,\quad \Psi_t=V\Psi,$$

таких, что $\operatorname{tr}U=\operatorname{tr}V=0$, тогда $w_x=w_t=0$.

Доказательство следует из формулы Лиувилля для произвольной невырожденной матрицы Ψ, зависящей от параметра:

$$(\log\det\Psi)'=\operatorname{tr}(\Psi'\Psi^{-1}).$$

Тогда

$$(\log w)_x=\operatorname{tr}(\Psi_x\Psi^{-1})=\operatorname{tr}U=0,$$
$$(\log w)_t=\operatorname{tr}(\Psi_t\Psi^{-1})=\operatorname{tr}V=0.$$

Первые интегралы системы (15)

По предположению, уравнения (10) допускают решение в виде квазимногочлена

$$\psi=\psi(x,t,z)=e^{zx+4z^3t}(z^n+\varphi_1z^{n-1}+\dots+\varphi_n)=e^X\Phi(z).$$

Тогда решением является также

$$\tilde\psi=\psi(x,t,-z)=e^{-zx-4z^3t}((-z)^n+\varphi_1(-z)^{n-1}+\dots+\varphi_n)=e^{-X}\Phi(-z).$$

Вронскиан этих решений — нечетный многочлен по z степени $2n+1$:

$$\begin{aligned}w=\psi\tilde\psi_x-\psi_x\tilde\psi&=-2z\Phi(z)\Phi(-z)+\Phi(z)\Phi_x(-z)-\Phi_x(z)\Phi(-z)\\&=-2(-1)^nz(z^2-k_1^2)\cdots(z^2-k_n^2).\end{aligned}$$

Коэффициенты $w(z)$, а следовательно и нули k_j, выражаются через переменные φ_j, $\varphi_{j,x}$, $j=1,\dots,n$.

Из Леммы 2 следует, что k_j постоянны, что даёт n первых интегралов — половину от размерности системы (15). Но, это не всё — можно определить ещё n первых интегралов.

Утверждение 3. Нули w постоянны:

$$k_{j,x} = k_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отношения $\tilde\psi/\psi$ в точках $z = k_j$ также постоянны:

$$c_j := \frac{\tilde\psi(k_j)}{\psi(k_j)}, \quad c_{j,x} = c_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Для отношений имеем

$$\left(\frac{\tilde\psi}{\psi}\right)_x = \frac{\psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi}{\psi^2} = \frac{w}{\psi^2}; \qquad \left(\frac{\tilde\psi}{\psi}\right)_t = \frac{\psi\tilde\psi_t - \psi_t\tilde\psi}{\psi^2} = \frac{2aw}{\psi^2},$$

(используем, что $\psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x$) и при подстановке $z = k_j$ производные c_j обращаются в 0. ∎

Итак, в системе размерности $2n$ нашлось $2n$ первых интегралов. Разве максимальное количество не должно быть на 1 меньше? Противоречия нет — отношения c_j содержат множитель $\exp(-2k_jx - 8k_j^3t)$, то есть, эти первые интегралы неавтономны.

Может показаться, что найденными первыми интегралами трудно воспользоваться: мы ведь не можем явно найти корни w как функции от коэффициентов. Но это и не надо — просто считаем, что числа k_j и c_j даны, тогда задача заключается, чтобы восстановить по ним функции φ_j.

Дополнительные предположения. Будем считать, что имеет место случай общего положения, а именно,

$$1)\ k_i^2 \neq k_j^2, \quad i \neq j; \qquad 2)\ k_j \neq 0; \qquad 3)\ c_j \neq 0, \infty.$$

Условие 3), на самом деле, не является ограничением, так как если $c_j = 0$ или $c_j = \infty$, то это означает, что ψ делится на постоянный множитель $z - k_j$ или $z + k_j$. На такие множители можно сократить и придти к ψ — квазимногочлену более низкой степени.

Предположения 1) и 2) более существенны. Если они не выполнены, то система все равно решается в явном виде, но вычисления усложняются, а ответ «вырождается» — получаются рациональные решения или рациональные на солитонном фоне. Мы принимаем эти условия для простоты, при этом основное семейство решений не теряется.

Сведение к СЛАУ

Задача сводится к решению системы

$$c_j\psi(k_j)=\psi(-k_j),\quad j=1,\dots,n, \tag{17}$$

или, подробнее,

$$c_je^{X_j}(k_j^n+\varphi_1k_j^{n-1}+\dots+\varphi_n)=e^{-X_j}((-k_j)^n+\varphi_1(-k_j)^{n-1}+\dots+\varphi_n),$$

где обозначено

$$X_j=X\big|_{z=k_j}=k_jx+4k_j^3t.$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\varphi_1,\dots,\varphi_n$. Прежде чем решать её в общем виде, рассмотрим примеры с $n=1$ и $n=2$. При этом, будем использовать обозначение

$$y_j=c_je^{X_j}-e^{-X_j},$$

а производные по x временно будем обозначать штрихом или верхним индексом. В частности,

$$y_j'=k_j(c_je^{X_j}+e^{-X_j}),\quad y_j''=k_j^2(c_je^{X_j}-e^{-X_j}),\ \dots$$

Пример: $n = 1$

Система (17) состоит из одного уравнения

$$c_1\psi(k_1) = \psi(-k_1),$$

где $\psi(z) = e^X(z + \varphi_1)$. Имеем

$$c_1 e^{X_1}(k_1 + \varphi_1) = e^{-X_1}(-k_1 + \varphi_1) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = -k_1\frac{c_1 e^{X_1} + e^{-X_1}}{c_1 e^{X_1} - e^{-X_1}} = -\frac{y_1'}{y_1}.$$

Согласно (16), $u = 2\varphi_{1,x}$ (при любом n), то есть

$$u = -2(\log y_1)_{xx},$$

где

$$y_1 = c_1 e^{X_1} - e^{-X_1}, \quad X_1 = k_1 x + 4k_1^3 t.$$

Это и есть солитон, при выборе $c_1 < 0$.

Отметим, что если $k_1, c_1 \in \mathbb{R}$, то решение u вещественно, а его регулярность зависит от знака c_1:

$$\text{при } c_1 = -e^{2\delta_1} < 0: \qquad \varphi_1 = -k_1 \tanh(X_1 + \delta), \quad u = -\frac{2k_1^2}{\cosh^2(X_1 + \delta_1)},$$

$$\text{при } c_1 = e^{2\delta_1} > 0: \qquad \varphi_1 = -k_1 \coth(X_1 + \delta), \quad u = \frac{2k_1^2}{\sinh^2(X_1 + \delta_1)}.$$

Полюсное вещественное решение получается также, если $k_1 = i\kappa_1$ мнимое, а $c_1 = e^{2i\delta_1}$ лежит на единичной окружности:

$$\varphi_1 = \kappa_1 \tan(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1), \quad u = \frac{2\kappa_1^2}{\cos^2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1)}.$$

Пример: $n=2$

Система (17):

$$c_1\psi(k_1)=\psi(-k_1),\quad c_2\psi(k_2)=\psi(-k_2),\quad \psi=e^X(z^2+\varphi_1z+\varphi_2).$$

Это даёт такие уравнения:

$$\begin{aligned}c_1e^{X_1}(k_1^2+\varphi_1k_1+\varphi_2)&=e^{-X_1}(k_1^2-\varphi_1k_1+\varphi_2),\\ c_2e^{X_2}(k_2^2+\varphi_1k_2+\varphi_2)&=e^{-X_2}(k_2^2-\varphi_1k_2+\varphi_2),\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{pmatrix}c_1e^{X_1}-e^{-X_1} & k_1(c_1e^{X_1}+e^{-X_1})\\ c_2e^{X_2}-e^{-X_2} & k_2(c_2e^{X_2}+e^{-X_2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}k_1^2(c_1e^{X_1}-e^{-X_1})\\ k_2^2(c_2e^{X_2}-e^{-X_2})\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}y_1''\\ y_2''\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_1=-\frac{\begin{vmatrix}y_1 & y_1''\\ y_2 & y_2''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{vmatrix}}=-\frac{\Delta'}{\Delta},\quad u=-2(\log\Delta)_{xx},\quad \Delta=W(y_1,y_2).$$

Отметим, что $\Delta\ne0$, так как $k_1^2\ne k_2^2$. Можно найти также φ_2:

$$\varphi_2=-\frac{\begin{vmatrix}y_1'' & y_1'\\ y_2'' & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{vmatrix}}=\frac{W(y_1',y_2')}{\Delta}.$$

Заметим, что

$$W(y_1,y_2,e^X)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & e^X\\ y_1' & y_2' & ze^X\\ y_1'' & y_2'' & z^2e^X\end{vmatrix}=e^X(z^2\Delta-z\Delta'+W(y_1',y_2')),$$

откуда следует формула для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\psi(x,t,z)=\frac{W(y_1,y_2,e^X)}{W(y_1,y_2)}.$$

Вронскианные формулы при произвольном n

Пусть

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n\\ y_1' & y_2' & \dots & y_n'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}\end{pmatrix},\quad y^{(j)}=\partial_x^j(y).$$

Теорема 4. Пусть $y_j:=c_je^{X_j}-e^{-X_j}$, $X_j:=k_jx+4k_j^3t$, тогда функция

$$u=-2(\log W(y_1,\dots,y_n))_{xx} \tag{18}$$

удовлетворяет уравнению КдФ $u_t=u_{xxx}-6uu_x$ при произвольных параметрах k_j, c_j таких, что k_j^2 попарно различны и не равны 0. Соответствующее уравнение Шрёдингера $\psi_{xx}=(u+z^2)\psi$ допускает точное решение

$$\psi(x,t,z)=\frac{W(y_1,\dots,y_n,e^{zx+4z^3t})}{W(y_1,\dots,y_n)}. \tag{19}$$

Доказательство. Система (17) при произвольном n имеет вид

$$c_j e^{X_j}(k_j^n+\varphi_1 k_j^{n-1}+\dots+\varphi_n)=e^{-X_j}((-k_j)^n+\varphi_1(-k_j)^{n-1}+\dots+\varphi_n),$$

что можно записать в матричном виде как

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \dots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Определитель $\Delta=W(y_1,\dots,y_n)\ne 0$ в силу предположения, что все k_j^2 различны. Тогда

$$\varphi_1=-\frac{\Delta'}{\Delta}$$

и по формуле (16) $u=-\varphi_{1,x}$ находим u.

Чтобы получить функцию Бейкера–Ахиезера

$$\psi=e^X(z^n+\varphi_1 z^{n-1}+\dots+\varphi_n),$$

рассмотрим расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \\ e^X & ze^X & \dots & z^{n-1}e^X & z^n e^X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}.$$

По правилу Крамера,

$$1 = \psi W(y_1,\dots,y_n)/W(y_1,\dots,y_n,e^X),$$

что и требуется. ■

Итак, чисто алгебраическим путём, мы получили семейство точных решений КдФ, зависящее от $2n$ произвольных параметров k_j, c_j. Попутно нашлось явное решение уравнения Шрёдингера с соответствующим потенциалом. То есть, эти потенциалы служат примером точно решаемой квантово-механической задачи.

Замечание. Из (19) следует также решение $v = \psi_x/\psi$ уравнения мКдФ $v_t = v_{xxx} - 6(v^2 - z^2)v_x$:

$$v = \frac{\partial_x(W(y_1,\dots,y_n,e^{zx+4z^3t}))}{W(y_1,\dots,y_n,e^{zx+4z^3t})} - \frac{\partial_x(W(y_1,\dots,y_n))}{W(y_1,\dots,y_n)}.$$

Отметим, что параметры могут быть комплексными, вещественность в построениях не использовалась. Случаи, когда решение u вещественно:

1) все параметры вещественны. В этом случае функции y_j можно записать (переобозначая c_j) в виде

$$y_j = \sinh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad y_j = \cosh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j);$$

2) некоторые параметры чисто мнимые, $k_j = i\kappa_j$, а соответствующие c_j лежат на единичной окружности, тогда

$$y_j = \sin(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad y_j = \cos(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j);$$

3) есть пары комплексно-сопряжённых параметров, например, $k_2 = k_1^*$ и $c_2 = c_1^*$ (во вронскиане при комплексном сопряжении только переставятся два столбца).

Однако, оказывается, что решения без полюсов возможны только в случае 1) и при этом ещё необходимо соблюдать некоторые правила выбора c_j.

Теорема 5. Решение (18) вещественно и не имеет особенностей при $x,t\in\mathbb{R}$, если и только если $k_j,c_j\in\mathbb{R}$, все k_j^2 попарно различны и не равны 0, и c_j удовлетворяют правилу чередования знаков

$$c_n\ge 0,\quad -c_{n-1}\ge 0,\ \dots,\ (-1)^{n-j}c_j\ge 0,\ \dots,\ (-1)^{n-1}c_1\ge 0,$$

при выборе нумерации по убыванию k_j^2:

$$k_1^2>k_2^2>\dots>k_n^2>0.$$

Такая нумерация обусловлена тем, что $\lambda_j=-k_j^2$ — собственные значения для оператора Шрёдингера и их всегда принято нумеровать по возрастанию (λ_1 — основное состояние).

Доказательство, в принципе, можно извлечь, анализируя явную формулу, но это не так-то просто. Мы получим этот результат позже, из более общих утверждений о спектральных свойствах оператора Шрёдингера.

С учетом правила чередования знаков и делая переобозначение $X_j = k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j$, формулу для n-солитонного решения можно записать так:

$$u = -2\partial_x^2 \log W\left(\cosh X_n, \sinh X_{n-1}, \dots, \begin{matrix} \sinh X_1 \\ \cosh X_1 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} \text{при чётном } n, \\ \text{при нечётном } n. \end{matrix}$$

Также напомним, что мы отбросили случай, когда имеются кратные нули k_j или $k_j = 0$. Система (17) становится тогда вырожденной, но это не означает, что исходная система (15) не решается, просто теперь указанных первых интегралов недостаточно и нужно искать дополнительные. Мы пропустим этот класс решений, хотя он достаточно интересен (рациональные и рациональные на солитонном/тригонометрическом фоне). В этом классе все вещественные решения обязательно имеют полюс.

Иллюстрация при $n = 4$

(См. также программу на *Mathematica*)

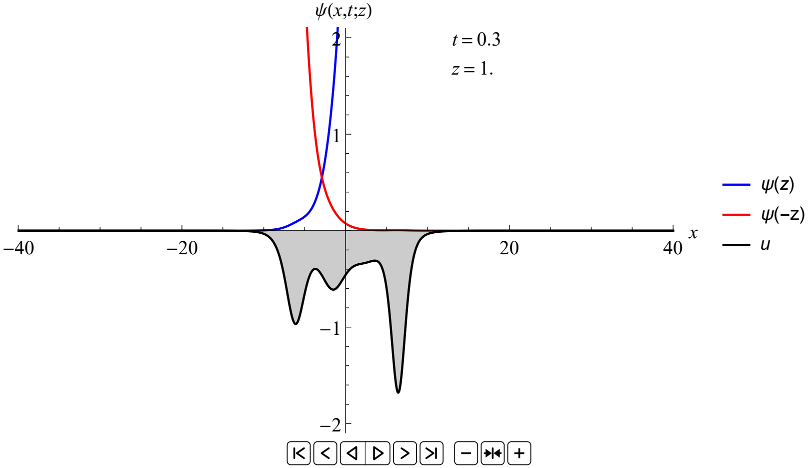
Возьмем конкретные числовые значения (ничем не примечательные)

$$k_1 = 0.95, \quad k_2 = 0.75, \quad k_3 = 0.6, \quad k_4 = 0.35,$$
$$c_j = (-1)^{n-j} e^{2\delta_j}, \quad \delta_1 = -5, \quad \delta_2 = 1.3, \quad \delta_3 = 0.3, \quad \delta_4 = -0.2.$$

Чередование знаков c_j обеспечивает регулярность потенциала и волновых функций.

- Одна из функций $\psi(z)$ и $\psi(-z)$ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$, другая при $x \to -\infty$.
- В точках $\lambda_j = -k_j^2$ эти функции становятся линейно зависимыми (что и написано в (17)) и определяют собственную (ненормированную) функцию оператора Шрёдингера.

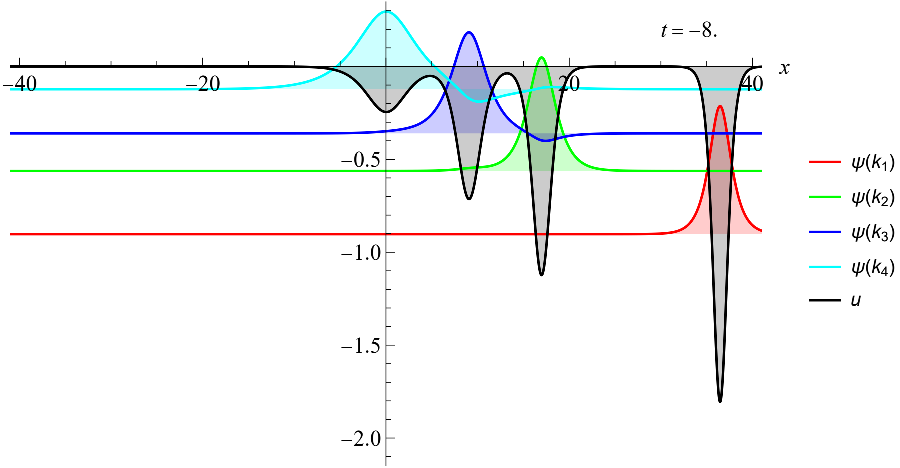
Зависимость волновых функций от z (при фиксированном t)



Зависимость собственных функций от t

Построим графики собственных функций $\psi_j = \psi(k_j, x, t)$ при разных t.

- Нормируем собственные функции так, что $||\psi_j||^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi_j^2\, dx = 1$.
- ψ_j имеет $j-1$ нулей по x в любой момент t.
- Собственные функции будем изображать сдвинутыми на соответствующий уровень энергии $\lambda = -k_j^2$ — это ровно половина амплитуды солитонов (то есть, половина глубины потенциальных ям).
- Когда солитоны достаточно далеко друг от друга, все ψ_j локализованы вблизи «своих» солитонов.


t = −8.
x
−40
−20
20
40
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
ψ(k1)
ψ(k2)
ψ(k3)
ψ(k4)
u

Домашнее задание

3.1. Найдите все первые интегралы для системы ОДУ

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1(-u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n),\\ u_2' &= u_2(\ \ u_1 - u_2 + u_3 + \dots + u_n),\\ &\dots\dots\dots\\ u_n' &= u_n(\ \ u_1 + u_2 + u_3 + \dots - u_n). \end{aligned}$$

Покажите, что ее интегрирование сводится к одной квадратуре и ответ записывается через гиперэллиптическую функцию. [*Подсказка:* обозначьте сумму u_j отдельной буквой.]

Замечание. Эта задача не связана с темой лекции, просто упражнение на тему поиска первых интегралов. Пример восходит к Ковалевской. Интересных решений у этой системы нет. Однако, чуть более сложные системы с похожей «коллективной» структурой взаимодействия (все поля входят в правую часть через одну и ту же функцию, в данном случае — через сумму) и сходной схемой решения встречаются в приложениях, см. напр.

S. Watanabe, S.H. Strogatz. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D* **74** (1994) 197–253.