В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 2 · 12 февраля 2024

Законы сохранения для КдФ
Преобразование Миуры

План лекции

- Определения и терминология
- Законы сохранения для эволюционных уравнений
- Интегрирование по частям
- Вариационная производная
- Вычисление з.с. для КдФ
- Однородные многочлены, метод неопределенных коэффициентов
- Преобразование Миуры и модифицированное уравнение КдФ
- Обращение преобразование Миуры $\to$ рекуррентная формула для з.с.
- Представление Лакса
- Преобразование Бэклунда

1965–1971

- Вычислительный эксперимент (см. прошлую лекцию)

  N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* **15:6** (1965) 240–243.

- КдФ — условие совместности линейных уравнений; эволюция данных рассеяния

  C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* **19:19** (1967) 1095–1097.

- Конструкция законов сохранения для КдФ

  R.M. Miura. Korteveg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Math. Phys.* **9:8** (1968) 1202–1203.

- Представление для КдФ в дифференциальных операторах

  P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467–490.

- Матричное представление нулевой кривизны

  V.E. Zakharov, A.B. Shabat. Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional automodulation of waves in nonlinear medias. *JETP* **61:1** (1971) 118–134.

Динамические переменные

В курсе УМФ, квазилинейные уравнения второго порядка делятся на эллиптические, гиперболические и параболические, по сигнатуре квадратичной формы, отвечающей главной части уравнения.

- Гиперболические уравнения: Лиувилля $u_{xy}=e^u$ и sin-Гордона $u_{xy}=\sin u$.
- Эллиптические: $u_{xx}+u_{yy}=e^u$, $u_{xx}+u_{yy}=\sin u$.
- Параболические: уравнение Бюргерса $u_t=u_{xx}+2uu_x$.

В основном, мы будем рассматривать ***эволюционные*** уравнения или системы — первого порядка по ∂_t, произвольного по ∂_x. Например, КдФ

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x,$$

нелинейное уравнение Шредингера

$$u_t=u_{xx}+2u^2v,\quad -v_t=v_{xx}+2uv^2$$

уравнение Буссинеска

$$u_{tt}=(u_{xxx}+6uu_x)_x \qquad \longleftrightarrow \qquad u_t=v,\quad v_t=(u_{xxx}+6uu_x)_x.$$

Эволюционные уравнения обладают следующим очевидным свойством:

- любая старшая производная $\partial_t^k \partial_x^n(u)$ выражается через производные только по x;
- между производными по x нет никакой фиксированной функциональной связи.

Будем называть производные по x ***динамическими переменными***, по аналогии с конечномерными динамическми системами.

Для краткости, мы будем часто (но не всегда) использовать обозначения

$$u_n = \partial_x^n(u), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример для КдФ:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xxx} + 6uu_x = u_3 + 6uu_1,\\
u_{xt} &= u_{xxxx} + 6uu_{xx} + 6u_x^2 = u_4 + 6uu_2 + 6u_1^2,\\
u_{2,t} &= u_5 + 6uu_3 + 18u_1u_2,\\
u_{3,t} &= u_6 + 6uu_4 + 24u_1u_3 + 18u_2^2,\\
u_{tt} &= u_{3,t} + 6u_tu_x + 6uu_{xt}\\
&= u_6 + 6uu_4 + 24u_1u_3 + 18u_2^2\\
&\qquad + 6(u_3 + 6uu_1)u_1 + 6u(u_4 + 6uu_2 + 6u_1^2) = \dots
\end{aligned}$$

и так далее.

В частности, производные всех u_n по t выражаются через сами u_n. Это похоже на обычные динамические системы

$$u_{1,t} = a_1(u_1, \dots, u_n), \quad \dots, \quad u_{n,t} = a_n(u_1, \dots, u_n),$$

только уравнения никогда не замыкаются. То есть, эволюционное уравнение — это бесконечномерная динамическая система.

Аналогично, для эволюционной системы

$$u_t = f(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \quad v_t = g(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx})$$

динамическими переменными служат производные

$$u_0 = u,\ v_0 = v,\ u_1 = u_x,\ v_1 = v_x,\ \dots,\ u_n = \partial_x^n(u),\ v_n = \partial_x^n(v),\ \dots$$

Для гиперболического уравнения

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$$

динамическими переменными служат производные

$$p_0 = u,\ p_1 = u_x,\ p_2 = u_{xx},\ \dots,\ q_1 = u_y,\ q_2 = u_{yy},\ \dots$$

Операторы дифференцирования

Для простоты, рассмотрим эволюционное уравнение с одним полем:

$$u_t = f(x, u_0, u_1, \dots, u_k). \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает множество гладких функций от x, t и *произвольного, но конечного* числа динамических переменных u_n. Так как правила дифференцирования u_n известны, то мы можем дифференцировать и такие функции.

Определение 1. Оператор полной производной по x — это формальное векторное поле

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots + u_{n+1}\partial_n + \dots$$

где

$$\partial_n = \partial/\partial_{u_n}.$$

Хотя сумма бесконечная, D_x корректно действует на функции из $\mathcal{F}$:

$$D_x(a(x, u_0, \dots, u_n)) = \partial_x(a) + u_1\partial_0(a) + \dots + u_{n+1}\partial_n(a).$$

Очевидно, это просто правило вычисления производной от сложной функции.

Оператор D_x один и тот же для всех уравнений вида (2), то есть, этот оператор определяется лишь выбором набора динамических переменных.

От уравнения зависит лишь правило дифференцирования по t.

Определение 2. Эволюционной производной в силу (2), или оператором полной производной по t, называется формальное векторное поле

$$\nabla_f = D_t = \partial_t + f\partial_0 + D_x(f)\partial_1 + \dots + D_x^n(f)\partial_n + \dots$$

Опять, действие D_t на $\mathcal{F}$ корректно определено. Здесь мы сначала продолжаем уравнение на все динамические переменные, используя уже введенный оператор D_x:

$$u_{0,t} = f, \quad u_{1,t} = D_x(u_t) = D_x(f), \quad u_{2,t} = D_x(u_{1,t}) = D_x^2(f), \quad \dots,$$

затем распространяем правило дифференцирования на функции. По построению, операторы D_x и D_t коммутируют:

$$[D_x, D_t] = 0.$$

Оператор линеаризации

Результат применения оператора ∇_f к функции $a(u_0,\dots,u_n)\in\mathcal{F}$ можно записать и наоборот, как результат применения некоторого оператора a_* к f. Положим, по определению,

$$a_*(f)=\nabla_f(a).$$

Распишем правую часть:

$$\begin{aligned}\nabla_f(a(x,u_0,\dots,u_n)) &= f\partial_0(a)+D_x(f)\partial_1(a)+\dots+D_x^n(f)\partial_n(a)\\ &= \Big(\partial_0(a)+\partial_1(a)D_x+\dots+\partial_n(a)D_x^n\Big)(f).\end{aligned}$$

Определение 3. Оператором линеаризации функции a называется дифференциальный оператор

$$a_*=\partial_0(a)+\partial_1(a)D_x+\dots+\partial_n(a)D_x^n.$$

Фактически, это производная по направлению f:

$$a_*(f)=\frac{d}{d\varepsilon}a[u+\varepsilon f]\Big|_{\varepsilon=0}$$

Законы сохранения

В случае конечномерных динамических систем (то есть, ОДУ), интегрируемость означает наличие «достаточного» числа первых интегралов.

После экспериментов Забуски–Краскала возникло желание объяснить регулярное поведение решений тем, что КдФ может иметь какие-то сохраняющиеся величины. Однако, эволюционное уравнение

$$u_t = f(u, u_1, \dots, u_k)$$

не может иметь первых интегралов в принципе: допустим, что

$$D_t(H(u, u_1, \dots, u_n)) = 0, \quad \partial_n(H) \neq 0;$$

в левой части стоит

$$\partial_0(H)f + \partial_1(H)D_x(f) + \dots + \partial_n(H)D_x^n(f)$$

и последнее слагаемое содержит u_{n+k}, а другие нет, сокращение невозможно.

Тем не менее, сохраняющиеся величины все же есть, однако это не функции из $\mathcal{F}$, а интегралы от них — функционалы.

Определение 4. Законом сохранения (conservation law) называется пара функций $\rho, \sigma \in \mathcal{F}$ такая, что

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma).$$

Функция ρ называется плотностью (density), σ — током з.с. (flux).

Если граничные условия обеспечивают сокращение (например, благодаря быстроубыванию), то интеграл от плотности сохраняется:

$$\partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_t(\rho)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_x(\sigma)\, dx = \sigma\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Это и есть аналог первого интеграла для ОДУ.

Закон сохранения можно построить по произвольной функции $r \in \mathcal{F}$:

$$\rho = D_x(r),\ \ \sigma = D_t(r) \quad \Rightarrow \quad D_t(\rho) = D_x(\sigma).$$

Но, это совершенно не интересно, так как тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = r\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Такие законы сохранения называются ***тривиальными***. Плотности, отличающиеся на полную производную от x называются эквивалентными:

$$\rho_1 \sim \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 - \rho_2 \in \operatorname{Im} D_x.$$

Функционалы, отвечающие эквивалентным плотностям совпадают (опять таки, при правильных граничных условиях):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho + D_x(a))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx.$$

Иначе говоря, пространство функционалов $\widehat{\mathcal{F}}$ есть ни что иное, как фактор-пространство

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}/D_x(\mathcal{F}).$$

Важный вопрос: как отличить тривиальный з.с. от нетривиального? Иначе говоря, как узнать, лежит ли ρ в $\operatorname{Im} D_x$?

Есть разумный ответ, даже два — алгоритм интегрирования по частям и вариационная производная, но сегодня мы это пропустим, вернёмся к этой теме позже.

Законы сохранения КдФ

В отличие от ОДУ, у которых *всегда* существуют первые интегралы (хотя их не всегда удаётся найти), у эволюционных уравнений законов сохранения обычно нет или есть всего несколько штук. Но, оказывается, что для уравнения КдФ их бесконечно много.

$$D_t(u) = u_3 + 6uu_1 = D_x(u_2 - 3u^2), \qquad \text{(масса)}$$

$$D_t(u^2) = 2uu_3 + 12u^2u_1 = D_x(2uu_2 - u_1^2 + 4u^3), \qquad \text{(импульс)}$$

$$D_t(u_1^2 - 2u^3) = D_x(2u_1u_3 - u_2^2 - 6u^2u_2 + 12uu_1^2 - 9u^4), \qquad \text{(энергия)}$$

$$\begin{aligned} D_t(u_2^2 - 10uu_1^2 + 5u^4) = D_x(&2u_2u_4 - u_3^2 - 20uu_1u_3 + 16uu_2^2 \\ &+ 10u_1^2u_2 + 20u^3u_2 - 90u^2u_1^2 + 24u^5) \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

Покажем, как такие з.с. можно проверять и искать при помощи компьютера, а потом докажем, что последовательность продолжается неограниченно.

Метод неопределенных коэффициентов

Уравнение КдФ однородно относительно весов

$$\partial_t : \partial_x : u = 3 : 1 : 2.$$

То есть, если сложить в каждом мономе число вхождений ∂_t, ∂_x и u с соответствующим весом, то получится одно и то же:

$$\begin{array}{cccc} u_t & = u_{xxx} & +6uu_x & \\ 2+3 & 2+3\cdot 1 & 2\cdot 2+1 & =5 \end{array}$$

Нетрудно понять, что это свойство есть следствие инвариантности уравнения относительно группы растяжений

$$(t,x,u) \mapsto (c^3t, cx, c^{-2}u).$$

Если f — многочлен от u_n, однородный относительно весов $u_n \sim 2+n$, то $D_x(f)$ и $D_t(f)$ — также однородные многочлены, с весами на 1 и 3 больше исходного веса f.

Любой многочлен равен сумме однородных. Поэтому, полиномиальный з.с. $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$ распадается на сумму независимых однородных:

$$D_t\left(\sum_2^m \rho_k\right) = D_x\left(\sum_2^m \sigma_k\right), \quad \rho_k \sim k, \quad \sigma_k \sim k+2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$D_t(\rho_k) = D_x(\sigma_k), \quad k = 2, \dots, m.$$

Задача сводится к поиску однородных плотностей и токов, которые образуют базис в пространстве всех з.с.. Мономов фиксированного веса — конечное число. Если вес небольшой, их нетрудно выписать вручную.

вес 2: u

вес 3: u_1

вес 4: $u_2,\ u^2$

вес 5: $u_3,\ uu_1$

вес 6: $u_4,\ uu_2,\ u_1^2,\ u^3$

вес 7: $u_5,\ uu_3,\ u_1u_2,\ u^2u_1$

вес 8: $u_6,\ uu_4,\ u_1u_3,\ u_2^2,\ u^2u_2,\ uu_1^2,\ u^4$

Возьмём в качестве ρ сумму мономов веса k, с неопределенными коэффициентами, в качестве σ — то же самое веса $k+2$. Распишем равенство $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$, соберем коэффициенты, получим на них систему линейных алгебраических уравнений. Если есть решение — значит, нашли з.с..

Важное замечание: в ρ следует сразу отбрасывать мономы, линейные по старшей производной u_n, $n > 0$, так как их всегда можно заменить на эквивалентную по модулю $\operatorname{Im} D_x$ сумму мономов без этой производной. Например, в последней строчке

$$u_6,\ uu_4,\ u_1u_3,\ u_2^2,\ u^2u_2,\ uu_1^2,\ u^4$$

так как

$$\begin{aligned} u_6 &= D_x(u_5), \\ uu_4 &= D_x(uu_3) - u_1u_3, \\ u_1u_3 &= D_x(u_1u_2) - u_2^2, \\ u^2u_2 &= D_x(u^2u_1) - 2uu_1^2. \end{aligned}$$

В результате уменьшается число неизвестных коэффициентов и убирается неопределенность в системе.

Возьмём в качестве ρ сумму мономов веса k, с неопределенными коэффициентами, в качестве σ — то же самое веса $k+2$. Распишем равенство $D_t(\rho)=D_x(\sigma)$, соберем коэффициенты, получим на них систему линейных алгебраических уравнений. Если есть решение — значит, нашли з.с..

Важное замечание: в ρ следует сразу отбрасывать мономы, линейные по старшей производной u_n, $n>0$, так как их всегда можно заменить на эквивалентную по модулю $\operatorname{Im} D_x$ сумму мономов без этой производной. Например, в последней строчке

$$\cancel{u_6},\ \cancel{uu_4},\ \cancel{u_1u_3},\ u_2^2,\ \cancel{u^2u_2},\ uu_1^2,\ u^4$$

так как

$$\begin{aligned} u_6 &= D_x(u_5),\\ uu_4 &= D_x(uu_3)-u_1u_3,\\ u_1u_3 &= D_x(u_1u_2)-u_2^2,\\ u^2u_2 &= D_x(u^2u_1)-2uu_1^2. \end{aligned}$$

В результате уменьшается число неизвестных коэффициентов и убирается неопределенность в системе.

Итак, для веса 8 имеем плотность с неизвестными a, b, c

$$\rho = au_2^2 + buu_1^2 + cu^4.$$

Поток веса 10 имеет вид

$$\sigma = C_1 u_8 + {}_2 uu_6 + C_3 u_1 u_5 + \dots .$$

Подставляем в программу и решаем, получаем в результате приведенный выше з.с. с плотностью $u_2^2 - 10uu_1^2 + 5u^4$.

При вычислении на руках удобнее даже не выписывать σ, а просто применить D_t к ρ и в полученном выражении постепенно заносить мономы под D_x. В какой-то момент возникают препятствия — они и дают соотношения на a, b, c, без явного использования коэффициентов σ. В конце вычислений σ получится автоматически под знаком D_x. Фактически, это и есть алгоритм интегрирования по частям.

Отметим также, что удобно группировать мономы по степеням; ясно, что интегрирование по частям идёт для каждой такой группы независимо.

Преобразование Миуры

С этого момента мы поменяем знак в уравнении КдФ:

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x. \tag{2}$$

Это эквивалентно просто замене $u \to -u$ (то есть, солитон теперь не горбик, а яма).

Существует дифференциальная подстановка, связывающая это уравнение с модифицированным уравнением КдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \lambda)v_x. \tag{3}$$

Утверждение 1. (Миура, 1968) Пусть v удовлетворяет мКдФ (3), тогда

$$u = v_x + v^2 + \lambda$$

удовлетворяет КдФ (2).

Доказательство. Прямая проверка:

$$
\begin{aligned}
u &= v_1 + v^2 + \lambda,\\
u_1 &= v_2 + 2vv_1,\\
u_2 &= v_3 + 2vv_2 + 2v_1^2,\\
u_3 &= v_4 + 2vv_3 + 6v_1v_2,\\
u_t &= v_{1,t} + 2vv_t\\
&= v_4 - 6(v^2+\lambda)v_2 - 12vv_1^2 + 2v(v_3 - 6(v^2+\lambda)v_1)\\
&= u_3 - 6v_1v_2 - 6(v^2+\lambda)v_2 - 12vv_1^2 - 12v(v^2+\lambda)v_1\\
&= u_3 - 6(v_1+v^2+\lambda)(v_2+2vv_1)\\
&= u_3 - 6uu_1.
\end{aligned}
$$

∎

Отсюда будут получены важные следствия: 1) представление Лакса; 2) преобразование Бэклунда. Но, в данный момент нас интересует, как это применить в задаче о законах сохранения.

Ясно, что если $\rho[u], \sigma[u]$ — плотности для КдФ, то заменяя u на $v_1 + v^2 + \lambda$. Мы хотим наоборот.

Обращение преобразования Миуры

Обозначим $z^2=-4\lambda$ и построим *формальное* решение уравнения Риккати

$$v_x+v^2=u+z^2/4 \tag{4}$$

в виде ряда

$$v(z)=-z/2+F_0+\frac{F_1}{z}+\frac{F_2}{z^2}+\cdots\,. \tag{5}$$

При подстановке в (4) члены с z^2 сокращаются, коэффициент при z^1 даёт $F_0=0$, а остальные степени дают рекуррентные соотношения

$$F_1=-u,\qquad F_{n+1}=D_x(F_n)+\sum_{s=1}^{n-1}F_sF_{n-s},\quad n=1,2,\dots\,. \tag{6}$$

Отсюда все F_n однозначно находятся в виде дифференциальных многочленов от u. Вот несколько первых (скобки просто группируют одинаковые степени):

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -u,\\
F_2 &= -u_1,\\
F_3 &= -u_2 + u^2,\\
F_4 &= -u_3 + 4uu_1,\\
F_5 &= -u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) - 2u^3,\\
F_6 &= -u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) - 16u^2u_1,\\
F_7 &= -u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) - (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4.
\end{aligned}
$$

Рекуррентные соотношения (6) порождают последовательность плотностей для уравнения КдФ (ясно, что их можно немного упростить по модулю $\operatorname{Im} D_x$, в частности, можно выкинуть старшие производные). Точнее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. 1) Все коэффициенты в разложении (5) являются плотностями законов сохранения для КдФ; 2) все плотности с чётными номерами тривиальны; 3) все плотности с нечётными номерами нетривиальны и друг другу не эквивалентны.

Доказательство. 1) Заметим, что v является плотностью простейшего закона сохранения для уравнения мКдФ:

$$D_t(v) = D_x\Big(v_{xx} - 2v^3 - \frac{3}{2}z^2 v\Big).$$

При подстановке ряда (5) в мКдФ, равенство выполняется тождественно по z, следовательно все коэффициенты этого ряда являются плотностями законов сохранения, но уже для КдФ, поскольку они выражены через u.

2) Заметим, что ряд $\tilde{v} = v(-z)$ удовлетворяет тому же уравнению Риккати:

$$v_x + v^2 = u + z^2/4, \quad \tilde{v}_x + \tilde{v}^2 = u + z^2/4.$$

Отсюда следует

$$v_x - \tilde{v}_x = \tilde{v}^2 - v^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} + v = \frac{2F_2}{z^2} + \frac{2F_4}{z^4} + \dots = -D_x(\log(v - \tilde{v})).$$

Раскладывая $\log(v - \tilde{v})$ по z, получаем, что все F_{2k} — полные производные.

3) Каждую плотность можно разбить на группы мономов по степеням. Проследим только за членами вида u^k, полагая $u_n = 0$ при $n > 0$. Это превращает (6) в алгебраическое рекуррентное соотношение

$$F_1 = -u, \quad F_{n+1} = \sum_{s=1}^{n-1} F_s F_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

решение которого имеет вид $F_{2k} = 0$, $F_{2k-1} = c_k(-u)^k$, где c_k — числа $1, 1, 2, 5, 14, 24, \dots$. Поменяв знак u, легко видеть, что это возрастающая последовательность (интересно отметить, что это знаменитые числа Каталана $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$).

Следовательно, все F_{2k-1} содержат член u^k с ненулевым коэффициентом. Отсюда следует, что $F_{2k-1} \notin \operatorname{Im} D_x$, так как член u^k не может возникнуть при дифференцировании.

Так как степени разные, это доказывает и неэквивалентность разных плотностей. ∎

Домашнее задание

2.1. Покажите (вручную или изменяя программу показанную на лекции), что первые три закона сохранения для КдФ обобщаются для уравнения вида

$$u_t = u_{xxx} + f(u)u_x$$

с произвольной гладкой функцией $f(u)$. Точнее, найдите функции $g(u)$ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{F}$ такие, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} D_t(u) &= D_x(\sigma_1), \\ D_t(u^2) &= D_x(\sigma_2), \\ D_t(u_1^2 + g(u)) &= D_x(\sigma_3). \end{aligned}$$

[*Подсказка:* при вычислении σ_j нужно будет использовать первообразные от $f(u)$, поэтому удобно обозначить $f(u) = F''(u)$.]

Замечание. Можно доказать (это не требуется), что уже на следующей плотности (содержащей u_2^2) возникают ограничения на f. Она и последующие плотности существуют, только если f — многочлен не выше второй степени, то есть, случай КдФ или мКдФ.

2.2. Обдумайте, как следует обобщить определения и формулы для операторов D_x, $D_t = \nabla_f$ и a_* в случае эволюционных систем с m полями

$$u_t^1 = a^1[u^1, \dots, u^m], \ \dots, \ u_t^m = f^m[u^1, \dots, u^m],$$

где f^i зависят от конечного числа динамических переменных $u_n^i = \partial_x^n(u^i)$. Можно ограничиться случаем $m = 2$, то есть, системами вида

$$u_t = f[u, v], \quad v_t = g[u, v].$$

2.3. Найдите (вручную или адаптируя программу на случай двух переменных), несколько простейших законов сохранения для [комплексного] нелинейного уравнения Шрёдингера (=НШ, система ZS-AKNS)

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2.$$

При использовании неопределенных коэффициентов воспользуйтесь однородностью относительно весов $\partial_t : \partial_x : u : v = 2 : 1 : 1 : 1$. Не забывайте отбрасывать эквивалентные мономы.