

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 1 · 5 февраля 2024

Введение

План лекции

- Содержание курса
- Уравнение Кортевега–де Фриза
- Солитон и другие решения
- Численный счёт (схема Забуски–Краскала)
- Взаимодействие солитонов

Организационные вопросы

- как зовут лектора: Всеволод Эдуардович Адлер (ИТФ им. Ландау)
- куда отправлять решения задач: `adler@itp.ac.ru`
- дедлайн: 2 недели
- где искать конспекты:
<http://adler.itp.ac.ru/lectures/lectures.html>
- чем все это кончится: дифференцированный зачет \sim 20 мая

Примерное содержание курса

Оглавление за прошлый год:

- 1 Введение. Солитон КдФ. Разностная схема Забуски-Краскала. Многосолитонные решения численно. Система шаров-ящичков
- 2 Вспомогательные линейные уравнения. КдФ как условие их совместности. Представления нулевой кривизны. Некоторые другие примеры. Представление Лакса. Преобразование Миуры. Вывод законов сохранения для КдФ
- 3 Функция Бейкера–Ахиезера. Потенциалы Баргманна. Система ОДУ на коэффициенты многочлена. Переход к корням, первые интегралы. Линеаризация системы. Вронскианские формулы для потенциала и волновой функции. Фазовый сдвиг
- 4 Иерархия КдФ. Оператор рекурсии. Локальность высших уравнений КдФ. Симметрии эволюционных уравнений. Коммутативность иерархии КдФ

- 5 Стационарные уравнения для высших симметрий (уравнения Новикова). Общее решение в виде бегущей волны (кноидальная волна). Эллиптические функции. Численное построение двухфазного решения. Произвольное n : понижение порядка, уравнения Дубровина. Интегрирование в квадратурах
- 6 Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Прямая задача. Сведение уравнения Шрёдингера к интегральному. Функции Йоста. Матрица перехода, её свойства. Дискретный спектр. Данные рассеяния
- 7 Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Обратная задача. Зависимость данных рассеяния от t . Определение $a(k)$ и $b(k)$ по коэффициенту отражения $r(k)$. Восстановление потенциала по данным рассеяния (сведение к сингулярным интегральным уравнениям)
- 8 Преобразования Бэклунда. Дискретные переменные. Непрерывный предел. Одевающая цепочка для КдФ. Перестановочность преобразований Бэклунда. Ещё один способ вывода n -солитонных решений.

- 9 Приложения одевающей цепочки. Метод факторизации. Условие форм-инвариантности. Квазипериодическое замыкание. Примеры: гармонический осциллятор, замыкание с периодом 3 и уравнение P-IV
- 10 Некоторые вычисления на *Mathematica*. Построение графиков. Численное решение ОДУ. Символьные вычисления
- 11 Уравнения Пенлеве. Примеры групповых редукций к ОДУ второго порядка. КдФ и уравнения P-1, P-2. Синус-Гордон и P-3. Классификация Пенлеве. Тест Пенлеве–Ковалевской. WTC-тест
- 12 Уравнение Бюргерса. Уравнение Лиувилля. 2D цепочка Тоды с закрепленными концами. Заключительные замечания

- В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
- М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

Уравнения Хопфа, Бюргерса и КдФ

Три уравнения, интегрируемые в разных смыслах:

Hopf	$u_t = uu_x$	метод характеристик
Burgers	$u_t = u_{xx} + 2uu_x$	линеаризующая подстановка
KdV	$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$	метод обратной задачи рассеяния

(Уравнения $u_t = \partial_x^n(u) + uu_x$ при $n > 3$ не интегрируемы.)

Все коэффициенты обезразмерены, можно изменить на любые, растягивая u , x или t (позже, 6 поменяем на -6).

Член uu_x описывает нелинейное взаимодействие волн. В уравнении Хопфа он приводит к *опрокидыванию* решения.

Добавка линейного члена с любой старшей производной подавляет опрокидывание, но по разному.

Дисперсионное соотношение. Пренебрегаем нелинейностью и подставляем линейную волну (k — волновое число, ω — частота)

$$u = e^{ikx - i\omega t}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Члену u_{xx} отвечает *диссипация* волн (затухание), так как дисперсионное соотношение имеет вид

$$-i\omega = -k^2 < 0.$$

Члену u_{xxx} отвечает *дисперсия* волн (расползание), так как групповая скорость зависит от k :

$$\omega = k^3, \quad \frac{\partial\omega}{\partial k} \neq \text{const}.$$

Вывод КдФ из уравнений гидродинамики см. в книге [Ньюэлл]. Оно описывает отклонение u поверхности воды от нулевого уровня для волн длины L в одномерном канале глубины h , в предположении, что

$$u \ll h \ll L.$$

(1834) J.S. Russel: solitary wave of translation

(1872) J. de Boussinesq: вывод уравнения $u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0$

(1895) D.J. Korteweg, G. de Vries

(1948) J.M. Burgers, E. Hopf, J.D. Cole

(1965) N.J. Zabusky, M.D. Kruskal: солитоны

Решение уравнения Хопфа методом характеристик

Квазилинейное уравнение первого порядка

$$au_t + bu_x = c, \quad a, b, c \text{ — функции от } t, x, u. \quad (1)$$

Выписываем уравнения на характеристики

$$\frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} = \frac{du}{c}$$

(или, равносильно, $t' = a$, $x' = b$, $u' = c$, где штрих — производная по вспомогательной переменной s). Пусть $F(t, x, u)$ — первый интеграл:

$$dF(t, x, u) = F_t dt + F_x dx + F_u du = 0 \quad \Leftrightarrow \quad aF_t + bF_x + cF_u = 0. \quad (2)$$

Тогда уравнение $F = 0$ определяет частное решение (1):

$$F(t, x, u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_t = -\frac{F_t}{F_u}, \quad u_x = -\frac{F_x}{F_u}$$

и подстановка в (2) даёт (1). Общее решение имеет вид

$$A(F_1, F_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = a(F_2),$$

где F_1, F_2 — пара функционально независимых первых интегралов (они всегда есть, хотя не всегда можно найти явно), A или a — произвольные функции.

Для уравнения Хопфа

$$u_t - uu_x = 0$$

имеем:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Первые интегралы:

$$F_1 = u, \quad F_2 = x + tu.$$

Решение $u(x, t)$ определяется неявно из уравнения

$$u = a(x + tu) \tag{3}$$

с произвольной функцией a . Проверка:

$$u_x = (1 + tu_x)a', \quad u_t = (u + tu_t)a' \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{a'}{1 - ta'}, \quad u_t = \frac{ua'}{1 - ta'} = uu_x.$$

Ответ (3) кажется бессмысленным (как разрешить такое уравнение при произвольной функции a ?), но его геометрический смысл вполне нагляден. При $t = 0$ имеем $u(x, 0) = a(x)$, то есть, функция a задаёт профиль u в начальный момент $t = 0$.

При любом t , точки графика u , лежащие на фиксированной высоте $u = u_0$, определяются уравнением $a(x + u_0 t) = u_0$. То есть, они получаются из начальных точек параллельным переносом вдоль оси x на расстояние $-u_0 t$. Более высокие точки едут быстрее. В результате, график просто испытывает преобразование сдвига. В некоторый момент неизбежно наступает опрокидывание.

Подстановка Коула–Хопфа

Уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

допускает линеаризующую подстановку. Пусть ψ — решение уравнения теплопроводности (или диффузии)

$$\psi_t = \psi_{xx}.$$

Тогда

$$u = \frac{\psi_x}{\psi}$$

удовлетворяет уравнению Бюргерса. Действительно:

$$u_x = \frac{\psi_{xx}}{\psi} - \frac{\psi_x^2}{\psi^2} = \frac{\psi_{xx}}{\psi} - u^2, \quad \frac{\psi_{xx}}{\psi} = \frac{\psi_t}{\psi} = (\log \psi)_t = u_x + u^2,$$

$$u_t = \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_t = (\log \psi)_{xt} = (u_x + u^2)_x.$$

Итак, для уравнения Хопфа решение задаётся замкнутой формулой, хотя и неявной (и решение не везде определено, но такое уж уравнение).

Уравнение Бюргера сводится к линейному уравнению теплопроводности, для которого можно выписать решение, например, по интегральной формуле Пуассона

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \psi(y, 0) dy$$

(правда, сначала еще нужно перейти от начального условия $u(x, 0)$ к начальному условию $\psi(x, 0)$, и нужно, чтобы оно оказалось ограниченным).

Таким образом, уравнения Хопфа и Бюргера решаются точно, пусть и с некоторыми натяжками.

В отличие от этих уравнений, для КдФ никакой явной формулы для общего решения нет. Тем не менее, его тоже считают интегрируемым. Почему и в каком смысле — с этим мы, в основном, и будем разбираться в курсе.

Солитон КдФ

Для начала, найдем некоторое частное решение КдФ — солитон. Это быстроубывающее решение в виде бегущей волны:

$$u(x, t) = y(x - ct), \quad y, y', y'', \dots \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Подстановка в уравнение

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{4}$$

даёт ОДУ на $y = y(z)$:

$$-cy' = y''' + 6yy'.$$

Интегрируем, получаем

$$y'' + 3y^2 + cy + c_1 = 0.$$

Умножаем на $2y'$ и интегрируем еще раз:

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 + 2c_1y + c_2 = 0.$$

В принципе, это уравнение вида $y' = F(y)$, то есть, с разделяющимися переменными. Оно интегрируется в квадратурах:

$$z = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{-2y^3 - cy^2 - 2c_1y - c_2}}.$$

При произвольных постоянных это так называемый эллиптический интеграл, в элементарных функциях не берется. Кроме того, эта формула даёт не $y(z)$, а $z(y)$. Задача обращения эллиптического интеграла приводит к эллиптическим функциям (Якоби или Вейерштрасса). Мы к ним вернемся, когда будем изучать периодические решения КдФ.

Но, сейчас нам нужен не общий случай, а специальный. Мы забыли про условие быстрорубывания. Оно тут же фиксирует константы $c_1 = c_2 = 0$. В результате, получаем более простое уравнение

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 = 0.$$

Оно решается в элементарных функциях — эллиптический интеграл сводится к интегрируемому случаю дифференциального бинома (вспомним подстановки Эйлера).

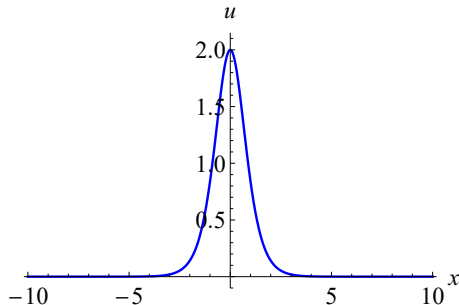
Проще всего сделать такие преобразования:

$$\begin{aligned}y &= 2v^{-2} \Rightarrow y' = -4v^{-3}v' \Rightarrow \\16v^{-6}(v')^2 + 16v^{-6} + 4cv^{-4} &= 0 \Rightarrow \\4(v')^2 + cv^2 &= -4.\end{aligned}$$

Отсюда видим, что должно быть $c < 0$. Положим $c = -4k^2$, тогда

$$k^2v^2 - (v')^2 = 1 \Rightarrow v'' = k^2v, \quad v = k^{-1} \cosh(kz + \delta).$$

Возвращаясь к u , получаем солитон



$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(kx + 4k^3t + \delta)}. \quad (5)$$

Это решение было известно еще Расселлу, хотя само уравнение КдФ он не выводил.

Из формулы (5) видим, что скорость солитона с параметром k равна $4k^2$ и совпадает с удвоенной амплитудой. То есть, чем выше солитон, тем быстрее он бежит.

Интересные решения в виде бегущей волны есть у многих уравнений (хотя они не всегда бывают быстроубывающими, например, кинки выходят на разные постоянные при $x \rightarrow \pm\infty$).

Более продвинутое свойство, указывающее на интегрируемость, заключается в существовании у КдФ *многосолитонных* решений. Их вывод будет одной из наших целей на последующих лекциях.

Пока что обратимся к численному счету, который позволит посмотреть, как эти решения устроены.

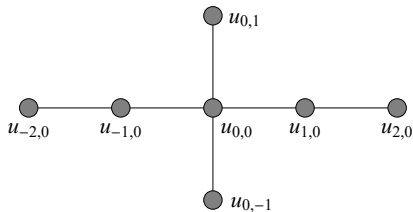
Разностная схема Забуски–Краскала

Рассмотрим дискретизацию уравнения КдФ (4) предложенную в статье

[ZK] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* **15:6** (1965) 240–243.

(В ней и был введён термин *солитон*, как сокращение от *solitary wave pulse* — импульс в виде уединённой волны, или от *solitary wave of translation* — уединённая волна переноса.)

Эта дискретизация имеет вид разностного уравнения на функцию $u_{n,m}$ с таким шаблоном (для краткости, n и m в индексах пропущены):



А именно,

$$u_{0,1} - u_{0,-1} = a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) + 2ah^2(u_{1,0} + u_{0,0} + u_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}). \quad (6)$$

Утверждение 1

Уравнение (6) аппроксимирует КдФ с шагом h по x и ah^3 по t :

$$u_{n,m} \sim u(x, t), \quad x = nh, \quad t = amh^3.$$

Доказательство. Подставляем в (6) разложения в ряды Тейлора

$$u_{n+j,m} \sim u(x + jh, t) = u + jhu_x + \frac{1}{2}j^2h^2u_{xx} + \frac{1}{6}j^3h^3u_{xxx} + O(h^4),$$

$$u_{n,m+j} \sim u(x, t + ajh^3) = u + ajh^3u_t + O(h^6).$$

Члены с h^0 , h^1 , h^2 сокращаются, а при h^3 получается равенство

$$2ah^3(u_t - u_{xxx} - 6uu_x) + O(h^5) = 0. \quad \blacksquare$$

Возьмём в качестве начального условия $u(x, 0)$ сумму трех солитонов вида (5) с разными k и δ (нужны два слоя решётки при $t = 0$ и $t = ah^3$).

Выберем δ так, чтобы солитоны были далеко друг от друга, тогда это начальное условие мало отличается от точного 3-солитонного решения и дальше оно эволюционирует почти как 3-солитонное решение. Но, в моменты столкновения это уже вовсе не сумма трех солитонов!

Ещё одно упрощение — периодическая сетка: $u_{n+N,m} = u_{n,m}$, где $N = (x_{\max} - x_{\min})/h$. Этот распространённый трюк позволяет избежать граничных эффектов. Правда, настоящие солитоны не периодические, но на большом интервале отличия почти нет.

$$k = 0.7, 0.85 \text{ и } 1; \text{ параметры сетки: } h = 0.1, a = 0.1$$

Параметр h должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить хорошее приближение начального профиля по x . Параметр a отвечает за устойчивость разностной схемы и также не может быть большим, иначе решение пойдёт вразнос. Это зависит от крутизны начальных условий, так что параметр приходится подбирать опытным путём.

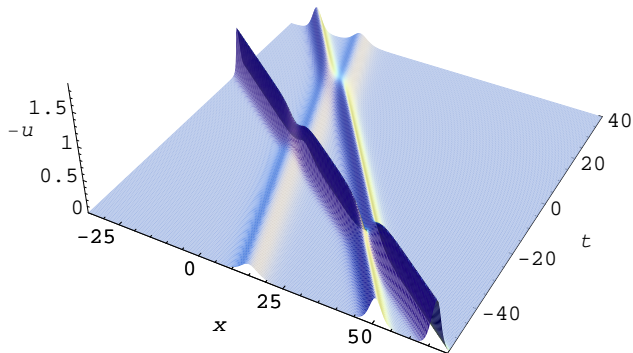


График 3-солитонного решения, как функции от x и t

Воспроизведем решение из [ZK]. Там рассматривался распад синусоидальной волны на 8 отдельных пичков. Поскольку решение периодическое, они не могут разойтись и вынуждены вечно проходить друг через друга. Тем не менее, индивидуальность пичков неплохо прослеживается и Забуски и Краскалу этого было достаточно, чтобы говорить о солитонах.

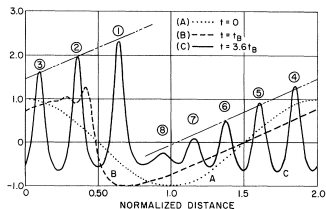


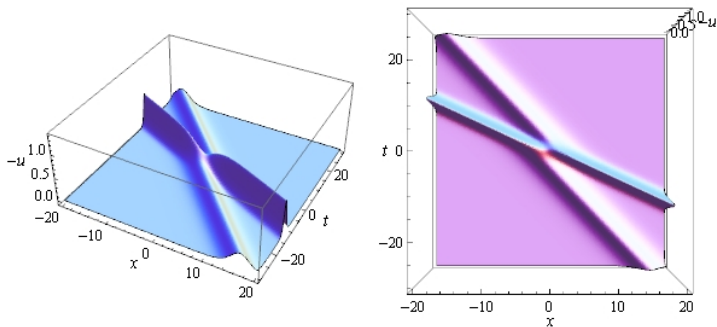
FIG. 1. The temporal development of the wave form $u(x)$.

Начальное условие $u = \cos 0.15x$; $N = 400$, $a = 0.005$. Справа — график из [ZK], на нем ось x перевернута и масштабирована. Он примерно отвечает моменту $t = 3.6$ на анимации слева.

Как устроено многосолитонное решение КдФ

Точные формулы будут получены на последующих лекциях (несколькими способами). Пока голословные утверждения.

- Все солитоны бегут налево; чем больше амплитуда, тем больше скорость (амплитуды у всех разные).
- При $t \rightarrow -\infty$ решение распадается в сумму отдельных солитонов, расположенных слева направо по возрастанию.
- При $t \rightarrow +\infty$ имеем сумму отдельных солитонов, расположенных слева направо по убыванию.
- При конечных t происходят столкновения. После столкновения солитоны полностью восстанавливают форму, размер и скорость (упругое столкновение).
- В результате столкновений прямолинейная траектория немного смещается по сравнению с траекторией одиночного солитона (фазовый сдвиг). Более быстрый солитон проскакивает вперед, медленный — притормаживает. Величина сдвига есть функция от амплитуд двух сталкивающихся солитонов.



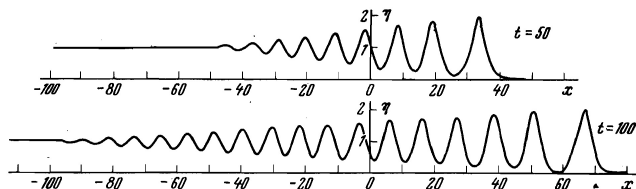
- Итоговый фазовый сдвиг для каждого солитона равен сумме фазовых сдвигов при попарных столкновениях. Он не зависит от порядка столкновений. Даже если в какой-то момент несколько солитонов попадают в одну точку, сдвиги будут такими же, как если бы они сталкивались по очереди.

- В момент столкновения амплитуды не складываются, в отличие от линейных волн. Наоборот, солитоны слегка расползаются и как бы приседают. В любой момент времени максимум решения не превосходит амплитуды наибольшего солитона.
- Площадь под графиком (масса) сохраняется в любой момент времени. Есть и другие сохраняющиеся величины.
- N -солитонное решение зависит от $2N$ параметров (k_j, δ_j) , то есть, это частное решение КдФ. Тем не менее, решение задачи Коши с общим быстроубывающим начальным данным $u(x, 0)$ аппроксимируется N -солитонным решением при достаточно большом N , с мелкой рябью на его фоне.

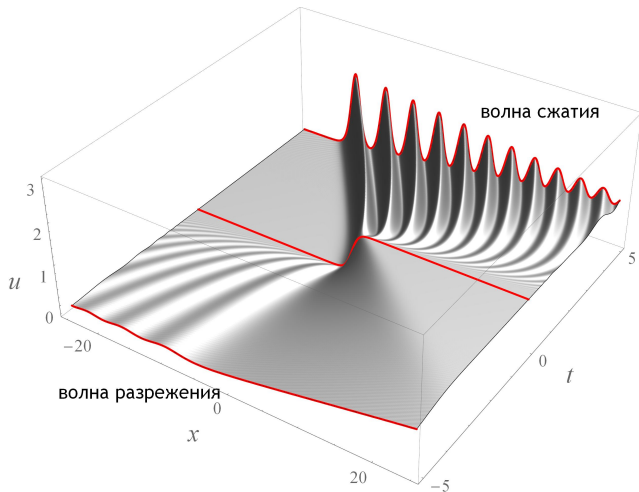
Другие решения

- Рациональные решения (в КдФ — с полюсами).
- Конечнозонные решения — ограниченные, квазипериодические.
- Вместо бегущей волны можно рассматривать решения, инвариантные относительно групп растяжения и преобразования Галилея — это приводит к уравнениям Пенлеве.
- Задача Коши с небыстроубывающими граничными условиями на бесконечности, в частности, задача о распаде ступеньки.

[GP] А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский. Распад начального разрыва в уравнении Кортевега–де Вриза. *Письма в ЖЭТФ* **17:5** (1973) 268–271.



Результат численного счета по схеме Забуски–Краскала, для начального условия $u(x, 0) = \frac{1}{2}(\tanh x - 1)$.



Другие уравнения

- КдФ — это максимально простое интегрируемое уравнение, ничего лишнего. В более сложных моделях, кроме солитонов, встречаются и другие типы точных решений — кинки (разные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$), солитоны огибающей (то есть, солитоны в виде осциллирующих волновых пакетов), бризеры (пульсирующие солитоны) и т.д.. Кроме столкновений, может быть распад и слияние солитонов, по определенным правилам.
- Важное свойство интегрируемых уравнений — они допускают точные решения, составленные из *произвольного* числа элементарных решений.
- Неинтегрируемые уравнения этим свойством не обладают, однако существуют уравнения, у которых есть 2-солитонные решения, но нет 3-солитонных.
Полуэмпирический факт: если уравнение допускает 3-солитонное решение, то оно интегрируемо и допускает n -солитонное решение с произвольным n .

Домашнее задание

1.1. Скорость и амплитуда солитона (5) определяются параметром k . Чему равна ширина этого солитона? Вычислите площадь под графиком (= масса солитона) и найдите характерную ширину основания солитона, заменив его на равновеликий равнобедренный треугольник той же высоты.

1.2. Кроме КдФ, в «золотой фонд» входят (список неполный) модифицированное уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2 u_x;$$

уравнение Буссинеска (уравнение нелинейной струны)

$$u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0;$$

нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i w_t = w_{xx} \pm 2|w|^2 w \quad (w = u + iv);$$

уравнение sin/sinh-Гордона

$$u_{xy} = \sin u, \quad u_{xy} = \sinh u.$$

Попробуйте найти для этих уравнений как можно больше точных решений, выражающихся через элементарные функции (солитоны, кинки, солитоны огибающей, рациональные...).

Замечание 1. В этих уравнениях, как и в КдФ, коэффициенты можно растягивать, но знак поменять нельзя (работая только с вещественными переменными). Формально-алгебраические свойства от знака не зависят, но вещественные решения устроены по-разному.

Замечание 2. Уравнение NLS — это фактически система на две переменные u, v . Для поиска солитона огибающей используйте подстановку вида

$$w = e^{i(ax+bt+c)}y(kx + mt)$$

с вещественными параметрами и неизвестной функцией y .

