

Метод факторизации

К лекции 8 (2024)

1 Гармонический осциллятор

Определение собственных функций при помощи оператора рождения, вычисление нормировочных множителей

```
In[1]:= F[0] = Exp[-x^2/2];  
F[n_] := Factor[-D[F[n-1], x] + x F[n-1]] /; n > 0  
  
F[0]  
F[1]  
F[2]  
F[3]  
F[4]  
  
r[n_] := Integrate[F[n]^2, {x, -∞, ∞}]^1/2  
rr[n_] := NIntegrate[F[n]^2, {x, -∞, ∞}]^1/2  
  
Table[r[j], {j, 0, 5}]
```

Out[3]= $e^{-\frac{x^2}{2}}$

Out[4]= $2 e^{-\frac{x^2}{2}} x$

Out[5]= $2 e^{-\frac{x^2}{2}} (-1 + 2 x^2)$

Out[6]= $4 e^{-\frac{x^2}{2}} x (-3 + 2 x^2)$

Out[7]= $4 e^{-\frac{x^2}{2}} (3 - 12 x^2 + 4 x^4)$

Out[10]=

$\{\pi^{1/4}, \sqrt{2} \pi^{1/4}, 2 \sqrt{2} \pi^{1/4}, 4 \sqrt{3} \pi^{1/4}, 8 \sqrt{6} \pi^{1/4}, 16 \sqrt{15} \pi^{1/4}\}$

Сравнение со встроенными функциями Эрмита

```
In[11]:= Factor[Table[F[j] - HermiteH[j, x] F[0], {j, 0, 5}]]
```

Out[11]=

$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Построение графика с n уровнями

```

In[12]:= osc[n_] := Plot[
  Evaluate[Append[Table[F[j] / rr[j] + 2 j + 1, {j, 0, n - 1}], x^2]], {x, -4.5, 4.5},
  PlotStyle -> Append[Table[Automatic, n], Blue],
  Filling -> Table[j -> 2 j - 1, {j, 1, n}],
  Ticks ->
  {Automatic, Table[If[OddQ[i], {i, i, {0, .015}}, {i, , {0, .01}}], {i, 0, 2 n + 3, 1/2}]},
  PlotRange -> {{-Sqrt[2 n] - 1, Sqrt[2 n] + 1}, {-0.5, 2 n + 0.2}},
  BaseStyle -> {FontSize -> 16, FontFamily -> "Times New Roman"}]

```

```

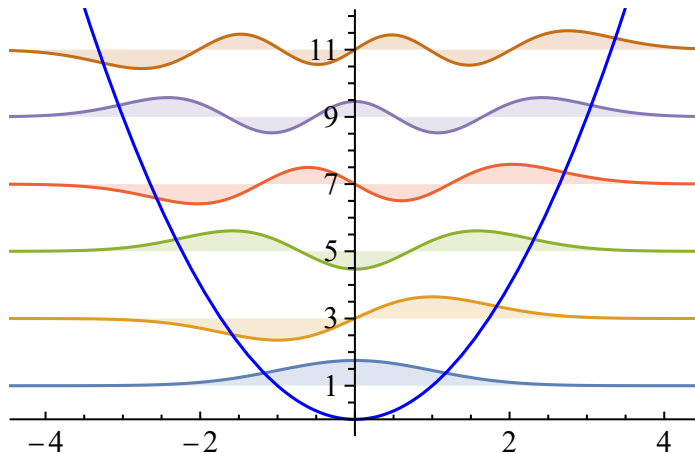
In[13]:= osc[6]

```

```

Out[13]=

```



```

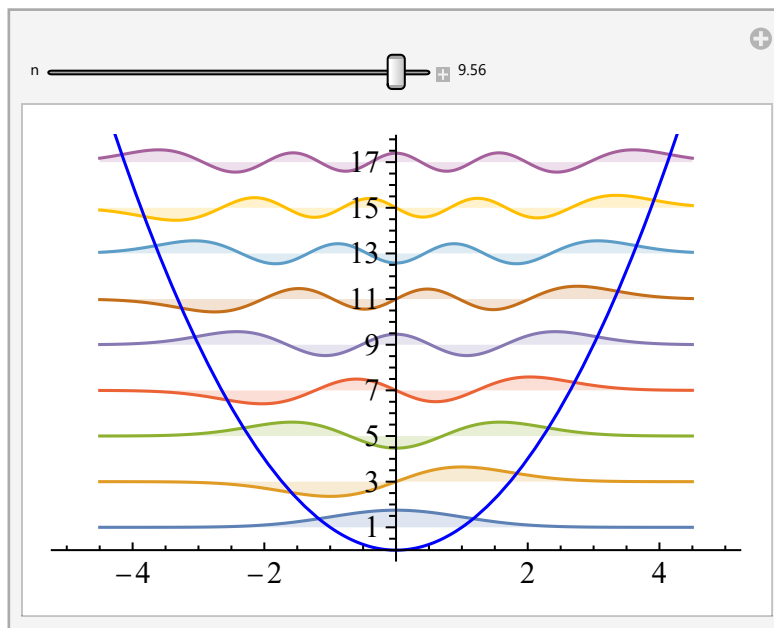
In[14]:= Manipulate[osc[Floor[n]],
  {{n, 0}, 0, 10, Appearance -> "Labeled"}]

```

```

Out[14]=

```



2 Потенциал Морзе

Проверка уравнений

```
In[15]:= Clear[c, a, f, u, A, F, r]

f[n_] := -n + c - Exp[x]
a[n_] := -(n - c)^2
u[n_] := Exp[2 x] + (2 (n - c) - 1) Exp[x]

Expand[-D[f[n] + f[n + 1], x] + f[n]^2 - f[n + 1]^2 + a[n] - a[n + 1]]
Expand[-u[n] + f[n]^2 + D[f[n], x] + a[n]]
```

Out[19]=

0

Out[20]=

0

Минимум потенциала u_0

```
In[21]:= D[u[0], x]
Solve[% == 0 /. x -> Log[X], X]
Factor[u[0] /. x -> Log[X] /. %[[2]]]
```

Out[21]=

$(-1 - 2c) e^x + 2 e^{2x}$

Out[22]=

$\left\{ \{X \rightarrow 0\}, \left\{ X \rightarrow \frac{1}{2} (1 + 2c) \right\} \right\}$

Out[23]=

$-\frac{1}{4} (1 + 2c)^2$

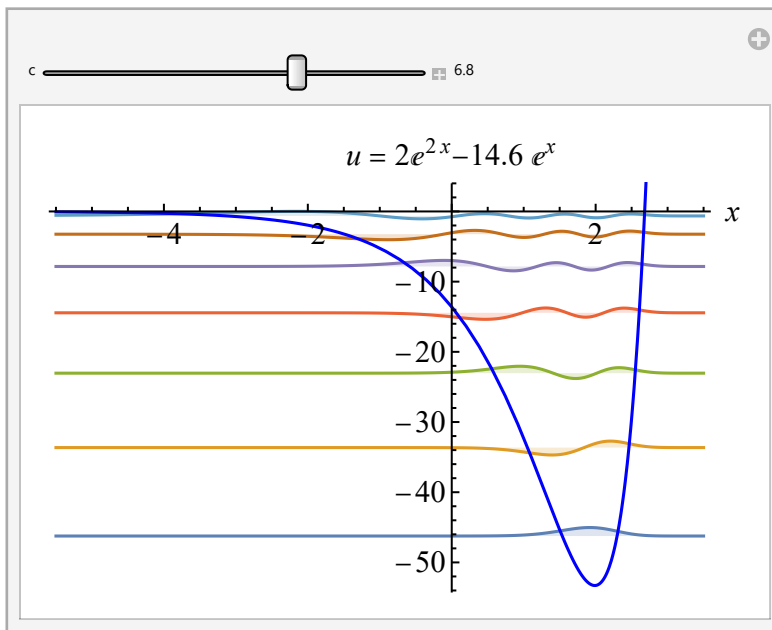
Определение с.ф., операторов рождения и нормировочных констант

```
In[24]:= A[n_, y_] := Expand[-D[y, x] - f[n] y]
F[n_, n_] := Exp[Integrate[f[n], x]]
F[n_, k_] := A[k, F[n, k + 1]] /; k < n
r[n_, k_] := NIntegrate[F[n, k]^2, {x, -∞, ∞}]^1/2
```

```
In[28]:= morse[cc_] := Block[{m = Ceiling[cc] - 1, fu, aa},
  c = cc;
  fu = Evaluate[Append[Table[F[j, 0] / r[j, 0] + a[j], {j, 0, m}], u[0]]];
  aa = Table[a[j], {j, 0, m}];
  Clear[c];
  Plot[fu,
    {x, -5.5, 3.5},
    Filling -> Table[j -> aa[[j]], {j, 1, m + 1}],
    PlotStyle -> Append[Table[Automatic, m + 1], Blue],
    PlotRange -> {{-5.6, 3.6}, {-1 - (2 cc + 1)^2 / 4, 4}},
    AxesLabel -> {"x", "u = 2e^{2x} - " <> ToString[2 cc + 1] <> " e^x"},
    BaseStyle -> {FontSize -> 16, FontFamily -> "Times New Roman"}]
]
```

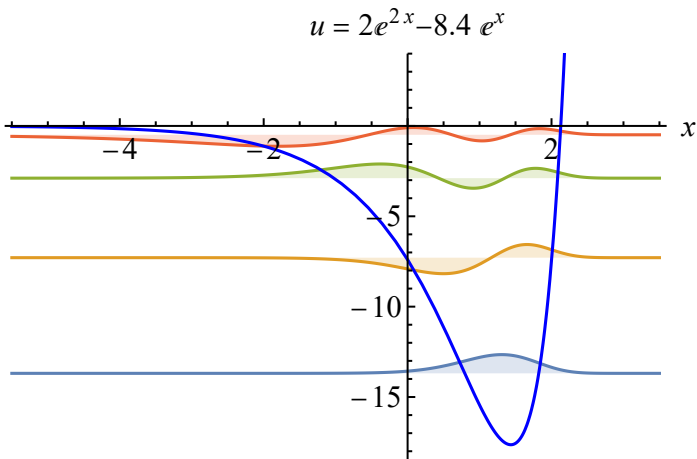
```
In[29]:= Manipulate[morse[c],
  {{c, 0}, 0, 10, Appearance -> "Labeled"}
]
```

Out[29]=



```
In[30]:= morse[3.7]
```

Out[30]=



```
In[31]:= Export[NotebookDirectory[] <> "morse.pdf", morse[3.7], "PDF"];
```

3 Осциллятор со щелью

Ниже скопированы команды для гармонического осциллятора. Попробуйте модифицировать их и построить потенциал и собственные функции из задачи 8.5. Нормировочные множители лучше сразу считать `NIntegrate`.

Определение собственных функций при помощи оператора рождения, вычисление нормировочных множителей

```
In[32]:= F[0] = Exp[-x^2/2];
F[n_] := Factor[-D[F[n-1], x] + x F[n-1]] /; n > 0
```

```
F[0]
F[1]
F[2]
F[3]
F[4]
r[n_] := Integrate[F[n]^2, {x, -∞, ∞}]^1/2
rr[n_] := NIntegrate[F[n]^2, {x, -∞, ∞}]^1/2

Table[r[j], {j, 0, 5}]
```

Out[34]=

$$e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Out[35]=

$$2 e^{-\frac{x^2}{2}} x$$

Out[36]=

$$2 e^{-\frac{x^2}{2}} (-1 + 2 x^2)$$

Out[37]=

$$4 e^{-\frac{x^2}{2}} x (-3 + 2 x^2)$$

Out[38]=

$$4 e^{-\frac{x^2}{2}} (3 - 12 x^2 + 4 x^4)$$

Out[41]=

$$\{\pi^{1/4}, \sqrt{2} \pi^{1/4}, 2 \sqrt{2} \pi^{1/4}, 4 \sqrt{3} \pi^{1/4}, 8 \sqrt{6} \pi^{1/4}, 16 \sqrt{15} \pi^{1/4}\}$$

Сравнение со встроенными функциями Эрмита

```
In[42]:= Factor[Table[F[j] - HermiteH[j, x] F[0], {j, 0, 5}]]
```

Out[42]=

{0, 0, 0, 0, 0, 0}

Построение графика с n уровнями

```
In[43]:= osc[n_] := Plot[
  Evaluate[Append[Table[F[j] / rr[j] + 2 j + 1, {j, 0, n - 1}], x^2]], {x, -4.5, 4.5},
  PlotStyle → Append[Table[Automatic, n], Blue],
  Filling → Table[j → 2 j - 1, {j, 1, n}],
  Ticks →
  {Automatic, Table[If[OddQ[i], {i, i, {0, .015}}, {i, , {0, .01}}], {i, 0, 2 n + 3, 1/2}]},
  PlotRange → {{-Sqrt[2 n] - 1, Sqrt[2 n] + 1}, {-0.5, 2 n + 0.2}},
  BaseStyle → {FontSize → 16, FontFamily → "Times New Roman"}]
```

In[44]:= **osc [6]**

Out[44]=

