В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 12 · 24 апреля 2023

Линеаризуемые уравнения

План

- Уравнение Бюргерса
- Уравнение Лиувилля
- 2D цепочка Тоды со свободными концами
- Заключительные замечания

S- и C-интегрируемость

Методы интегрирования уравнений КдФ, НУШ, синус-Гордона и многих других основаны на том, что эти уравнения служат условием совместности для пары вспомогательных линейных уравнений. Отсюда извлекаются:

— законы сохранения,
— симметрии,
— конечномерные редукции для построения конечнозонных решений и их вырождений (солитоны, рациональные решения),
— данные рассеяния и их эволюция для решения задачи Коши (с подходящими граничными условиями типа быстроубывания).

Нелинейные уравнения такого типа иногда называют S-интегрируемыми (от слова *scattering*, то есть, интегрируемые при помощи метода обратной задачи рассеяния.

Есть и более простой класс уравнений, который связан с линейными уравнениями более непосредственно — при помощи подстановок и замен переменных. Уравнения такого типа называют C-интегрируемыми (от слова *change*).

Уравнение Бюргерса

Простейший C-интегрируемый пример — уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x. \tag{1}$$

Оно линеаризуется подстановкой Коула–Хопфа:

$$u = \psi_x/\psi, \quad \psi_t = \psi_{xx}.$$

Любое решение уравнения теплопроводности даёт решение уравнения (1). Высшие симметрии получаются из уравнений

$$\psi_{t_n} = \partial_x^n(\psi),$$

при той же замене. Замена $\psi \to u$ является композицией точечного преобразования и введения потенциала:

$$\psi = \exp v, \quad v_x = u.$$

В результате точечной замены получаем последовательность коммутирующих потоков

$$v_{t_n} = (D_x + v_1)^n(1) = Y_n(v_1, \dots, v_n), \quad v_j = \partial_x^j(v), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Оператор $D_x + v_1$ играет для этих уравнений роль оператора рекурсии.

Так как правые части уравнений не содержат v_0, то можно сделать подстановку $u = v_1$, что и приводит к иерархии Бюргерса

$$u_{t_n} = D_x(Y_n(u_0, \dots, u_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что Y_n — это многочлены Белла

$$\begin{aligned}
&Y_0 = 1\\
&Y_1 = v_1\\
&Y_2 = v_2 + v_1^2\\
&Y_3 = v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3\\
&Y_4 = v_4 + 4v_1v_3 + 3v_2^2 + 6v_1^2v_2 + v_1^4\\
&Y_5 = v_5 + 5v_1v_4 + 10v_2v_3 + 10v_1^2v_3 + 15v_1v_2^2 + 10v_1^3v_2 + v_1^5
\end{aligned}$$

которые применяются в матанализе (формула Фаа ди Бруно) и комбинаторике (разбиения множеств).

Уравнение Ибрагимова–Шабата

Более сложный пример, связанный с симметрией уравнения теплопроводности третьего порядка:

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4 u_x.$$

Здесь последовательность замен хитрее, она неявная в обе стороны:

$$\begin{array}{lcl}
\psi_t = \psi_{xxx} & & u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4 u_x \\
\quad \updownarrow \psi^2 = s & & \quad \updownarrow u^2 = v \\
s_t = D_x\Big(s_{xx} - \dfrac{3s_x^2}{4s}\Big) & & v_t = D_x\Big(v_{xx} - \dfrac{3v_x^2}{4v} + 3vv_x + v^3\Big) \\
\quad \uparrow s = q_x & & \quad \uparrow v = w_x \\
q_t = q_{xxx} - \dfrac{3q_{xx}^2}{4q_x} & \xleftrightarrow{q=e^{2w}} & w_t = w_{xxx} - \dfrac{3w_{xx}^2}{4w_x} + 3w_x w_{xx} + w_x^3
\end{array}$$

Высшие симметрии получаются этими же заменами из уравнений нечётного порядка $\psi_{t_{2m+1}} = \psi_{2m+1}$ (чётные не годятся: $s_{t_{2m}}$ не записывается как полная производная, поэтому подстановка $s = q_x$ не проходит).

Уравнение Лиувилля

Рассмотрим уравнение (Лиувилль, 1853)

$$u_{xy} = e^u. \tag{2}$$

Это простейший и, в то же время, типичный пример C-интегрируемого уравнения. Оно обладает следующими свойствами.

- Линеаризуемость: если $\psi(x,y)$ — решение уравнения $\psi_{xy} = 0$, то

$$u = \log\left(2\frac{\psi_x\psi_y}{\psi^2}\right) \tag{3}$$

— решение (2). Действительно,

$$u = \log 2 + \log\psi_x + \log\psi_y - 2\log\psi,$$

тогда

$$u_{xy} = -2(\log\psi)_{xy} = -2\frac{\cancel{\psi_{xy}\psi} - \psi_x\psi_y}{\psi^2} = \frac{2\psi_x\psi_y}{\psi^2} = e^u.$$

- Существование x-интеграла I и y-интеграла J:

$$I = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2, \quad D_x(I) = 0; \qquad J = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2, \quad D_y(J) = 0. \tag{4}$$

Здесь D_x и D_y понимаются, как полные производные в силу уравнения, то есть, все смешанные производные u_{xy}, u_{xxy}, u_{xyy}, $\dots$ исключаются. Действительно,

$$D_x(I) = u_{xyy} - u_y u_{xy} = (e^u)_y - u_y e^u = 0,$$

и аналогично для J. Очевидно, любая функция $f(y, I, D_y(I), \dots, D_y^n(I))$ — также x-интеграл (ДЗ: доказать, что других нет).

- Конформная инвариантность: если $u(x,y)$ решение уравнения Лиувилля, и $f(x)$, $g(y)$ произвольные непостоянные, дифференцируемые функции, то

$$\tilde{u}(x,y) = u(f(x), g(y)) + \log(f'(x)g'(y)); \tag{5}$$

также является решением:

$$\tilde{u}_{xy} = f'(x)g'(y)u_{xy} = f'(x)g'(y)e^u = e^{\tilde{u}}.$$

- Явная формула для общего решения:

$$e^u = \frac{2a'(x)b'(y)}{(a(x)+b(y))^2}, \tag{6}$$

где a и b произвольные функции. Этот же ответ можно записать и иначе, например,

$$e^u = -\frac{2a'(x)b'(y)}{(1+a(x)b(y))^2} \tag{7}$$

— это та же самая формула, с точностью до замены $a \to 1/a$.

То, что (6) — решение, сразу следует из подстановки (3) и формулы Даламбера $\psi = a(x) + b(y)$ для уравнения $\psi_{xy} = 0$.

Немного труднее доказать, что *любое* решение уравнения Лиувилля может быть записано в виде (6). Для этого воспользуемся x- и y-интегралами. Любое решение u удовлетворяет также паре ОДУ

$$u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2 = I(y), \quad u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 = J(x).$$

Отсюда ясно, что ответ содержит 2 произвольные функции +4 константы, нужно его только упростить.

Свойство конформной инвариантности позволяет обратить y-интеграл $J(x)$ в 0 за счёт замены с подходящей функцией $f(x)$. Действительно:

$$\tilde{u}_x = f'u_x + \frac{f''}{f'}, \qquad \tilde{u}_{xx} = (f')^2 u_{xx} + f''u_x + \Big(\frac{f''}{f'}\Big)';$$

тогда

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= \tilde{u}_{xx} - \frac{1}{2}\tilde{u}_x^2\\ &= (f')^2 u_{xx} + f''u_x + \frac{f'''}{f'} - \frac{(f'')^2}{(f')^2} - \frac{1}{2}\Big(f'u_x + \frac{f''}{f'}\Big)^2\\ &= (f')^2 J + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\Big(\frac{f''}{f'}\Big)^2 = (f')^2 J + S_f.\end{aligned}$$

(выражение S_f называется производной Шварца). При заданном $J(x)$, уравнение $\tilde{J} = 0$ есть ОДУ относительно $f(x)$:

$$f''' - \frac{3(f'')^2}{2f'} = -(f')^3 J(x).$$

Для замены достаточно взять любое частное решение (достаточно знать, что оно есть).

Точно так же, x-интеграл $I(y)$ обращается в 0 за счёт выбора подходящей $g(y)$. В результате, заменой (5) любое решение уравнения Лиувилля сводится к решению системы

$$u_{xx}=\frac{1}{2}u_x^2,\quad u_{yy}=\frac{1}{2}u_y^2,\quad u_{xy}=e^u.$$

Эти уравнения легко решаются. Общее решение имеет вид

$$e^u=(\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy)^{-2},\quad 2(\beta\gamma-\alpha\delta)=1,$$

с постоянными $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

После этого, в нашем распоряжении еще остаются конформные замены (5) с дробно-линейными функциями $f(x)$ и $g(y)$. Действительно, для них $S_f=0$ и $S_g=0$, поэтому J и I остаются равными 0. Используя такие дополнительные преобразования, ответ можно привести к виду

$$e^u=2(x+y)^{-2}.$$

Применяя обратное преобразование (5) с произвольными функциями, получаем формулу (6).

- Уравнение Лиувилля допускает эволюционные симметрии. В частности, оно совместно с уравнением

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3. \tag{8}$$

В силу симметрии $x \leftrightarrow y$, симметрией является также $u_\tau = u_{yyy} - \frac{1}{2}u_y^3$.

Как обычно, совместность означает равенство перекрестных производных:

$$\begin{aligned}(u_{xy})_t &= e^u u_t = e^u(u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_x^3);\\ (u_t)_{xy} &= (u_{xxxy} - \tfrac{3}{2}u_x^2 u_{xy})_x = ((e^u)_{xx} - \tfrac{3}{2}e^u u_x^2)_x\\ &= (e^u(u_{xx} - \tfrac{1}{2}u_x^2))_x = e^u(u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_x^3).\end{aligned}$$

Уравнение (8) эквивалентно мКдФ, при подстановке $v = u_x$, это S-интегрируемое уравнение. Однако, это “случайное” совпадение, на самом деле у уравнения Лиувилля “слишком много” симметрий, большинство из которых неинтегрируемы.

В частности, покажем, что уравнения Лиувилля совместно с любым уравнением вида

$$u_t = F_x + u_x F = e^{-u}(e^u F)_x,$$

где $F = F(x, J, J_x, J_{xx}, \dots)$ — произвольный y-интеграл (уравнение (8) получается при $F = J$).

Имеем, используя только свойство $F_y = 0$:

$$\begin{aligned}(u_{xy})_t &= e^u u_t = (e^u F)_x;\\ (u_t)_{xy} &= (F_x + u_x F)_{xy} = (u_{xy} F)_x = (e^u F)_x.\end{aligned}$$

Двумерная цепочка Тоды

Двумерной цепочкой Тоды (2DTL) называется дифференциально-разностное уравнение

$$u_{j,xy} = e^{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Её часто записывают также для переменных $q_j = u_j - u_{j-1}$:

$$q_{j,xy} = e^{q_{j+1}-q_j} - e^{q_j-q_{j-1}}, \tag{10}$$

или для переменных $b_j = q_{j,x}$, $c_j = -e^{q_j-q_{j-1}}$:

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}), \tag{11}$$

и в других эквивалентных формах. С точностью до таких замен, 2DTL была введена Лапласом в 1893 (и переоткрыта Михайловым в 1979) при изучении преобразований, действующих на решениях линейных гиперболических уравнений вида

$$\psi_{xy} = a(x,y)\psi_x + b(x,y)\psi_y + c(x,y)\psi. \tag{12}$$

Каскадный метод Лапласа

Этот метод заключается в определении последовательности преобразований вида

$$\tilde{\psi} = \psi_x + f\psi \quad \text{или} \quad \tilde{\psi} = \psi_y + g\psi,$$

при которых коэффициенты уравнения (12) меняются, а сам вид остаётся таким же.

В этих преобразованиях есть некоторый произвол, так как их можно комбинировать с калибровочным преобразованием

$$\psi = h(x,y)\hat{\psi},$$

также не меняющим вид уравнения. Чтобы отфакторизоваться от него, можно выписывать уравнения на инварианты группы таких преобразований (инварианты Лапласа), либо как-то зафиксировать калибровку.

Мы используем второй вариант и фиксируем калибровку, полагая $a = 0$. В результате возникают следующие линейные уравнения, в которые мы сразу введём индекс j вместо тильды (то есть, $\widetilde{\psi_j} = \psi_{j+1}$).

Выведем условие совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{j,x} = \psi_{j+1} + b_j\psi_j, \tag{13}$$
$$\psi_{j,y} = c_j\psi_{j-1}. \tag{14}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\psi_{j,xy} = \psi_{j+1,y} + b_{j,y}\psi_j + b_j\psi_{j,y} = c_{j+1}\psi_j + b_{j,y}\psi_j + b_jc_j\psi_{j-1} =\\ \psi_{j,yx} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j\psi_{j-1,x} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j(\psi_j + b_{j-1}\psi_{j-1}).\end{aligned}$$

В результате, получаем цепочку (11)

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}).$$

Она описывает, как меняются коэффициенты линейных уравнений

$$\psi_{j,xy} = b_j\psi_{j,y} + c_j\psi_j \tag{15}$$

под действием преобразований

$$\psi_j \mapsto \psi_{j+1} = \psi_{j,x} - b_j\psi_j, \qquad \psi_j \mapsto \psi_{j-1} = c_j^{-1}\psi_{j,y}.$$

Выведем условие совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{j,x} = \psi_{j+1} + b_j\psi_j, \tag{13}$$

$$\psi_{j,y} = c_j\psi_{j-1}. \tag{14}$$

Имеем:

$$\psi_{j,xy} = \psi_{j+1,y} + b_{j,y}\psi_j + b_j\psi_{j,y} = c_{j+1}\psi_j + b_{j,y}\psi_j + b_jc_j\psi_{j-1} =$$
$$\psi_{j,yx} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j\psi_{j-1,x} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j(\psi_j + b_{j-1}\psi_{j-1}).$$

В результате, получаем цепочку (11)

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}).$$

Она описывает, как меняются коэффициенты линейных уравнений

$$\psi_{j,xy} = b_j\psi_{j,y} + c_j\psi_j \tag{15}$$

под действием преобразований

$$\psi_j \mapsto \psi_{j+1} = \psi_{j,x} - b_j\psi_j, \qquad \psi_j \mapsto \psi_{j-1} = c_j^{-1}\psi_{j,y}.$$

Пример, как работает каскадный метод: пусть дано уравнение

$$\psi_{j,xy} = y\psi_{j,y} - j\psi_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, функции $b_j = y$ и $c_j = j$ удовлетворяют цепочке, поэтому решения ψ_j отвечающие разным j связаны друг с другом. Значит, уравнение можно свести к случаю $j = 0$, для которого ответ записывается в квадратурах:

$$\psi_{0,xy} = y\psi_{0,y}, \quad \psi_0 = \int e^{xy} a(y)\, dy + b(x),$$

где a, b произвольные функции. В результате, при $j \geq 0$ получается формула

$$\psi_j = (D_x - y)^j(\psi_0).$$

Аналогично, при $j = -1$ имеем

$$\psi_{-1,xy} = (y\psi_{-1})_y, \quad \psi_{-1} = e^{xy}\Big(a(y) + \int e^{-xy} b(x)\, dx\Big),$$

и при $j \leq -1$ имеем формулу

$$\psi_j = D_y^{-j-1}(\psi_{-1}).$$

Таким образом, ответ записывается в квадратурах для любого целого j.

Редукции в цепочке Тоды

Из любого интегрируемого 3D уравнения можно получить множество 2D уравнений, понижая размерность какими-нибудь редукциями. Например, из уравнения КП получается уравнения КдФ, Буссинеска и еще много чего. Это верно и для цепочки Тоды.

В частности, одномерная версия цепочки (именно она была введена Тодой в 1967, как самостоятельная модель) получается, если рассматривать решения вида $q_j(x,y)=q_j(t)$, $t=x+y$:

$$q_j''=e^{q_{j+1}-q_j}-e^{q_j-q_{j-1}}. \tag{16}$$

Мы рассмотрим другие редукции, связанные с обрывом по j. Во-первых, покажем, что из цепочки Тоды получаются следующие гиперболические уравнения:

$u_{xy}=e^u$	уравнение Лиувилля (1853)
$u_{xy}=e^u-e^{-u}$	уравнение sinh-Гордона (Bour, 1862)
$u_{xy}=e^u-e^{-2u}$	уравнение Цицейки (1910)

Отметим, что эти уравнения плюс линейное уравнение $u_{xy} = \alpha u + \beta$ исчерпывают все интегрируемые уравнения вида

$$u_{xy} = f(u),$$

в смысле существования высших симметрий (классификационный результат Ибрагимова и Шабата 1980).

Затем рассмотрим некоторые замыкания большей длины по j, приводящие к n-компонентным системам, для которых, как и для уравнения Лиувилля, возможно выписать явную формулу для общего решения.

Редукция 2DTL → sinh-Гордон

Условие периодичности $b_{j+2}=b_j$, $c_{j+2}=c_j$ превращает (11) в систему

$$b_{1,y}=c_1-c_2,\quad c_{1,x}=c_1(b_1-b_2),$$
$$b_{2,y}=c_2-c_1,\quad c_{2,x}=c_2(b_2-b_1).$$

Можно положить (без потери общности)

$$b_1=b,\quad b_2=-b,\quad c_1=c,\quad c_2=1/c,$$

что приводит к системе

$$b_y=c-c^{-1},\quad c_x=2cb.$$

Положив $b=u_x$, $c=e^{2u}$, получим уравнение sinh-Гордона

$$u_{xy}=2\sinh 2u. \tag{17}$$

Периодичность коэффициентов не означает периодичность ψ-функций, для них это условие можно ослабить:

$$\psi_{j+2}=\lambda\psi_j.$$

Тогда уравнения (13), (14) превращаются в

$$\begin{aligned} \psi_{1,x} &= \psi_2 + b\psi_1, \quad & \psi_{1,y} &= \lambda^{-1} c\psi_2, \\ \psi_{2,x} &= \lambda\psi_1 - b\psi_2, \quad & \psi_{2,y} &= c^{-1}\psi_1, \end{aligned}$$

что можно переписать в виде матричного представления нулевой кривизны для (17):

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_y = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_y = V_x + [V, U],$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} b & 1 \\ \lambda & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & 1 \\ \lambda & -u_x \end{pmatrix},$$
$$V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} c \\ c^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} e^{2u} \\ e^{-2u} & 0 \end{pmatrix}.$$

Редукция 2DTL $\to$ уравнение Цицейки

Условие периодичности $b_{j+3}=b_j$, $c_{j+3}=c_j$ превращает (11) в систему

$$\begin{aligned} b_{1,y}&=c_1-c_2, & c_{1,x}&=c_1(b_1-b_3),\\ b_{2,y}&=c_2-c_3, & c_{2,x}&=c_2(b_2-b_1),\\ b_{3,y}&=c_3-c_1, & c_{3,x}&=c_3(b_3-b_2). \end{aligned}$$

Как и раньше, здесь можно без потери общности положить

$$b_1+b_2+b_3=0,\quad c_1c_2c_3=1,$$

что приводит к системе

$$\begin{aligned} b_{1,y}&=c_1-c_2, & c_{1,x}&=c_1(2b_1+b_2),\\ b_{2,y}&=c_2-1/(c_1c_2), & c_{2,x}&=c_2(b_2-b_1). \end{aligned}$$

Здесь возможна дальнейшая редукция (уже с потерей общности)

$$b_1=0,\quad b_2=b=u_x,\quad c_1=c_2=c=e^u,$$

приводящая к уравнению Цицейки:

$$b_y=c-c^{-2},\quad c_x=cb\quad\Rightarrow\quad u_{xy}=e^u-e^{-2u}.$$

Условие квазипериодичности ψ-функций

$$\psi_{j+3} = \lambda\psi_j$$

даёт при такой редукции уравнения

$$\begin{aligned} &\psi_{1,x} = \psi_2, && \psi_{1,y} = \lambda^{-1}c\psi_3,\\ &\psi_{2,x} = \psi_3 + b\psi_2, && \psi_{2,y} = c\psi_1,\\ &\psi_{3,x} = \lambda\psi_1 - b\psi_3, && \psi_{3,y} = c^{-2}\psi_2, \end{aligned}$$

то есть, в матричном виде, $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_y = V\Psi$, где

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & u_x & 1\\ \lambda & 0 & -u_x\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda^{-1}e^u\\ e^u & 0 & 0\\ 0 & e^{-2u} & 0\end{pmatrix}.$$

Вообще, периодическое замыкание

$$b_{j+n} = b_j, \quad c_{j+n} = c_j, \quad \psi_{j+n} = \lambda\psi_j$$

приводит к некоторой S-интегрируемой системе (хотя при $n > 3$ она не сводится к уравнению на одно поле).

Цепочка Тоды на полупрямой

Теперь рассмотрим другой способ замыкания 2DTL, приводящий к C-интегрируемым системам. Он не периодический, а определяется граничными условиями с нулевым обрывом

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 0 \tag{18}$$

на концах интервала по j.

Замечание. Существуют и другие C-интегрируемые обрывы. При их описании было обнаружено некое соответствие с классификацией простых алгебр Ли. Наш обрыв отвечает алгебрам Ли типа A_n.

При $n = 1$ обрыв (18) приводит к уравнению Лиувилля $u_{1,xy} = e^{-2u_1}$. Покажем, что система отвечающая произвольному n является обобщением уравнения Лиувилля, в том смысле, что для её решений существует явная формула, аналогичная (6).

Сначала рассмотрим обрыв только с одного конца, то есть, полубесконечную цепочку

$$u_0 = 0, \quad u_{j,xy} = e^{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{19}$$

Удобно перейти к уравнениям в рациональной форме, сделав замену $u_j = \log w_j$, тогда имеем

$$w_0 = 1, \quad w_j w_{j,xy} = w_{j,x} w_{j,y} + w_{j-1} w_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{20}$$

Решение этих уравнений полностью определяется произвольной функцией $w_1 = f(x,y)$, так как остальные переменные находятся рекуррентно по формуле

$$w_{j+1} = \frac{w_j w_{j,xy} - w_{j,x} w_{j,y}}{w_{j-1}}$$

(в предположении, что $w_{j-1} \neq 0$). Имеем

$$w_0 = 1, \quad w_1 = f(x,y), \quad w_2 = f f_{xy} - f_x f_y = \det \begin{pmatrix} f & f_y \\ f_x & f_{xy} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \frac{w_2 w_{2,xy} - w_{2,x} w_{2,y}}{f}.$$

Если расписать последнее выражение, то f сократится:

$$w_3 = \det \begin{pmatrix} f & f_y & f_{yy} \\ f_x & f_{xy} & f_{xyy} \\ f_{xx} & f_{xxy} & f_{xxyy} \end{pmatrix}.$$

После этого можно угадать общий ответ.

Сначала докажем одно полезное тождество (вариант тождества Якоби) для вронскианов от произвольных гладких функций

$$W(f_0,\dots,f_j)=\det\big(\partial_x^k(f_i)\big)_{i,k=0}^{j}.$$

Лемма 1. Пусть F — последовательность функций $f_0,\dots,f_j$ (возможно пустая, при этом полагаем $W(\varnothing)=1$). Тогда выполняется тождество

$$W(F)W(F,g,h)=\begin{vmatrix} W(F,g) & W(F,h)\\ \partial_x(W(F,g)) & \partial_x(W(F,h))\end{vmatrix}. \qquad (21)$$

Доказательство. $W(F,g,h)$ и правая часть тождества являются дифференциальными операторами, действующими на h:

$$(a_0\partial_x^{j+2}+\dots+a_{j+2})(h)=(b_0\partial_x^{j+2}+\dots+b_{j+2})(h).$$

При этом ядра обоих операторов натянуты на $f_0,\dots,f_j,g$. Ядро определяет дифференциальный оператор с точностью до множителя. Сравнение коэффициентов при $\partial_x^{j+2}(h)$ показывает, что этот множитель равен $W(F)$. ∎

Утверждение 2. Общее решение полубесконечной цепочки (20) имеет вид
$$w_n = W(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-1}(f)), \qquad (22)$$
где $f(x,y)$ произвольная бесконечно-дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть F последовательность $f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-2}(f)$ и
$$g = \partial_y^{j-1}(f), \quad h = \partial_y^{j}(f).$$
Тогда в тождестве (21) имеем
$$W(F) = w_{j-1}, \quad W(F,g) = w_j, \quad W(F,h) = \partial_y(w_j), \quad W(F,g,h) = w_{j+1}.$$
Следовательно, функции w_j удовлетворяют уравнениям
$$w_0 = 1, \quad w_{j-1}w_{j+1} = \begin{vmatrix} w_j & w_{j,y} \\ w_{j,x} & w_{j,xy} \end{vmatrix} = w_j w_{j,xy} - w_{j,x}w_{j,y},$$
что и требуется. ∎

Цепочка Тоды на отрезке с закреплёнными концами

Теперь наложим условие обрыва с двух концов: $u_0 = u_{n+1} = 0$ или, что то же самое, $w_0 = w_{n+1} = 1$.

При $n = 1$ получаем

$$u_{1,xy} = e^{-2u_1}.$$

Как уже говорилось, это, с точностью до растяжения, уравнение Лиувилля, решение которого определяется двумя функциями $a(x)$, $b(y)$ по формуле (6).

При $n = 2$ имеем систему

$$u_{1,xy} = e^{u_2 - 2u_1}, \quad u_{2,xy} = e^{-2u_2 + u_1},$$

в общем случае — цепочку Тоды типа A_n

$$\begin{aligned} u_{1,xy} &= e^{u_2 - 2u_1}, \\ u_{j,xy} &= e^{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ u_{n,xy} &= e^{-2u_n + u_{n-1}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Для этой системы существует явная формула, аналогичная (6), выражающая общее решение через $2n$ произвольных функций $a_1(x),\dots,a_n(x)$, $b_1(y),\dots,b_n(y)$.

Идея вывода заключается в том, чтобы воспользоваться формулой (22), учитывающей одно граничное условие $w_0=1$, и уточнить вид функции $f(x,y)$ при помощи второго условия $w_{n+1}=1$.

Фактически, формула (22) преобразует систему (23) в одно скалярное уравнение

$$w_{n+1}=W_x(f,\partial_y(f),\dots,\partial^n y(f))=1$$

на функцию $f(x,y)$, то есть,

$$\begin{vmatrix} f & f^{(0,1)} & \dots & f^{(0,n)} \\ f^{(1,0)} & f^{(1,1)} & \dots & f^{(1,n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(n,0)} & f^{(n,1)} & \dots & f^{(n,n)} \end{vmatrix}=1, \tag{24}$$

где $f^{(i,j)}=\partial_x^i\partial_y^j(f)$.

Воспользуемся тем, что для функций вида

$$f(x,y)=a_0(x)b_0(y)+\dots+a_n(x)b_n(y)$$

вронскиан факторизуется на множители, зависящие только от x и от y. Действительно, пусть $f=AB$, где A и B векторы

$$A=(a_0(x),a_1(x),\dots,a_n(x)),\quad B=(b_0(y),b_1(y),\dots,b_n(y)).$$

Тогда

$$W_x(f,\dots,\partial_y^n(f))=\det\begin{pmatrix} AB & AB^{(1)} & \dots & AB^{(n)}\\ A^{(1)}B & A^{(1)}B^{(1)} & \dots & A^{(1)}B^{(n)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A^{(n)}B & A^{(n)}B^{(1)} & \dots & A^{(n)}B^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n\\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} b_0 & b_0^{(1)} & \dots & b_0^{(n)}\\ b_1 & b_1^{(1)} & \dots & b_1^{(n)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_n & b_n^{(1)} & \dots & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$=W_x(a_0,\dots,a_n)W_y(b_0,\dots,b_n).$$

Далее, используем то, что при умножении всех $a_i(x)$ на общий множитель $p(x)$, он выносится из вронскиана:

$$W_x(pa_0,\dots,pa_n) = \det\begin{pmatrix} pa_0 & pa_1 & \dots & pa_n \\ (pa_0)' & (pa_1)' & \dots & (pa_n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (pa_0)^{(n)} & (pa_1)^{(n)} & \dots & (pa_n)^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= p^{n+1}W_x(a_0,\dots,a_n),$$

и аналогично для W_y. За счет этого можно отнормировать вронскианы так, чтобы они были равны 1.

Утверждение 3. Система (23) имеет решение

$$u_j = \log W_x(f,\partial_y(f),\dots,\partial_y^{j-1}(f)),\quad j=1,\dots,n,$$

$$f = \big(W_x(a'_1,\dots,a'_n)W_y(b'_1,\dots,b'_n)\big)^{-\frac{1}{n+1}}(1+a_1b_1+\dots+a_nb_n),$$

с произвольными линейно независимыми функциями $a_i(x), b_i(y)$.

При $n=1$ это решение совпадает с формулой для уравнения Лиувилля (7), с точностью до замены $2u_1=-u$.

Что мы прошли

(с разной степенью подробности, в основном — на простейшем примере уравнения КдФ)

- представления Лакса или нулевой кривизны
- законы сохранения
- подстановки типа Миуры
- преобразования Дарбу–Бэклунда
- симметрии (классические и высшие)
- оператор рекурсии
- метод обратной задачи рассеяния
- решения:
  - многосолитонные (потенциалы Баргманна)
  - конечнозонные (уравнения Новикова и Дубровина)
  - автомодельные (уравнения Пенлеве)
- слегка затронули другие типы уравнений, в частности:
  - цепочки (Вольтерры, Тоды, одевающая)
  - дискретные уравнения (типа разностного уравнения КдФ, получается как суперпозиция ПБ)

Что мы не прошли

- теория и приложения дифференциальных и псевдодифференциальных операторов
- представления Лакса на алгебрах Ли
- лагранжева и гамильтонова структура, би-гамильтоновость
- r-матричный формализм
- билинейные уравнения Хироты, тау-функции
- рациональные решения
- задачи с «неинтегрируемыми» граничными условиями (типа задач Гуревича–Питаевского)
- различные классы уравнений, в частности:
    - интегрируемые отображения (пример — бильярд в квадрике)
    - задачи многих тел (например, система Калоджеро–Мозера для полюсов рациональных решений КдФ, система Гарнье для пси-функций)
    - трёхмерные уравнения (например, Кадомцева–Петвиашвили)
- связи с квантовыми интегрируемыми моделями

Домашнее задание

12.1. Решения цепочки (11), зависящие только от $t = x + y$, очевидно, описываются одномерной цепочкой Тоды

$$b_j' = c_j - c_{j+1}, \quad c_j' = c_j(b_j - b_{j-1}),$$

что эквивалентно (16). Получите для этой цепочки представление нулевой кривизны вида

$$\Phi_{j+1} = W_j \Phi_j, \quad \Phi_j' = U_j \Phi_j \quad \Rightarrow \quad W_j' = U_{j+1} W_j - W_j U_j,$$

с 2×2 матрицами U_j, W_j. Для этого, подставьте $\psi_j(x, y) = e^{\lambda x} \phi_j(t)$ в линейные уравнения (13), (14) для двумерной цепочки и перепишите их относительно вектора-столбца $\Phi_j = (\phi_j, \phi_{j+1})^T$.

12.2. Докажите, что любой y-интеграл уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ выражается через базисный интеграл $J = u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2$ и его производные по x:

$$D_y(F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = f(x, J, D_x(J), \ldots, D_x^n(J)).$$

(Естественно, аналогичное утверждение верно и для x-интегралов).