

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 7 · 20 марта 2023

Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Обратная задача

План

на прошлой лекции:

- Прямая задача
 - ▶ Функции Йоста
 - ▶ Матрица перехода
 - ▶ Данные рассеяния

на этой лекции:

- Обратная задача
 - ▶ Зависимость данных рассеяния от t
 - ▶ Определение $a(k)$ и $b(k)$ по коэффициенту отражения $r(k)$
 - ▶ Восстановление потенциала по данным рассеяния (сведение к сингулярным интегральным уравнениям)

Свойства данных рассеяния (повторение)

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi, \quad \lambda = k^2$$

Функции Йоста:

$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$	
$\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\psi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \geq 0$
$\varphi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\psi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \leq 0$

Свойства симметрии:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, k) &= \varphi_2(x, -k), & \psi_1(x, k) &= \psi_2(x, -k), \\ \varphi_1(x, k)^* &= \varphi_2(x, k^*), & \psi_1(x, k)^* &= \psi_2(x, k^*), \\ \varphi_i(x, k)^* &= \varphi_i(x, -k^*), & \psi_i(x, k)^* &= \psi_i(x, -k^*).\end{aligned}$$

На мнимой полуоси

$$\varphi_1(x, iz), \quad \psi_2(x, iz) \in \mathbb{R}, \quad z > 0.$$

Данные непрерывного спектра: функции $a(k), b(k) \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\varphi_1 = a(k)\psi_1 + b(k)\psi_2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Данные дискретного спектра: сам дискретный спектр $\lambda_j = -\kappa_j^2$, где

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n > 0$$

и числа $c_1, \dots, c_n$ такие, что $\varphi_1(x, i\kappa_j) = c_j\psi_2(x, i\kappa_j)$.

Свойства:

- 1) $a(k)^* = a(-k), \quad b(k)^* = b(-k), \quad k \in \mathbb{R};$
- 2) $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R};$
- 3) выражения для $a(k), b(k)$ через вронскианы от функций Йоста:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_1, \psi_2)}{2ik}, \quad b(k) = -\frac{W(\varphi_1, \psi_1)}{2ik}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0;$$

- 4) $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, причем

$$a(k)^* = a(-k^*), \quad \operatorname{Im} k \geq 0;$$

5) интегральные выражения для $a(k)$, $b(k)$:

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} u(x) \varphi_1(x, k) dx,$$
$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x) \varphi_1(x, k) dx;$$

6) асимптотика по k :

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} k \geq 0,$$
$$b(k) = O(k^{-1}), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R};$$

7) нули $a(k)$ в верхней полуплоскости совпадают с $i\kappa_j$, $j = 1, \dots, n$;

8) $c_j \in \mathbb{R}$, причём

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad \dots, \quad \operatorname{sign} c_n = (-1)^{n+1}.$$

Зависимость данных рассеяния от t

До сих пор предполагалось, что потенциал $u = u(x)$ зависит лишь от x .

Если дано некоторое 1-параметрическое семейство потенциалов $u(x, t)$, то при каждом фиксированном t можно повторить вычисление функций Йоста и далее по ним определить данные рассеяния. Естественно, всё это теперь тоже будет зависеть от t :

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2} &= \varphi_{1,2}(x, t, k), & \psi_{1,2} &= \psi_{1,2}(x, t, k), \\ a &= a(k, t), & b &= b(k, t), & \kappa_j &= \kappa_j(t), & c_j &= c_j(t).\end{aligned}$$

Замечательное свойство уравнения КдФ: для его (быстроубывающих) решений $u(x, t)$ зависимость данных рассеяния от t очень простая. Пусть исходный потенциал определяет начальное данное для задачи Коши:

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad u(x, 0) = u(x),$$

и пусть данные рассеяния при $t = 0$ известны. Покажем, что тогда при всех t они определяются явными формулами — *пересчёт функций Йоста не нужен*.

Пользуемся тем, что КдФ равносильно условию совместности для

$$\psi_{xx} = (u - k^2)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - (4k^2 + 2u)\psi_x, \quad (1)$$

в результате, для этих уравнений определена общая фундаментальная система решений.

Напомним (см. лекцию 3 про потенциалы Баргманна, Лемма 1 и Утв. 2), что вронскиан любых двух решений постоянен:

$$w = W(\psi, \tilde{\psi}) = \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi} \Rightarrow w_x = w_t = 0, \quad (2)$$

как и отношение решений в нулях вронскиана:

$$c = \tilde{\psi}(k_0)/\psi(k_0), \quad w(k_0) = 0 \Rightarrow c_x = c_t = 0. \quad (3)$$

Однако, эти свойства нельзя применить непосредственно к функциям Йоста, так как они *не удовлетворяют* паре (1). Действительно, любое совместное решение (1) при $|x| \rightarrow \infty$ представляется в виде

$$\psi \sim \alpha e^{i(kx - 4k^3t)} + \beta e^{-i(kx - 4k^3t)},$$

а у функций Йоста асимптотика, по определению, не зависит от t .

Функции Йоста нужно немного подправить. Напомним, что они фиксируются асимптотикой

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim e^{-ikx}, \quad \varphi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ \psi_1 &\sim e^{-ikx}, \quad \psi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-4ik^3t} \tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = e^{4ik^3t} \tilde{\varphi}_2, \\ \psi_1 &= e^{-4ik^3t} \tilde{\psi}_1, \quad \psi_2 = e^{4ik^3t} \tilde{\psi}_2,\end{aligned}$$

где функции с тильдой удовлетворяют паре (1).

Теорема 1. При эволюции потенциала в силу КдФ, данные рассеяния меняются так:

$$\begin{aligned}a(k, t) &= a(k, 0), \quad b(k, t) = e^{-8ik^3t} b(k, 0), \\ \kappa_j(t) &= \kappa_j(0), \quad c_j(t) = e^{-8\kappa_j^3t} c_j(0).\end{aligned}$$

Доказательство. Используем представление для a через вронскианы от функций Йоста:

$$\begin{aligned} a(k, t) &= \frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \psi_2) \\ &= \frac{1}{2ik} W(\tilde{\varphi}_1(x, t, k), \tilde{\psi}_2(x, t, k)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2ik} W(\tilde{\varphi}_1(x, 0, k), \tilde{\psi}_2(x, 0, k)) \\ &= a(k, 0); \end{aligned}$$

аналогично для b , но теперь показатели экспонент складываются:

$$\begin{aligned} b(k, t) &= -\frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \psi_1) \\ &= -\frac{1}{2ik} e^{-8ik^3 t} W(\tilde{\varphi}_1(x, t, k), \tilde{\psi}_2(x, t, k)) \\ &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{2ik} e^{-8ik^3 t} W(\tilde{\varphi}_1(x, 0, k), \tilde{\psi}_2(x, 0, k)) \\ &= e^{-8ik^3 t} b(k, 0). \end{aligned}$$

Так как $i\kappa_j$ совпадают с нулями $a(k)$ в полуплоскости $\text{Im } k > 0$, и эта функция от t не зависит, то и κ_j не зависят от t .

Наконец, c_j определяются, как отношения функций Йоста в точке $k = i\kappa_j$:

$$c_j(t) = \frac{\varphi_1(x, t, i\kappa_j)}{\psi_2(x, t, i\kappa_j)} = e^{-8i(i\kappa_j)^3 t} \frac{\tilde{\varphi}_1(x, t, i\kappa_j)}{\tilde{\psi}_2(x, t, i\kappa_j)}$$

$$\stackrel{(3)}{=} e^{-8\kappa_j^3 t} \frac{\tilde{\varphi}_1(x, 0, i\kappa_j)}{\tilde{\psi}_2(x, 0, i\kappa_j)} = e^{-8\kappa_j^3 t} c_j(0).$$

Итак, мы поставили в соответствие потенциалу $u(x)$ функции $a(k)$, $b(k)$ и числа κ_j и c_j , и установили, как они зависят от t , если u эволюционирует в силу КдФ.

Оказывается, эти данные содержат достаточно информации, чтобы восстановить по ним потенциал $u(x, t)$.

Однако, прежде чем перейти к этому, разберемся с вопросом о независимости спектральных данных.

Выражение $a(k)$, $b(k)$ через $r(k)$

Набор спектральных данных немного избыточен:

- дискретный спектр совпадает с нулями продолжения $a(k)$;
- функции a и b связаны соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Оказывается, что вместо a и b достаточно задать одну функцию, коэффициент отражения

$$r(k) = b(k)/a(k) \quad \text{при } k \in \mathbb{R},$$

обе функции по ней восстанавливаются.

Чтобы показать это, нам понадобятся формулы Сохоцкого для интегралов типа Коши.

Напомним, что *интеграл Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

выражает значения функции $f(z)$, аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$ через ее значения на границе $C = \partial D$.

Интегралом типа Коши называется интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где C — гладкая кривая (не обязательно замкнутая), а $f(\zeta)$ — непрерывная функция на ней (допускается конечное число точек с интегрируемым разрывом). При этом значение интеграла $F(z)$ есть аналитическая функция вне C .

Используем следующее утверждение (см. напр. [Лаврентьев-Шабат, Методы ТФКП], вместо $\mathbb{R}$ может быть и другой контур).

Формулы Сохоцкого. Для функции $f(s)$, непрерывной при $s \in \mathbb{R}$, предельные значения интегралов типа Коши при стремлении к вещественной оси сверху или снизу равны

$$F^\pm(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s) ds}{s - (k \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s) ds}{s - k} \pm \frac{f(k)}{2}. \quad (4)$$

Интеграл справа называется преобразованием Гильберта. Он понимается в смысле главного значения (то есть, как предел по отрезкам, симметричным относительно особой точки $s = k$).

В частности, из (4) следует тождество Крамерса–Кронига: пусть $f(k)$ аналитична при $\text{Im } k \geq 0$ и $f \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. Тогда

$$f(k) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s) ds}{s - k}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Доказательство. По формуле Коши, интеграл с $k + i0$ в левой части (4) равен $f(k)$. ■

Равносильно, (5) можно записать, как условия согласования на $\mathbb{R}$ между вещественной и мнимой частями $f = u + iv$:

$$u(k) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(s) ds}{s - k}, \quad v(k) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(s) ds}{s - k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Мнимая часть — преобразование Гильберта от вещественной и наоборот.

Замечание. Приложения в оптике: показатели преломления и поглощения в данной среде определяются как действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости (как функции от частоты). Соответственно, они связаны соотношениями Крамерса–Кронига.

Применим эти тождества к $\log a(k)$, только нужно погасить нули в точках $k = i\kappa_j$, чтобы получить аналитическую функцию при $\text{Im } k > 0$.

Утверждение 2. При $k \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - |r(k)|^2}} \prod_{j=1}^n \frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1 - |r(s)|^2) ds}{s - k} \right), \quad (6)$$
$$b(k) = r(k)a(k).$$

Доказательство. Имеем

$$|a|^2 - |b|^2 = |a|^2(1 - |r|^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad |a| = \frac{1}{\sqrt{1 - |r(k)|^2}}.$$

Модуль a нашли. Нужно восстановить аргумент. Как известно,

$$a = |a|e^{i \arg a} \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \log |a| + i \arg a,$$

то есть, логарифм модуля и аргумент — это вещественная и мнимая части $\log a$. Положим

$$f(k) = \log \left(a(k) \frac{(k + i\kappa_1) \cdots (k + i\kappa_n)}{(k - i\kappa_1) \cdots (k - i\kappa_n)} \right).$$

Это функция, аналитическая при $\operatorname{Im} k > 0$, причем рациональный множитель лежит на единичной окружности, то есть имеет вид $e^{i\alpha}$ и логарифм от него чисто мнимый. Применим тождество (5). Имеем

$$\begin{aligned} f(k) &= \log |a(k)| + i \arg a(k) + \sum_{j=1}^n \log \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} \\ &= \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s) ds}{s - k} = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} f(s) + i \operatorname{Im} f(s) ds}{s - k}. \end{aligned}$$

откуда следует

$$i \arg a(k) + \sum_{j=1}^n \log \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log |a|}{s - k} ds.$$

Тогда

$$a = |a| e^{i \arg a} = |a| \prod_{j=1}^n \frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j} \exp \left(\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log |a|}{s - k} ds \right)$$

и остается только заменить $|a| = (1 - |r|^2)^{-1/2}$. ■

Формула (6) определяет функцию $a(k)$, аналитическую при $\operatorname{Im} k > 0$, по комплекснозначной непрерывной функции $r(k)$, заданной при $k \in \mathbb{R}$, и по числам $\kappa_j > 0$. При этом $r(k)$ должна удовлетворять свойствам

$$r(k)^* = r(-k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad |r| < 1, \quad r(k) = O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \pm\infty.$$

Независимые спектральные данные состоят из функции $r(k)$, удовлетворяющей перечисленным условиям, произвольных чисел $\kappa_1 > \dots > \kappa_n > 0$ и c_j таких, что $\operatorname{sign} c_j = (-1)^{j+1}$.

Можно доказать, что других ограничений нет и что данные полные, то есть, по любому такому набору действительно однозначно восстанавливается некоторый быстроубывающий потенциал.

Покажем, как эта задача восстановления сводится к интегральным уравнениям (но не будем анализировать, все ли там корректно).

Про зависимость от t опять можно забыть: все вычисления делаются при фиксированном t .

Обратная задача

Восстановление $u(x)$ по данным рассеяния также сводится к интегральным уравнениям.

Есть два способа — уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко и система сингулярных ИУ. Мы используем второй, он немного проще (хотя система выглядит более громоздкой).

Используем наше основное соотношение

$$\varphi_1(x, k) = a(k)\psi_1(x, k) + b(k)\psi_1(x, k)^*, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ считаются известными. Сделаем переобозначение:

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \Phi_+ = \frac{e^{ikx}}{a(k)}\varphi_1(x, k), & \operatorname{Im} k > 0, \\ \Phi_- = e^{ikx}\psi_1(x, k), & \operatorname{Im} k < 0. \end{cases}$$

Для функции Φ выполняются такие свойства:

- $\Phi \sim 1 + O(1/|k|)$, $|k| \rightarrow \infty$,
- $\Phi = \Phi_-$ аналитична при $\operatorname{Im} k < 0$,
- $\Phi = \Phi_+$ мероморфна при $\operatorname{Im} k > 0$, с полюсами в $k = i\kappa_j$,
- выполнено условие разрыва на вещественной оси

$$\Phi_+ = \Phi_- + r(k)e^{2ikx}\Phi_-^*, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Отсюда нужно определить Φ (задача Римана–Гильберта). Допустим, мы это сделали, тогда $u(x)$ можно восстановить, например, из разложения

$$\Phi_- = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(y) dy + o(k^{-1})$$

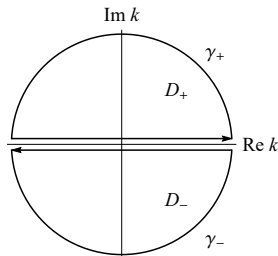
(которое следует из уравнения Шрёдингера $\psi_{1,xx} = (u - k^2)\psi_1$ для $\psi_1 = e^{-ikx}\Phi_-$).

Случай без дискретного спектра

Разберем сначала случай, когда $a(k)$ не имеет нулей при $\text{Im}(k) > 0$ (то есть, набор κ_j пуст и функция Φ аналитична в обеих полуплоскостях).

Рассмотрим контур $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$. Имеем, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(x, s) - 1}{s - k} ds = \begin{cases} \Phi(x, k) - 1, & k \in D_+ \cup D_-, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Интегралы по дугам стремятся к 0, когда их радиус $R \rightarrow \infty$ (так как $\Phi(k) = 1 + O(1/|k|)$).

В пределе, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x, k) - 1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_+(x, s) - \Phi_-(x, s)}{s - k} ds \Rightarrow \\ \Phi(x, k) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x, s)}{s - k} ds. \end{aligned}$$

При $\text{Im } k < 0$ получаем замкнутое интегральное уравнение на функцию $\Phi_{-}(x, k)$

$$\Phi_{-}(x, k) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_{-}^{*}(x, s)}{s - k} ds, \quad (7)$$

что и можно считать ответом.

Чтобы получить формулу для u , разложим (7) по $1/k$:

$$\begin{aligned} \Phi_{-}(x, k) &= 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} u(y) dy + o(k^{-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_{-}^{*}(x, s)}{-k} \left(1 + \frac{s}{k} + \frac{s^2}{k^2} + \dots\right) ds \end{aligned}$$

и дифференцируя по x коэффициент при k^{-1} получаем

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \partial_x \int_{\mathbb{R}} r(s)e^{2isx}\Phi_{-}^{*}(x, s) ds.$$

Случай с дискретным спектром

Случай, когда есть дискретный спектр — более громоздкий. Нужно обойти полюса Φ_+ .

Как и раньше, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(x, s) - 1}{s - k} ds = \begin{cases} \Phi(x, k) - 1, & k \in D_+ \cup D_-, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

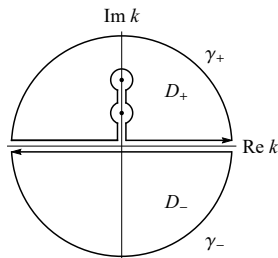
Интеграл вокруг полюса в точке $i\kappa$ обходится в отрицательном направлении. Он равен

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s)}{s - k} ds = -\operatorname{res}_{s=i\kappa} \frac{f(s)}{s - k} = \frac{\operatorname{res}_{k=i\kappa} f(k)}{k - i\kappa}.$$

При $\operatorname{Im} k < 0$ получаем, вместо (7)

$$\Phi_-(x, k) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x, s)}{s - k} ds, \quad (8)$$

где $\Gamma_j(x) = \operatorname{res}_{k=i\kappa_j} \Phi(x, k)$ — дополнительные неизвестные.



Как и раньше, это интегральное уравнение на $\Phi_-(x, k)$, но с лишними Γ_j .

Чтобы получить замкнутую систему, нужно связать Γ_j с $\Phi_-(x, k)$. Это нетрудно. Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma_j(x) &= \operatorname{res}_{k=i\kappa_j} \Phi(x, k) = \operatorname{res}_{k=i\kappa_j} \Phi_+(x, k) \\ &= \operatorname{res}_{k=i\kappa_j} \frac{e^{ikx} \varphi_1(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-\kappa_j x} \varphi_1(x, i\kappa_j)}{a'(i\kappa_j)};\end{aligned}$$

теперь вспомним, что

$$\varphi_1(x, i\kappa_j) = c_j \psi_2(x, i\kappa_j) = c_j \psi_1(x, -i\kappa_j)$$

а также, что

$$\Phi_-(x, k) = e^{ikx} \psi_1(x, k), \quad \operatorname{Im} k < 0.$$

Тогда

$$\Gamma_j(x) = \frac{c_j e^{-2\kappa_j x}}{a'(i\kappa_j)} \Phi_-(x, -i\kappa_j).$$

Подставляя в выражение для Γ_m вместо Φ_- выражение из (8), получаем дополнительную систему уравнений, при $m = 1, \dots, n$:

$$\Gamma_m(x) = \frac{c_m e^{-2\kappa_m x}}{a'(i\kappa_m)} \left(1 + i \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j(x)}{\kappa_j + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x, s)}{s + i\kappa_m} ds \right). \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) образуют замкнутую систему смешанных уравнений — алгебраических и интегральных. Можно сначала решить (9) и выразить Γ_j через интегралы от Φ_- . Потом подставить их в (8) и получить ИУ на Φ_- , но с более сложным ядром.

Как и раньше, $u(x)$ восстанавливается из разложения уравнения (8) по $1/k$:

$$u(x) = \partial_x \left(-2i \sum_{j=1}^n \Gamma_j(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x, s) ds \right).$$

В случае $r = 0$ (безотражательный потенциал) задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений на Γ_j и мы вновь приходим к многосолитонным решениям.