

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 6 · 13 марта 2023

Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Прямая задача

План

На этой лекции:

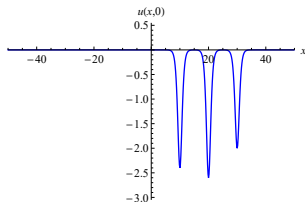
- Спектр оператора Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом
- Прямая задача
 - ▶ Сведение уравнения Шрёдингера к интегральному
 - ▶ Функции Йоста
 - ▶ Матрица перехода
 - ▶ Свойства матрицы перехода
 - ▶ Дискретный спектр
 - ▶ Данные рассеяния

На следующей лекции:

- Зависимость данных рассеяния от t
- Обратная задача (методом сингулярных интегральных уравнений)

Метод обратной задачи рассеяния

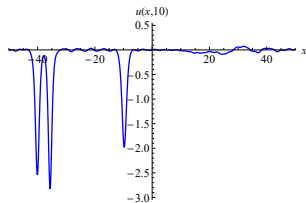
Это метод решения задачи Коши для КдФ в классе быстроубывающих потенциалов. Дано начальное условие $u(x, 0)$, нужно выяснить, как оно меняется по t .



↓
прямая
задача

данные рассеяния
при $t = 0$

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$



↑
обратная
задача

данные рассеяния
при произвольном t

$$\xrightarrow{e^{k^3 t}}$$

Метод основан на уже известном нам представлении КдФ в виде условия совместности для линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - 2(u + 2\lambda)\psi_x.$$

Прямая задача заключается в определении данных рассеяния для начального потенциала $u(x, 0)$.

Данные рассеяния состоят из дискретного спектра, набора дополнительных множителей и коэффициента отражения — функции $r(k)$, $\lambda = k^2$. В примере с потенциалом Баргманна (лекция 3) спектр состоит из чисел $-k_j^2$, где k_j — нули вронскиана, множители — это коэффициенты c_j , а $r(k) = 0$.

Эволюция по t для данных рассеяния тривиальна: дискретный спектр не меняется, множители и $r(k)$ умножаются на экспоненту от t .

Обратная задача заключается в восстановлении потенциала $u(x, t)$ по измененным данным рассеяния.

- [1] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Let.* **19:19** (1967) 1095–1097.
- [2] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.

Насколько это все эффективно?

По существу, чтобы вычислить данные рассеяния по потенциалу, нужно решить соответствующее уравнение Шрёдингера. К сожалению, в явном виде оно, вообще говоря, не решается. К тому же, на практике *и* может задаваться не формулой, а каким-то массивом чисел. Поэтому, эта задача решается численно. Мы лишь наметим один из возможных методов (интегральные уравнения Вольтерры).

Обратная задача тоже сводится к интегральным уравнениям (есть две версии — уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко или система сингулярных ИУ), которые необходимо решать численно.

Итак, на самом деле мы не сможем довести этот метод до такого состояния, чтобы посчитать что-то «вручную» (за исключением специальных примеров типа потенциалов Баргманна). Реализацией численных методов мы также не будем заниматься.

Однако, на концептуальном уровне, МОЗР даёт решение, так как нелинейная задача сводится к последовательности линейных интегральных уравнений. Нашей целью будет просто описать алгоритм этого сведения.

Спектр оператора Шрёдингера

Про переменную t мы временно забудем — вплоть до того момента, когда нужно будет смотреть на зависимость данных рассеяния от t . Сегодня считаем, что потенциал зависит лишь от x :

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi \quad \Leftrightarrow \quad L\psi = \lambda\psi, \quad L = -\partial_x^2 + u.$$

Условие быструбывания: $\int_{\mathbb{R}} |u|(1 + |x|)dx < \infty$.

Не будем давать общее определение спектра. В случае оператора L достаточно определить

- непрерывный спектр — значения λ , для которых существует решение ψ , ограниченное при $x \in \mathbb{R}$;
- дискретный спектр — значения λ , для которых существует решение $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, то есть $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx < \infty$.

Будем пользоваться без доказательства следующими свойствами:

- непрерывный спектр состоит из всех $\lambda \geq 0$;
- дискретный спектр отрицателен и конечен: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$ (существенно, что потенциал убывает быстрее $1/x^2$, так как иначе собственные значения могут накапливаться к 0).

Сведение уравнения Шрёдингера к интегральному

Обозначим $\lambda = k^2 \in \mathbb{C}$, запишем уравнение Шрёдингера в виде

$$\psi_{xx} + k^2\psi = u\psi \quad \Rightarrow \quad A\psi = f, \quad A = \partial_x^2 + k^2, \quad f = u\psi, \quad (1)$$

и применим метод функций Грина, чтобы свести его к интегральному.
(! На лекции 4 о n -солитонном решении было $\lambda = -z^2$.)

Определение 1. Функцией Грина (фундаментальным решением) $G(x, y)$ для дифференциального оператора A , действующего на функциях $\psi : \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_x$, называется решение уравнения

$$AG(x, y) = \delta(x - y).$$

Зная G , можно найти частное решение уравнения $A\psi = f(x)$ по формуле

$$\psi_{\text{ч}} = \int_{\mathbb{R}} G(x, y) f(y) dy.$$

Действительно,

$$A\psi_{\text{ч}} = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y) dy = f(x).$$

Применяя эту формулу к уравнению (1) и добавляя общее решение однородного уравнения, получим

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{\mathbb{R}} G(x, y) u(y) \psi(y) dy. \quad (2)$$

Это интегральное уравнение на функцию ψ , при конкретном выборе c_1, c_2 и G .

Остается найти G для нашего оператора. Нетрудно видеть, что если A — оператор с постоянными коэффициентами, то $G(x, y) = G(x - y)$, где $AG(x) = \delta(x)$.

Утверждение 1. Оператор $A = \partial_x^2 + k^2$ обладает функциями Грина

$$G_-(x) = \begin{cases} -\frac{\sin kx}{k} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0, \end{cases} \quad G_+(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\sin kx}{k} & x \geq 0. \end{cases}$$

Так как $A(G_+ - G_-) = 0$, то достаточно проверить это для одной функции.

Конечно, ф.Г. служит и любая линейная комбинация $\alpha G_+ + (1 - \alpha) G_-$.

Доказательство.

$$G'_-(x) = \begin{cases} -\cos kx & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} = \theta(x) + \begin{cases} -\cos kx & x < 0 \\ -1 & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда. Так как $\theta'(x) = \delta(x)$, то

$$G''_-(x) = \delta(x) + \begin{cases} k \sin kx & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} = \delta(x) - k^2 G_-(x). \quad \blacksquare$$

Пусть, например, $G = G_+$. Так как $G_+(x - y) = 0$ при $x < y$, то интегрирование по y идёт от $-\infty$ до x :

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x - y)}{k} u(y) \psi(y) dy. \quad (3)$$

Замечание. Метод функций Грина использовать не обязательно. Формулу (3) можно проверить непосредственно либо вывести методом вариации постоянных (ДЗ).

Уравнение (3) — это интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^x K(x, y)\psi(y) dy.$$

Такие уравнения можно решать численно методом итераций

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_{n+1}(x) = g(x) + \int_{-\infty}^x K(x, y)\psi_n(y) dy.$$

Можно показать, что если $|K(x, y)| < M$, то итерации сходятся экспоненциально быстро, решение существует и единственно.

Функции Йоста

В зависимости от выбора c_1 , c_2 и G в интегральном уравнении (2), можно определить четыре решения с разной асимптотикой при $x \rightarrow \pm\infty$.

$G = G_+$: два решения с фиксированной асимптотикой при $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \varphi_1(y) dy, & \varphi_1 &= e^{-ikx} + o(1), \\ \varphi_2 &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \varphi_2(y) dy, & \varphi_2 &= e^{ikx} + o(1).\end{aligned}$$

$G = G_-$: два решения с фиксированной асимптотикой при $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= e^{-ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi_1(y) dy, & \psi_1 &= e^{-ikx} + o(1), \\ \psi_2 &= e^{ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi_2(y) dy, & \psi_2 &= e^{ikx} + o(1).\end{aligned}$$

Решения этих уравнений называются функциями Йоста. Это комплекснозначные функции от двух переменных — $x \in \mathbb{R}$ и параметра $k \in \mathbb{C}$. Разберемся, какие у них свойства по k .

Пусть $\varphi_1 = e^{-ikx}p$, тогда уравнение для φ_1 переписывается как

$$\begin{aligned} p &= 1 + \int_{-\infty}^x e^{ikx-iky} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ki} u(y)p(y) dy \\ &= 1 + \int_{-\infty}^x \frac{e^{2ik(x-y)} - 1}{2ki} u(y)p(y) dy. \end{aligned}$$

Так как интегрируем при $x - y > 0$, то функция $e^{2ik(x-y)}$ ограничена при $\operatorname{Im} k \geq 0$. Вместе с ней ограничено и все ядро, метод итераций сходится и функция p однозначно определена. Итак, можно гарантировать, что φ_1 определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Уравнение для φ_2 получается при замене $k \rightarrow -k$, поэтому φ_2 определена при $\operatorname{Im} k \leq 0$.

Для $\psi_1 = e^{-ikx}p$ подынтегральное выражение то же самое, но теперь интегрируем при $x - y < 0$. Поэтому ψ_1 определена при $\operatorname{Im} k \leq 0$, а ψ_2 при $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Утверждение 2. Для уравнения Шредингера существуют решения со следующими асимптотиками и аналитические по k в указанных полуплоскостях:

$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$	
$\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\psi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \geq 0$
$\varphi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\psi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \leq 0$

Эту асимптотику можно дифференцировать по x , например

$$\varphi_{1,x} = -ike^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Область определения и аналитичности по k для функций Ёоста, отвечающих конкретным потенциалам, вполне может быть шире, чем указано. Например, если потенциал финитен, то интервал интегрирования ограничен его носителем и ядро всегда ограничено, поэтому функции Ёоста определены при всех $k \in \mathbb{C}$. Утверждение 2 лишь гарантирует аналитичность в полуплоскостях при самых слабых предположениях относительно потенциала.

Решения Йоста не обязательно определять именно через интегральные уравнения. Если можно решить уравнение Шрёдингера как-то иначе, можно строить их и другими способами.

Пример 1. Вернемся к потенциалу Баргманна из лекции 4. В силу самого его определения, для него имеется явное решение в виде квазиполинома

$$\psi(x, z) = e^{zx} P(x, z) = e^{zx} (z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n),$$

где $\lambda = k^2 = -z^2$ и коэффициенты рекуррентно определяются по потенциалу, с использованием интегрирования по x . Для определенности, пусть $z = -ik$, тогда

$$\psi(x, -ik) = e^{-ikx} \begin{cases} P(k) + o(1), & x \rightarrow -\infty, \\ \tilde{P}(k) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где P и $\tilde{P}$ — конечные предельные значения коэффициентов (как мы знаем, они находятся по формулам Крамера через определители экспонент). То есть, эта функция совпадает с φ_1 и ψ_1 , с точностью до множителя. Аналогично, $\psi(x, ik)$ пропорциональна φ_2 и ψ_2 .

Свойства симметрии по k

Как уже отмечалось,

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k). \quad (4)$$

Кроме того, так как потенциал вещественный, то, если к интегральным уравнениям применить комплексное сопряжение, заменится только i на $-i$ и k на k^* . Следовательно

$$\varphi_1(x, k)^* = \varphi_2(x, k^*), \quad \psi_1(x, k)^* = \psi_2(x, k^*). \quad (5)$$

Как следствие, получаем связь между значениями одной и той же функции при отражении относительно мнимой оси:

$$\varphi_i(x, k)^* = \varphi_i(x, -k^*), \quad \psi_i(x, k)^* = \psi_i(x, -k^*), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

В частности, на мнимой полуоси имеем

$$\varphi_1(x, iz), \quad \psi_2(x, iz) \in \mathbb{R}, \quad z > 0. \quad (7)$$

Матрица перехода

При $k \in \mathbb{R}$ (то есть, при $\lambda = k^2 > 0$) определены все четыре функции Йоста. Обе пары (φ_1, φ_2) и (ψ_1, ψ_2) образуют базисы. Следовательно, все решения уравнения Шредингера при $k \in \mathbb{R}$ имеют тригонометрическую асимптотику и ограничены при всех x . То есть, это функции непрерывного спектра.

Рассмотрим матрицу перехода между указанными базисами. По свойству симметрии (5), для вещественных k выполняется

$$\varphi_1(x, k)^* = \varphi_2(x, k), \quad \psi_1(x, k)^* = \psi_2(x, k).$$

Поэтому, если

$$\varphi_1 = a\psi_1 + b\psi_2 = a\psi_1 + b\psi_1^*,$$

то

$$\varphi_2 = \varphi_1^* = a^*\psi_1^* + b^*\psi_2^* = b^*\psi_1 + a^*\psi_2,$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad T(k) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Терминология

$a(k)$ — амплитуда рассеяния

$t(k) = 1/a(k)$ — коэффициент прохождения

$r(k) = b(k)/a(k)$ — коэффициент отражения

После деления на b имеем

$$t(k)\varphi_1 = \psi_1 + r(k)\psi_2,$$

где $\varphi_1 \sim e^{-ikx}$, $x \rightarrow -\infty$, $\psi_1 \sim e^{-ikx}$, $\psi_2 \sim e^{ikx}$, $x \rightarrow +\infty$.

Здесь ψ_1 интерпретируется как волна, «падающая» на потенциал (справа); ψ_2 — «отраженная» волна, φ_1 — волна «прошедшая» через потенциал.

Пример 1'. В примере 1 было отмечено, что обе функции φ_1 и ψ_1 пропорциональны одному и тому же квазимногочлену $\psi(x, -ik)$, а φ_2 и ψ_2 пропорциональны $\psi(x, ik)$. Следовательно, коэффициент $b(k)$ в данном случае равен 0, потенциал Баргманна — безотражательный.

Замечание. Матрица перехода обобщается и на тот случай, когда потенциал выходит на разные константы при $x \rightarrow \pm\infty$, см.

[Ландау-Лифшиц, 3:25].

1) $a(k)^* = a(-k), \quad b(k)^* = b(-k), \quad k \in \mathbb{R}.$

Равносильно, $r(k)^* = r(-k), \quad t(k)^* = t(-k).$

Это сразу следует из свойств симметрии.

2) $\det T = |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}.$

Равносильно, $|r(k)|^2 + |t(k)|^2 = 1.$

Доказательство. Продифференцируем определение матрицы перехода по x , это даст

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' \\ \psi_2 & \psi_2' \end{pmatrix}.$$

Вронскианы $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$ и $\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$ не зависят от x . Первый из них можно вычислить при $x \rightarrow -\infty$, второй при $x \rightarrow +\infty$, оба равны

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ikx} & -ike^{-ikx} \\ e^{ikx} & ike^{ikx} \end{pmatrix} = 2ik.$$



3) Выражения для $a(k)$, $b(k)$ через вронскианы от функций Йоста:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_1, \psi_2)}{2ik}, \quad b(k) = -\frac{W(\varphi_1, \psi_1)}{2ik}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0. \quad (8)$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_1 = a\psi_1 + b\psi_2 \quad \Rightarrow \quad W(\varphi_1, \psi_2) = aW(\psi_1, \psi_2) = 2ika$$

и, аналогично $W(\varphi_1, \psi_1) = -bW(\psi_1, \psi_2) = -2ikb$. ■

4) Формула (8) определяет аналитическое продолжение $a(k)$ в верхнюю полуплоскость, так как там определены обе функции φ_1, ψ_2 . При этом, благодаря свойствам симметрии (6),

$$a(k)^* = a(-k^*), \quad \text{Im } k \geq 0.$$

Но, вообще говоря, $b(k)$ не продолжается в $\mathbb{C}$.

Выражения для $a(k)$, $b(k)$ через интегралы

Формулы (8) не очень удобны, так как содержат две функции Йоста и дифференцирование (плохая операция, с вычислительной точки зрения). Вспомним интегральные уравнения и немного преобразуем:

$$\varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \varphi_1(y) dy,$$

$$\psi_1 = e^{-ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi_1(y) dy,$$

$$\psi_2 = e^{ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi_2(y) dy$$

(здесь k в аргументах ψ опущено), тогда

$$\begin{aligned} a\psi_1 + b\psi_2 &= \varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{\mathbb{R}} - \int_x^{\infty} \\ &= e^{-ikx} + I - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) (a\psi_1 + b\psi_2) dy \\ &= e^{-ikx} + I + a(\psi_1 - e^{-ikx}) + b(\psi_2 - e^{ikx}). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} e^{-ikx}(a-1) + be^{ikx} &= I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \varphi_1(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik} u(y) \varphi_1(y) dy \\ &= \frac{e^{ikx}}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} u(y) \varphi_1(y) dy - \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{iky} u(y) \varphi_1(y) dy. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при экспонентах и меняя y на x , получаем следующее свойство.

5) Интегральные выражения для $a(k)$, $b(k)$:

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} u(x) \varphi_1(x, k) dx, \quad (9)$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x) \varphi_1(x, k) dx. \quad (10)$$

Формула (9), как и (8), определяет продолжение $a(k)$ в верхнюю полуплоскость: при $x \rightarrow -\infty$ интеграл сходится, так как $e^{ikx}\varphi_1(x, k) \sim 1$, а потенциал быстроубывающий; при $x \rightarrow \infty$ интеграл сходится, так как e^{ikx} — убывающая экспонента при $\operatorname{Im} k > 0$.

Вообще говоря, $b(k)$ не продолжается с вещественной оси. Иногда это возможно. Например, если потенциал финитный, то видно, что интеграл (10) тоже сходится. Но, продолжение b нам не будет нужно.

6) Асимптотика по k :

$$\begin{aligned}a(k) &= 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \\b(k) &= O(k^{-1}), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Также из (9) следует, что $a(k)$, вообще говоря, имеет простой полюс при $k = 0$ (для некоторых потенциалов его может и не быть, если интеграл при $k = 0$ случайно обращается в 0).

Дискретный спектр

Утверждение 3. Точки дискретного спектра оператора $L = -\partial_x^2 + u$ совпадают с числами $\lambda_j = k_j^2$, где k_j — нули функции $a(k)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство. Пусть $a(k_j) = 0$, тогда из (8) вытекает, что

$$\varphi_1(x, k_j) = c_j \psi_2(x, k_j), \quad (11)$$

причём на обеих бесконечностях имеем убывающие экспоненты:

$$\varphi_1(x, k_j) \sim e^{-ik_j x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \psi_2(x, k_j) \sim e^{ik_j x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Наоборот, пусть y — собственная функция, отвечающая некоторому k_j . Тогда она имеет асимптотику как $\varphi_1(x, k_j)$ при $x \rightarrow -\infty$ и как $\psi_2(x, k_j)$ при $x \rightarrow +\infty$ (с точностью до множителей). Так как вронскианы постоянны, их можно вычислить на бесконечностях и получить, что они равны 0. Это означает, что $y = C_1 \varphi_1(x, k_j) = C_2 \psi_2(x, k_j)$, но тогда и $W(\varphi_1(x, k_j), \psi_2(x, k_j)) = 2ik_j a(k_j) = 0$. ■

Так как спектр L вещественный, получаем отсюда следующее свойство.

7) Нули $a(k)$ лежат на мнимой оси. Они простые и их конечное число:

$$k_j = i\kappa_j, \quad \kappa_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Собственные числа нумеруются по возрастанию:

$$-\kappa_1^2 < -\kappa_2^2 < \dots < -\kappa_n^2 < 0.$$

Соответственно, κ_j нумеруются по убыванию, $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n > 0$.

Коэффициенты пропорциональности c_j в нулях k_j относятся к данным дискретного спектра. Они не совсем произвольны:

8) Коэффициенты c_j вещественны и удовлетворяют правилу чередования знаков:

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad \dots, \quad \text{sign } c_n = (-1)^{n+1}.$$

Доказательство. Вещественность следует из того, что функции Йоста на мнимой оси вещественны, см. (7). Чередование следует из того, что j -я собственная функция имеет ровно $j - 1$ нуль при $x \in \mathbb{R}$, а у нас знаки функций Йоста фиксируются асимптотиками на разных бесконечностях:

$$\varphi_1(x, i\kappa_j) \sim e^{\kappa_j x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad \psi_2(x, i\kappa_j) \sim e^{-\kappa_j x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

На сегодня хватит!

Итак, мы поставили в соответствие потенциалу $u(x)$:

- функции $a(k)$, $b(k)$, $k \in \mathbb{R}$ (данные непрерывного спектра);
- числа $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_n > 0$ и $c_1, \dots, c_n$, $\text{sign } c_j = (-1)^{j+1}$ (данные дискретного спектра).

Этот набор данных немного избыточен, так как дискретный спектр совпадает с нулями аналитического продолжения $a(k)$. К тому же он не свободен, так как a и b связаны соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

На следующей лекции мы покажем, что вместо a и b достаточно задать одну функцию $r(k) = b(k)/a(k)$, при $k \in \mathbb{R}$.

Также включим t и выясним, как при этом меняются спектральные данные.

Наконец, выведем интегральные уравнения для восстановления $u(x, t)$.

Домашнее задание

6.1. (Выполнять, только если это не проходили в других курсах.)

Проверьте прямым дифференцированием, что решение интегрального уравнения (3) удовлетворяет уравнению Шрёдингера, либо выведите уравнение (3) методом вариации произвольных постоянных (он заключается в том, что в формуле для решения однородного уравнения $\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$ считаем c_1, c_2 функциями от x и определяем их так, чтобы получалось решение неоднородного уравнения).

Все следующие задачи связаны с уравнением Шрёдингера с дельта-образным потенциалом $u(x) = c\delta(x)$:

$$\psi'' = (c\delta(x) - k^2)\psi. \quad (12)$$

6.2. Постройте все четыре функции Йоста для этого уравнения. Рассмотрите оба случая $c < 0$ и $c > 0$.

Замечание. Есть по крайней мере два способа решения. Во-первых, можно использовать интегральные уравнения, они легко решаются. Во-вторых, можно решить уравнение на полуосях, выбрать решения с нужной асимптотикой и сшить в 0. Интегрируя уравнение по $[-\varepsilon, \varepsilon]$, получаем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi'' dx \rightarrow c\psi(0), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то есть, решение должно подчиняться условию излома

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = c\psi(0).$$

6.3. Найдите в явном виде коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ для (12).

6.4. Пользуясь полученными выражениями, проверьте, что свойства 1–6 для a и b действительно выполняются, как предсказывает теория.

6.5. Найдите дискретный спектр для (12), если он есть (как это связано со знаком c ?) и соответствующие собственные функции. Сравните с нулями $a(k)$.