

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 5 · 6 марта 2023

Конечнозонные решения КдФ

- Стационарные уравнения для высших симметрий (уравнения Новикова)
- Общее решение в виде бегущей волны (кноидальная волна)
- Эллиптические функции
- Численное построение двухфазного решения
- Произвольное n : понижение порядка, уравнения Дубровина
- Интегрирование в квадратурах

Уравнения Новикова

На прошлой лекции было показано, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \quad (1)$$

допускает бесконечную последовательность коммутативных и локальных симметрий ($u_n = \partial_x^n(u)$, $D = D_x$). Они строятся при помощи оператора рекурсии:

$$u_{t_n} = g_n = R^{n-1}(u_x), \quad R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Первые несколько симметрий:

$$u_{t_1} = u_1, \quad (\text{сдвиг по } x)$$

$$u_{t_2} = u_3 - 6uu_1, \quad (\text{сдвиг по } t)$$

$$u_{t_3} = D(u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3),$$

$$u_{t_4} = D(u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4),$$

...

и так далее.

Симметрией является и произвольная линейная комбинация конечного числа этих потоков. Наша цель сегодня — исследовать стационарное уравнение для такой симметрии, то есть, ОДУ порядка $2n + 1$ вида

$$G = g_{n+1} + c_1 g_n + \cdots + c_n g_1 = 0, \quad (2)$$

что впервые было сделано в статье

- С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974) [54–66](#).

Согласно определению симметрии, (2) определяет связь, совместную с динамикой по t в силу КдФ, так как выполняется тождество

$$D_t(G) = (D^3 - 6uD - 6u_1)(G) = 0.$$

Уравнение (2) допускает понижение порядка. Прежде всего, так как все g_j — полные производные по x , то оно сводится к уравнению порядка $2n$

$$A = a_{n+1} + c_1 a_n + \cdots + c_n a_1 + c_{n+1} = 0, \quad g_j = D(a_j). \quad (3)$$

Совместность с динамикой по t не нарушается, при условии, что постоянная интегрирования c_{n+1} не зависит от t : можно проверить, что

$$D_t(A) = (D^3 - 6uD)(A) = 0.$$

- Уравнение (2) можно записать в виде

$$u_{t_{n+1}} + c_1 u_{t_n} + \dots + c_n u_{t_1} = 0$$

— это линейное УЧП первого порядка, общее решение которого (по методу характеристик) представимо в виде

$$u = F(c_1 t_{n+1} - t_n, c_2 t_{n+1} - t_{n-1}, \dots, c_n t_{n+1} - t_1),$$

то есть, u — функция от n линейных «фаз». Поэтому, решения уравнения Новикова иногда называют ***n -фазными***. Конечно, этот «ответ» ещё необходимо уточнять (что такое t_j и чему равна F).

- Другое название — ***n -зонные*** решения, будет объяснено чуть позже.
- Уравнение (3) допускает дальнейшее понижение порядка. Наша цель — показать, что порядок понижается до n за счёт алгебраических первых интегралов, а затем можно ввести $n - 1$ дополнительных первых интегралов при помощи квадратур.
- В результате, решение уравнения (3) сводится к квадратурам и обращению неявных функций. Этот последний этап довольно сложен и мы его пропустим. Конструктивно, он осуществляется при помощи тэта-функций от многих переменных.

Замечание 1. Неавтономные (и нелокальные, при $n > 2$) симметрии КдФ

$$u_{\tau_n} = h_n = R^{n-1}(6tu_x - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

приводят к еще более общим и сложным связям, совместным с КдФ: вместо (2) получаются так называемые *струнные* уравнения

$$c_0 g_{n+1} + c_1 g_n + \dots + c_n g_1 + h_{m+1} + C_1 h_m + \dots + C_m h_1 = 0.$$

У этих уравнений есть некоторые хорошие алгебраические и аналитические свойства (свойство Пенлеве, то есть, решения не имеют подвижных существенно особых точек). Но, в квадратурах они не интегрируются даже при $m = 0$, то есть, если добавлен лишь один простейший член $h_1 = 6tu_x - 1$. Сейчас мы их рассматривать не будем.

1-зонное решение

При $n = 1$ имеем уравнение

$$u_{xxx} - 6uu_x + cu_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t + cu_x = 0.$$

Очевидно, это решения в виде бегущей волны $u(x, t) = u(x - ct)$ — тот пример, с которого мы начали первую лекцию. Тогда мы требовали, чтобы решение было быстроубывающим, что фиксировало нулевые значения первых интегралов. Теперь проанализируем, что будет, если этого не делать. Двукратное интегрирование даёт:

$$u_{xxx} = 6uu_x - cu_x \quad \Rightarrow$$

$$u_{xx} = 3u^2 - cu + c_1/2 \quad \Rightarrow \quad (\text{интегрирующий множитель } 2u_x)$$

$$u_x^2 = 2u^3 - cu^2 + c_1u + c_2 = P(u).$$

Механическая интерпретация — движение частицы в поле с кубическим потенциалом (u — координата, x — время, c_2 — энергия), см. напр.

- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т.1, Механика (§11). М.: Наука, 1988.

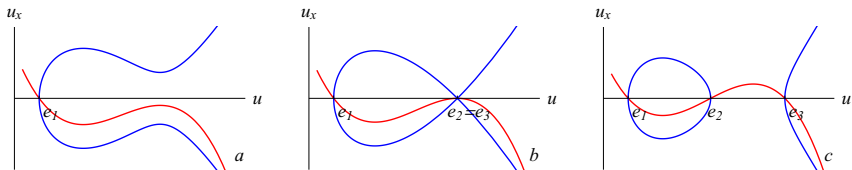
Функция u находится в неявном виде при помощи квадратуры:

$$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = x - ct + \delta.$$

Это неполный эллиптический интеграл. Если корни P различны, то он не берётся в элементарных функциях.

Тем не менее, легко понять, как нужно выбирать константы и начальное условие, чтобы решение было ограниченным на вещественной оси.

Нарисуем в фазовой плоскости (u, u_x) кривую $u_x^2 = P(u)$ (синяя) и график многочлена $-\frac{1}{2}P(u)$ (красный) — это потенциал (энергия фиксирована и включена в P , частица находится на нулевом уровне). В зависимости от расположения корней P возможны три случая (точнее, пять, так как овал и петля могут вырождаться в точку).



Возможны три типа движения (не считая стационарных решений $u_x = 0$).

- Движение по овалу — частица в потенциальной яме, ограниченное периодическое движение.
- Неограниченные ветви на рис. *a* и *c* — частица за конечное время уходит на бесконечность (полюсные решения).
- Петля на рис. *b* получается, если край ямы находится точно на нулевом уровне энергии. Ей отвечает сепаратрисное решение — предельный случай периодического движения с бесконечно большим периодом. Это и есть солитон.

Эллиптические функции

Уравнение для u совпадает, с точностью до линейной замены, с уравнением для функции Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

но, так как эта функция имеет полюс в нуле, то удобнее выразить ответ через эллиптические функции Якоби. Произвольная эллиптическая функция представляется как рациональная функция от $\wp$, $\wp'$.

Общее определение эллиптических функций — это аналитические функции $f(z)$ такие, что $f(z + e_1) = f(z + e_2) = f(z)$, $e_1, e_2 \in \mathbb{C}$.

- Н.И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- А.И. Маркушевич. Замечательные синусы. М.: Наука, 1974.

Класс уравнений

$$(y')^2 = P(y), \quad \deg P \leq 4 \tag{4}$$

сохраняется при дробно-линейных заменах $Y = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$:

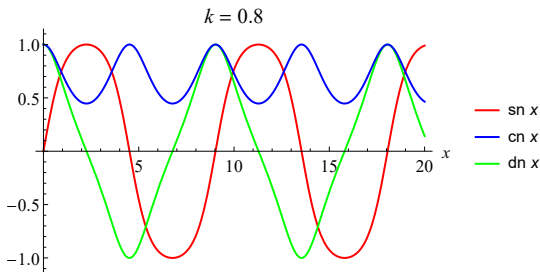
$$(Y')^2 = Q(Y), \quad P(y) = \frac{(\gamma y + \delta)^4}{(\alpha \delta - \beta \gamma)^2} Q\left(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right).$$

Функции Якоби

Это решения системы ОДУ с начальными условиями

$$\begin{aligned}(\operatorname{sn} x)' &= \operatorname{dn} x \operatorname{cn} x, & (\operatorname{cn} x)' &= -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, & (\operatorname{dn} x)' &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x, \\ \operatorname{sn} 0 &= 0, & \operatorname{cn} 0 &= 1, & \operatorname{dn} 0 &= 1.\end{aligned}$$

Параметр k принимает значения $0 \leq k \leq 1$.



Первые интегралы:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1.$$

Отсюда следует

$$(\operatorname{cn}')^2 = \operatorname{dn}^2 \operatorname{sn}^2 = (\operatorname{cn}^2 - 1)(k^2 \operatorname{cn}^2 - 1),$$

— уравнение вида (4) и аналогично для $\operatorname{sn}, \operatorname{dn}$. Поэтому эти функции дробно-линейно связаны с $\wp$.

Есть и другие преобразования. Нетрудно проверить, что если

$$u = K_1 + K_2 \operatorname{cn}^2(bx; k),$$

то u_x^2 будет равно многочлену третьей степени от cn^2 , то есть, от самого u .

Подставляя в уравнение $u_x^2 = P(u) = 2u^3 - cu^2 + c_1u + c_2$ и сравнивая коэффициенты при u^3 и u^2 , выражаем K_1, K_2 через b, c и k :

$$u(x, t) = \frac{4b^2(2k - 1) + c}{6} - 2b^2k \operatorname{cn}^2(b(x - ct) + d; k).$$

Это так называемая *кноидальная* волна.

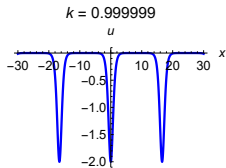
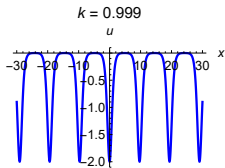
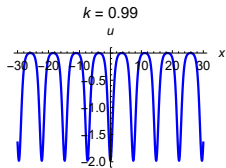
Коэффициенты c_1 и c_2 также выражаются через b , и k , но эти формулы особо не нужны.

За счёт растяжения можно положить $b = 1$. Преобразование Галилея позволяет уничтожить свободный член (что отвечает $c = 4 - 8k$), тогда график будет касаться оси x . Наконец, d уничтожается сдвигом x или t и остаётся лишь один существенный параметр k :

$$u = -2k \operatorname{cn}^2(x + 8kt; k).$$

В пределе $k \rightarrow 0$ функции Якоби переходят в обычную тригонометрию, но при этом амплитуда u стремится к 0.

Предел $k \rightarrow 1$ отвечает солитону. Пички в кноидальной волне разъезжаются друг от друга и в пределе остается солитонное решение.



Пример численного решения при $n = 2$

Уравнение (3) эквивалентно $2n$ -мерной динамической системе по x , относительно переменных $u, u_1, \dots, u_{2n-1}$. Само уравнение КдФ тоже можно переписать как динамическую систему по t для этих переменных. Эти системы совместны, то есть, соответствующие векторные поля коммутируют. При $n = 2$ имеем:

$$\begin{cases} u_x = u_1, \\ u_{1,x} = u_2, \\ u_{2,x} = u_3, \\ u_{3,x} = 10uu_2 + 5u_1^2 - 10u^3 - c_1(u_2 - 3u^2) - c_2u - c_3, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} u_t = u_3 - 6uu_1, \\ u_{1,t} = (4u - c_1)u_2 - u_1^2 - 10u^3 + 3c_1u^2 - c_2u - c_3, \\ u_{2,t} = (4u - c_1)u_3 + 2u_1u_2 - (30u^2 - 6c_1u + c_2)u_1, \\ u_{3,t} = 6u_1u_3 + 2u_2^2 + (10u^2 - 8c_1u - c_2 + c_1^2)u_2 - (40u - c_1)u_1^2 \\ \quad - 40u^4 + 22c_1u^3 - (4c_2 + 3c_1^2)u^2 + (c_1c_2 - 4c_3)u + c_1c_3. \end{cases} \quad (6)$$

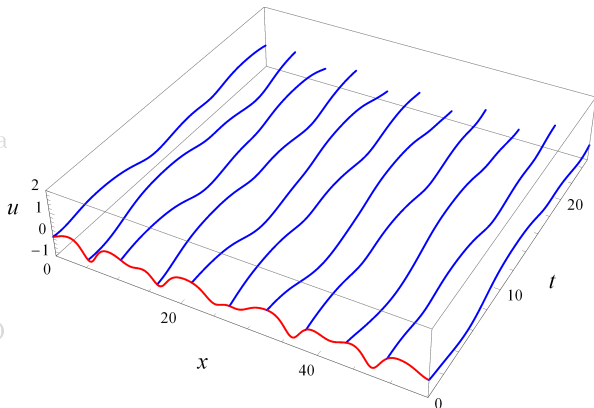
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (5) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (6) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



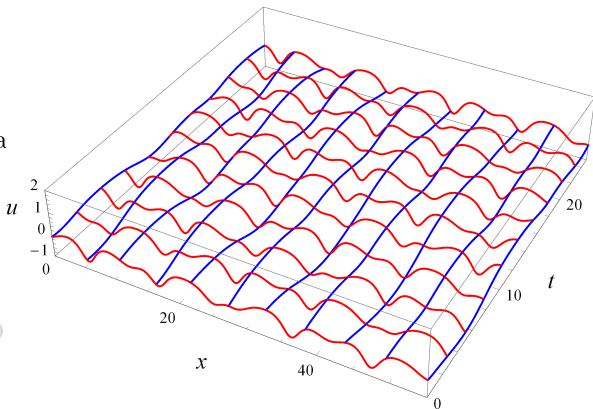
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (5) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (6) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



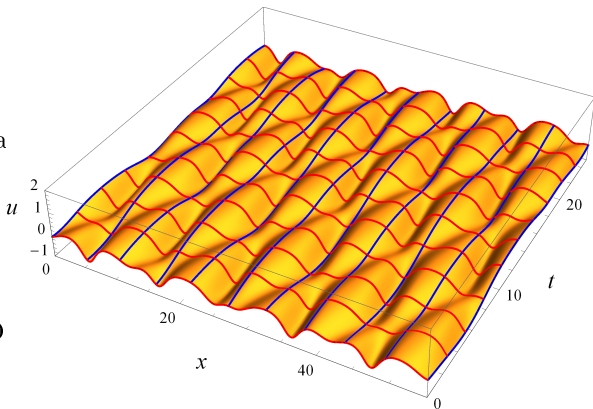
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (5) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (6) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



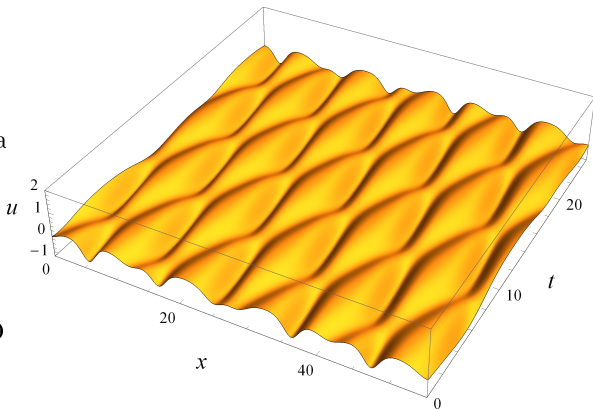
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (5) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (6) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



Как и в однозонном случае, важное значение имеет выбор параметров и начальных условий. Если выбрать неудачно, то решение будет иметь полюсы: при численном счёте решение станет неограниченно расти и произойдет ошибка.

С другой стороны, если выбрать *очень* удачно, то можно получить и двухсолитонные решения — как и предыдущем примере, они являются специальными сепаратрисными решениями.

Случай произвольного n

Ясно, что в переменных u_j работать трудно. Необходимо выбрать некоторые новые координаты, что было сделано в статье

- Б.А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. *Функц. анализ* **9:3** (1975) [41–51](#).

Сначала выпишем уравнения для некоторых многочленов от λ . Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. Уравнение Новикова (3) эквивалентно уравнению

$$-4\lambda Q^2 = 2QQ_{xx} - Q_x^2 - 4uQ^2 + P, \quad (7)$$

с полиномиальными $Q(\lambda)$ и $P(\lambda) = \text{const}$,

$$\begin{aligned} Q &= (-4\lambda)^n + q_1(x, t)(-4\lambda)^{n-1} + \cdots + q_n(x, t), \\ P &= (-4\lambda)^{2n+1} + \gamma_1(-4\lambda)^{2n} + \cdots + \gamma_{2n+1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Напомним, что величины a_j из (3) служат коэффициентами производящей функции

$$A = -a_0 - a_1/(-4\lambda) - \dots - a_n/(-4\lambda)^n - \dots, \quad a_0 = -1/2,$$

удовлетворяющей уравнению

$$-4\lambda A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_x A. \quad (8)$$

Уравнение Новикова (3)

$$A = a_{n+1} + \dots + c_n a_1 + c_{n+1} a_0 = 0$$

означает, что существует ряд с постоянными коэффициентами

$$C = (-4\lambda)^n (1 + c_1/(-4\lambda) + c_2/(-4\lambda)^2 + \dots),$$

такой, что $Q = CA$ — многочлен. Он также удовлетворяет (8):

$$-4\lambda Q_x = Q_{xxx} - 4uQ_x - 2u_x Q.$$

Это уравнение один раз интегрируется, после умножения на $2Q$ (мы уже использовали это для доказательства локальности a_j), что и дает (7) с постоянной интегрирования P . Так как A — многочлен, то и P — многочлен, причём уравнение (7) по прежнему совместно с КдФ, если P не зависит от t . ■

Замечание 2. При построении n -солитонных решений (потенциалов Баргманна) мы требовали существования решения уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$$

полиномиального по $z = \sqrt{-\lambda}$, с точностью до множителя e^{zx+4z^3t} (условие обрыва функции Бейкера–Ахиезера).

Легко проверить (ДЗ): произведение любых двух ψ -функций $q = \psi\tilde{\psi}$ и их вронскиан $w = \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi}$ удовлетворяют уравнению (7)

$$2qq_{xx} - q_x^2 + 4(\lambda - u)q^2 + w^2 = 0, \quad w_x = 0.$$

В качестве Q можно взять $Q = \psi(z)\psi(-z)$. Если ψ — оборванный ряд по z , то Q — многочлен по λ . Следовательно, n -солитонные решения удовлетворяют уравнению Новикова (7).

Обратное неверно — не все решения (7) являются n -солитонными. Это лишь подкласс специальных, сепаратрисных решений, выделенных условием быстроубывания. Для общего конечнозонного решения условие полиномиальности ψ -функций не выполняется.

Замечание 3. Есть и более универсальное доказательство, годящееся и для других уравнений. Для стационарного уравнения представление нулевой кривизны превращается в уравнение Лакса:

$$U_\tau = V_x + [V, U] \quad \rightarrow \quad V_x = [U, V].$$

По тождеству Лиувилля, отсюда следует (см. предыдущую лекцию)

$$\det V = \text{const}.$$

Это и есть соотношение (7), при

$$V = \begin{pmatrix} -Q_x & 2Q \\ -Q_{xx} + 2Q(u - \lambda) & Q_x \end{pmatrix}.$$

Выражение Q через ψ -функции тоже обобщается: решение уравнения $V_x = [U, V]$ имеет вид $V = \Psi C \Psi^{-1}$, где Ψ — фундаментальная матрица системы $\Psi_x = U \Psi$ и $C = \text{const}$.

Уравнения Дубровина

Нужная замена переменных — переход к нулям многочленов Q , P . Пусть

$$\begin{aligned}Q(\lambda) &= (-4\lambda - y_1) \cdots (-4\lambda - y_n), \\P(\lambda) &= (-4\lambda - e_1) \cdots (-4\lambda - e_{2n+1}).\end{aligned}$$

Положим в (7) $-4\lambda = y_j$. Слагаемые с Q^2 и QQ_{xx} исчезнут и останется

$$Q_x^2|_{-4\lambda=y_j} = P(y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как

$$Q_x|_{-4\lambda=y_j} = -y_{j,x} \prod_{i \neq j} (y_j - y_i),$$

то получается система ОДУ на переменные y_j — уравнения Дубровина

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

Фактически, понижение порядка происходит при переходе от уравнения Новикова (3) к проинтегрированному уравнению (7).

Исходное уравнение (3) имело порядок $2n$ и содержало $n + 1$ постоянную $c_1, \dots, c_{n+1}$. Мы свели её к системе порядка n , содержащей $2n + 1$ постоянную $e_1, \dots, e_{2n+1}$. При замене ничего не потерялось.

Потенциал u восстанавливается по e_j, y_j согласно формуле

$$4u = -e_1 - \dots - e_{2n+1} - 2y_1 - \dots - 2y_n, \quad (10)$$

что следует прямо из (7).

Кроме системы (9) по $x = t_1$, можно выписать системы, определяющие динамику по другим временам. Если ∂_{t_k} отвечает многочлену $A^{(k)} = a_0(-4\lambda)^k + \dots + a_k$ в линейной задаче, то Q удовлетворяет уравнению

$$Q_{t_k} = 2(A^{(k)}Q_x - A_x^{(k)}Q). \quad (11)$$

Подставляя $-4\lambda = y_j$, получаем $Q_{t_k}|_{-4\lambda=y_j} = 2A^{(k)}Q_x|_{-4\lambda=y_j}$, то есть

$$\frac{y_{j,t_k}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{2A^{(k)}(y_j)}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $Q = CA$, то $A^{(k)}$ — это линейные комбинации q_i . В свою очередь, все q_i выражаются через симметрические многочлены от корней y_j , что даёт замкнутую систему.

В частности, дифференцированию ∂_t в силу КдФ отвечает $A^{(2)} = -2\lambda - u$, поэтому

$$\frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{y_j - 2u}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

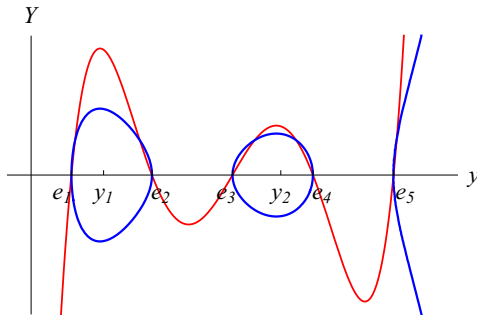
(где u задано формулой (10)).

Качественное поведение решения

Будем предполагать, что все корни e_k различны и вещественны. Пусть

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{2n+1}.$$

Чтобы решение системы было вещественным, нужно, чтобы все переменные y_j лежали в тех интервалах, где $P(y) \geq 0$, то есть, $[e_{2k-1}, e_{2k}]$, $k = 1, \dots, n$, или $[e_{2n+1}, \infty)$.



Синяя линия — кривая $Y^2 = P(y)$, красная — сам многочлен $Y = P(y)$.

Если начальные условия для y_i и y_j попадут в один интервал, в решении возникнет особенность из-за знаменателя $y_i - y_j$ в правой части (9).

Также, решение будет неограниченным, если какая-то переменная лежит в интервале $[e_{2n+1}, \infty)$. Таким образом, для вещественности и ограниченности решения следует задавать начальные условия для y_j так:

$$e_1 \leq y_1 \leq e_2 < e_3 \leq y_2 \leq e_4 < \dots < e_{2n-1} \leq y_n \leq e_{2n} < e_{2n+1}.$$

В этом случае переменные y_j отделены друг от друга и никаких особенностей в системе (9) возникнуть не может.

Переменные y_j крутятся каждая в своем овале, поэтому из формулы (10) ясно, что решение представляет собой ограниченную, квазипериодическую функцию по x и t .

Случай, когда все пары корней e_{2k} и e_{2k+1} сливаются, отвечает n -солитонному вырождению (конечно, возможны случаи, когда сливаются не все пары, тогда получается солитонное решение на конечнозонном фоне).

Замечание 4. Возвращаясь к ψ -функциям, можно доказать, что они строятся по формуле

$$\psi(x, \lambda) = Q^{1/2} \exp \left(\pm \sqrt{P(\lambda)} \int_{x_0}^x \frac{ds}{Q} \right). \quad (13)$$

Рассмотрим последовательность интервалов, на которых P меняет знак.

При тех λ , для которых $P(\lambda) < 0$ имеем экспоненту с мнимым показателем и регулярным подынтегральным выражением (поскольку нули A лежат там, где $P \geq 0$). Следовательно, для таких λ существует пара ограниченных, осциллирующих ψ -функций. Такие интервалы, следовательно, относятся к непрерывному спектру, они называются *разрешенными (стабильными) зонами*.

Дополнительные интервалы (в которых лежат нули y_j) называются *запрещенными зонами*, отвечающие им ψ -функции растут на одной или другой бесконечности.

Для ограниченного потенциала общего вида число чередующихся стабильных и нестабильных зон бесконечно. Решения уравнения Новикова характеризуются тем, что это число конечно, что и объясняет название.

Интегрирование в квадратурах

В элементарных функциях уравнения Дубровина не решаются. Мы видели, что при $n = 1$ ответ записывается неявно через неполный эллиптический интеграл, обращение которого — эллиптическая функция.

- При $n = 2$ имеем ($2E = e_1 + \dots + e_5$)

$$\begin{cases} \frac{y_{1,x}}{\sqrt{P(y_1)}} = \frac{1}{y_1 - y_2}, & \frac{y_{1,t}}{\sqrt{P(y_1)}} = \frac{E + y_2}{y_1 - y_2}, \\ \frac{y_{2,x}}{\sqrt{P(y_2)}} = \frac{1}{y_2 - y_1}, & \frac{y_{2,t}}{\sqrt{P(y_2)}} = \frac{E + y_1}{y_2 - y_1}. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольную точку y_0 и определим функции

$$F_k(y_1, y_2) = \int_{y_0}^{y_1} \omega_k + \int_{y_0}^{y_2} \omega_k, \quad k = 0, 1,$$

где $\omega_k = \frac{y^k dy}{\sqrt{P(y)}}$ (абелевы дифференциалы).

Несложно проверить, что

$$F_{0,x} = 0, \quad F_{1,x} = 1, \quad F_{0,t} = 4, \quad F_{1,t} = 4E, \quad \Rightarrow$$

$$F_0(y_1, y_2) = 4t + \delta_0, \quad F_1(y_1, y_2) = x + 4Et + \delta_1$$

— это два дополнительных первых интеграла (неавтономных). Задача решена, в том смысле, что она сведена к разрешению этих уравнений относительно y_1, y_2 .

- Для произвольного n имеем ($E = e_1 + \dots + e_{2n+1}$, $Y = y_1 + \dots + y_n$)

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)}, \quad \frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{E + Y - y_j}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)}.$$

Определим

$$F_k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n \int_{y_0}^{y_j} \omega_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Имеют место следующие алгебраические тождества:

$$\sum_{j=1}^n \frac{y_j^k}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)} = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, n-2, \\ 1 & k = n-1, \\ \sum y_j & k = n. \end{cases} \quad (14)$$

Используя их, можно показать, что

$$F_{0,x} = \cdots = F_{n-2,x} = 0, \quad F_{n-1,x} = 1,$$

$$F_{0,t} = \cdots = F_{n-3,t} = 0, \quad F_{n-2,t} = 4, \quad F_{n-1,t} = 4E.$$

Опять, ответ в неявном виде получен, точнее, задача сведена к квадратурам и разрешению уравнений

$$F_0(y_1, \dots, y_n) = \delta_0, \quad \dots, \quad F_{n-1}(y_1, \dots, y_n) = x + 4Et + \delta_n,$$

относительно $y_1, \dots, y_n$.

- Осуществление этого последнего шага может быть сделано конструктивно, но это выходит за рамки нашего курса. Опишем лишь примерно, что происходит.

Так как $\sqrt{P(y)}$ имеет точки ветвления, то значения интегралов F_k зависят от пути интегрирования, то есть, это многозначные функции. Правильно понимать их, как симметрические функции от n точек $(y_j, \sqrt{P(y_j)})$ на римановой поверхности гиперэллиптической кривой

$$\Gamma : Y^2 = P(y).$$

На этой поверхности есть $2n$ независимых циклов, при обходе вдоль которых значения интегралов от абелевых дифференциалов меняются на некоторые периоды. В результате, вектор $(F_0, \dots, F_{n-1})$ лежит на $2n$ -мерном торе, который называется многообразием Якоби гиперэллиптической кривой (обобщение параллелограмма периодов для эллиптических функций).

Преобразование $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (F_0, \dots, F_{n-1})$ осуществляет отображение Абеля

$$\Gamma^n / S_n \rightarrow \mathbb{C}^{2n} / \Lambda,$$

где S_n — симметрическая группа, Λ — решетка периодов. Задача построения обратного отображения решается при помощи тета-функций на многообразии Якоби — они определяются рядами вида

$$\theta(z; B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i(m, Bm) + 2\pi i(z, m)), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где B — некоторая матрица размера $n \times n$.

- Б.А. Дубровин. Тэта-функции и нелинейные уравнения. *УМН* **36:2** (1981) [11–80](#).
- Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Мир, 1960.
- Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.

Домашнее задание

5.1. Проверьте, что если ψ , ϕ удовлетворяют уравнениям

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

то $Q = \psi\phi$ удовлетворяет (7). Чему при этом равно P ? Используйте это для обоснования того, что P не зависит от x и t , а также того, что многосолитонным решениям отвечает случай, когда P имеет кратные корни.

5.2. В условиях предыдущей задачи, проверьте, что

$$Q_t = 2(aQ_x - a_xQ),$$

что подтверждает уравнение (11).

5.3. Докажите (с учетом предыдущих задач) формулу (13).

5.4. Докажите тождества (14).