В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 4 · 27 февраля 2023

Высшие симметрии КдФ

План лекции

- Иерархия КдФ
- Оператор рекурсии
- Локальность
- Симметрии эволюционных уравнений
- Коммутативность иерархии КдФ

Иерархия КдФ

Вспомним вывод КдФ (лекция 2) из условия совместности уравнений

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \qquad \psi_t = b\psi + 2a\psi_x. \tag{1}$$

В уравнении $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$ исключаем ψ_{xx}, ψ_{xxx} и приравниваем коэффициенты при ψ и ψ_x.

Одно из уравнений даёт $b_x = -a_{xx}$. Можно принять $b = -a_x$ без потери общности.

Второе уравнение даёт

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a, \tag{2}$$

и при выборе $a = -2\lambda - u$ получается уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

Однако, это не единственная возможность. Пусть a — многочлен по λ (удобно его записывать по степеням -4λ):

$$a = -a_0(-4\lambda)^n - a_1(-4\lambda)^{n-1} - \dots - a_n. \tag{3}$$

Подставим это в (2) и соберем коэффициенты:

$$\begin{array}{lcl}
(-4\lambda)^{n+1} & : & a_{0,x} = 0 \\
(-4\lambda)^{n} & : & a_{1,x} = a_{0,xxx} - 4ua_{0,x} - 2u_x a_0 \\
(-4\lambda)^{n-1} & : & a_{2,x} = a_{1,xxx} - 4ua_{1,x} - 2u_x a_1 \\
\quad \dots & : & \qquad\qquad \dots \\
(-4\lambda)^{1} & : & a_{n,x} = a_{n-1,xxx} - 4ua_{n-1,x} - 2u_x a_{n-1} \\
\quad 1 & : & u_t = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n.
\end{array}$$

Получаются рекуррентные соотношения, из которых находятся $a_0, \dots, a_n$, а последнее уравнение превращается в эволюционное уравнение на u.

Положим $a_0 = -1/2$, будем пренебрегать константами интегрирования и обозначим $u_j = \partial_x^j(u)$. Тогда последовательно находим

$$a_{1,x} = u_1 \quad\Rightarrow\quad a_1 = u;$$

$$a_{2,x} = a_{1,xxx} - 4ua_{1,x} - 2u_x a_1 = u_3 - 6uu_1 \quad\Rightarrow\quad a_2 = u_2 - 3u^2;$$

$$a_{3,x} = a_{2,xxx} - 4ua_{2,x} - 2u_x a_2 = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1 \quad\Rightarrow$$

$$a_3 = u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3$$

и так далее.

Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ строится по одним и тем же формулам при всех n: от n зависит лишь, в каком месте она обрывается.

Естественно, для разных n получаются разные уравнения для u. Обозначим соответствующее время через t_n:

$$u_{t_n} = g_n = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n = a_{n+1,x}. \tag{4}$$

Возникает бесконечная последовательность уравнений ($u_j = \partial_x^j(u)$)

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1\\
u_{t_2} &= u_3 - 6uu_1\\
u_{t_3} &= (u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3)_x\\
u_{t_4} &= (u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4)_x\\
u_{t_5} &= (u_8 - 18uu_6 - 54u_1u_5 - 114u_2u_4 - 69u_3^2 + 126u^2u_4\\
&\qquad + 504uu_1u_3 + 378uu_2^2 + 462u_1^2u_2 - 420u^3u_2 - 630u^2u_1^2 + 126u^5)_x\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Первое уравнение — классическая симметрия сдвига по x, второе — само уравнение КдФ, следующие называются высшими уравнениями КдФ.

Вычисления по формулам (4) требуют интегрирования по x. Мы проверили, на первых нескольких шагах, что a_j (а следовательно и g_j) находятся в замкнутом виде, как многочлены от u_n, но не очевидно, что это можно продолжать неограниченно. Чуть позже мы это обоснуем.

Если сохранять константы интегрирования, то получается произвольная линейная комбинация конечного числа потоков ∂_{t_n}:

$$u_\tau = \alpha_1 u_{t_n} + \alpha_2 u_{t_{n-1}} + \dots + \alpha_n u_{t_1}. \tag{5}$$

Таким образом, потоки ∂_{t_n} играют роль базиса в бесконечномерном линейном пространстве, которое называется иерархией уравнения КдФ.

Этот базис выделен лишь свойством однородности: правые части — однородные многочлены относительно веса

$$w(u) = 2, \quad w(\partial_x) = 1 \quad \Rightarrow \quad w(u_n) = 2 + n.$$

Это легко увидеть прямо из (4). Каждое дифференцирование увеличивает вес на 1, а умножение на u — на 2, поэтому если a_n — однородный многочлен веса m, то $g_n = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n$ — однородный веса $m+3$; тогда $a_{n+1} = \partial_x^{-1}(g_n)$ — однородный веса $m+2$.

Оператор рекурсии

Рекуррентные соотношения удобно записать в операторном виде. Пусть

$$K = D^3 - 4uD - 2u_x, \quad D = \partial_x,$$

тогда

$$g_n = D(a_{n+1}) = K(a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0 = \mathrm{const}\,.$$

Очевидно, это можно записать как

$$a_{n+1} = D^{-1}K(a_n),$$

где D^{-1} — оператор интегрирования по x. Аналогично, можно написать уравнение для g_n: так как $a_n = D^{-1}(g_{n-1})$, то

$$g_n = KD^{-1}(g_{n-1}) = R(g_{n-1}), \qquad R = D^2 - 4u - 2u_xD^{-1}. \tag{6}$$

Оператор R называется оператором рекурсии. Высшие уравнения КдФ можно определить, как

$$u_{t_n} = R^{n-1}(u_x).$$

Локальность высших уравнений КдФ

Переход от a_j к a_{j+1} включает в себя интегрирование. Докажем, что оно не выводит за пределы дифференциальных многочленов. Оказывается, интегрирование можно провести сразу для всех a_j. Рассмотрим производящую функцию

$$A = -a_0 - a_1/(-4\lambda) - a_2/(-4\lambda)^2 - \dots - a_n/(-4\lambda)^n - \dots,$$

то есть, делим многочлен (3) на $(-4\lambda)^n$ и устремляем n к бесконечности. В результате, в уравнении (2) пропадает свободный член u_t и для A получается уравнение

$$-4\lambda A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_xA \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda A_x = K(A). \tag{7}$$

Оно допускает интегрирующий множитель $2A$:

$$-8\lambda AA_x = 2AA_{xxx} - 8uAA_x - 4u_xA^2 \quad \Rightarrow$$

$$-4\lambda A^2 = 2AA_{xx} - A_x^2 - 4uA^2 + c, \tag{8}$$

где $c = -4a_0^2\lambda + c_0 + c_1/(-4\lambda) + c_2/(-4\lambda)^2 + \dots$ — постоянная интегрирования.

Если расписать уравнение (8) по степеням -4λ, то получится

$$\begin{aligned}-a_0a_{n+1}-\dots-a_{n+1}a_0=2(&a_0a_{n,xx}+\dots+a_{0,xx}a_n)\\ &-(a_{0,x}a_{n,x}+\dots+a_{n,x}a_{0,x})\\ &-4u(a_0a_n+\dots+a_na_0)+c_n.\end{aligned}$$

Так как $a_0=-1/2$, это даёт явное выражение для a_{n+1} через все предыдущие a_j. Отсюда следует, что все a_n действительно являются дифференциальными многочленами от u.

Замечание. Есть и другой, «более научный» способ вывода соотношения (8). Он полезен для более сложных задач, где интегрирующий множитель неочевиден. Используем представление нулевой кривизны

$$U_t-V_x=[V,U], \tag{9}$$

выведенное на лекции 2:

$$U=\begin{pmatrix}0&1\\ u-\lambda&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}-a_x&2a\\ -a_{xx}+2a(u-\lambda)&a_x\end{pmatrix},$$

где a — многочлен по (-4λ) (3).

Разделим уравнение (9) на $(-4\lambda)^n$ и устремим n к бесконечности. При этом матрица V перейдет в матрицу

$$M=\begin{pmatrix} -A_x & 2A\\ -A_{xx}+2A(u-\lambda) & A_x\end{pmatrix},$$

а уравнение (9) превратится в уравнение Лакса

$$M_x=[U,M].$$

Из тождества Лиувилля

$$(\log\det M)_x=\operatorname{tr}(M_xM^{-1})$$

(кстати, мы его уже использовали на предыдущей лекции) следует

$$(\log\det M)_x=\operatorname{tr}([U,M]M^{-1})=\operatorname{tr}U-\operatorname{tr}MUM^{-1}=0,$$

то есть,

$$\det M=2AA_{xx}-A_x^2-4(u-\lambda)A^2=-c=\mathrm{const},$$

что совпадает с (8).

Немного дифференциальной алгебры

Следующее важное свойство высших уравнений КдФ — это то, что они являются обобщёнными симметриями исходного уравнения КдФ, а также друг для друга. Попросту говоря, это означает их совместность, то есть, равенство смешанных производных:

$$(u_{t_n})_{t_m} = (u_{t_m})_{t_n},$$

где производные вычисляются в силу уравнений $u_{t_n} = g_n$. Чтобы понять, что это означает, необходимо немного формализовать наши вычисления. Введем некоторые обозначения.

- Пусть $\mathcal{F}$ — множество гладких функций от x и конечного числа переменных u_j, $j \geq 0$.

Переменные u_j имеют, как и раньше, смысл производных $\partial_x^j(u)$, но теперь мы будем считать их независимыми динамическими переменными, то есть, ∂_x на них действует тривиально, $\partial_x(u_j) = 0$. Соответственно, чтобы корректно дифференцировать по x функции из $\mathcal{F}$, согласно правилу вычисления производной от сложной функции, необходимо удлинить ∂_x.

- Оператором полной производной по x (в $\mathcal{F}$) называется бесконечномерное векторное поле

$$D = D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots + u_{j+1}\partial_j + \dots, \qquad \partial_j := \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Бесконечная сумма понимается в формальном смысле. При действии на $f \in \mathcal{F}$ всегда остаётся конечное число слагаемых.

Далее, пусть дано эволюционное уравнение

$$u_t = f(x, u_0, u_1, \dots, u_n). \tag{10}$$

- Эволюционной производной, или оператором полной производной по t в силу (10) называется формальное векторное поле

$$\nabla_f = f\partial_0 + D(f)\partial_1 + \dots + D^j(f)\partial_j + \dots$$

Опять, действие D_t на $\mathcal{F}$ корректно определено.

При построении D_t мы сначала продолжаем уравнение на все динамические переменные, используя уже введенный оператор D:

$$u_{1,t} = D(u_t) = D(f), \quad u_{2,t} = D(u_{1,t}) = D^2(f), \quad \dots,$$

а потом распространяем правило дифференцирования на функции из $\mathcal{F}$. По построению, имеем

$$[D, D_t] = 0.$$

Также, несложно показать, что коммутатор двух эволюционных дифференцирований имеет такой же вид, а именно,

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f,g]}, \quad \text{где} \quad [f,g] := \nabla_f(g) - \nabla_g(f). \tag{11}$$

Следовательно, эволюционные векторные поля образуют алгебру Ли.

Иногда вместо эволюционных производных удобнее пользоваться операторами линеаризации. Они определяются следующим образом.

Выпишем более явно, как дифференцируется некоторая функция $g \in \mathcal{F}$:

$$\nabla_f(g(x,u_0,\dots,u_k)) = f\partial_0(g) + D_x(f)\partial_1(g) + \dots + D_x^k(f)\partial_k(g).$$

Это можно записать также, как результат применения некоторого оператора g_* к f (фактически, это просто определение g_*):

$$\nabla_f(g) = g_*(f) = \Big(\partial_0(g) + \partial_1(g)D_x + \dots + \partial_k(g)D_x^k\Big)(f).$$

- Оператором линеаризации, или производной Фреше, называется дифференциальный оператор

  $$g_* = \partial_0(g) + \partial_1(g)D_x + \dots + \partial_j(g)D_x^j + \dots$$

  (сумма конечна для любой $g \in \mathcal{F}$).

Менее формально,

$$g_*(f) = \frac{d}{d\varepsilon} g[u+\varepsilon f]\Big|_{\varepsilon=0}$$

где $g[u+\varepsilon f]$ получается из g заменой всех u_j на $u_j + \varepsilon D^j(f)$.

Симметрии

Пусть дано эволюционное уравнение

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n). \tag{12}$$

Его симметрией называется уравнение

$$u_\tau = g(x, u, u_1, \dots, u_m) \tag{13}$$

такое, что

$$\nabla_g(f) = \nabla_f(g). \tag{14}$$

Это равенство можно записать также, как

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0.$$

Также, согласно тождеству (11), условие (14) равносильно коммутированию соответствующих векторных полей:

$$[\nabla_f, \nabla_g] = 0,$$

то есть, перестановочности дифференцирований при действии на любые функции из $\mathcal{F}$.

Также, можно показать, что определение симметрии эквивалентно равенству

$$[\nabla_f - f_*, \nabla_g - g_*] = 0.$$

Из тождества Якоби

$$[[\nabla_f, \nabla_g], \nabla_h] + [[\nabla_g, \nabla_h], \nabla_f] + [[\nabla_h, \nabla_f], \nabla_g] = 0,$$

следует, что если ∇_g и ∇_h коммутируют с ∇_f, то это же верно и для $[\nabla_g, \nabla_h]$. Следовательно, симметрии фиксированного уравнения образуют алгебру Ли.

Замечание. Для простоты, мы предполагали, что все рассматриваемые уравнения не зависят от t явно. В случае неавтономных уравнений и симметрий в оператор $D_t = \nabla_f$, отвечающий самому уравнению, следует добавить член ∂_t, но при этом операторы ∇_g для симметрий остаются прежними.

Общее определение оператора рекурсии

- Оператор R называется оператором рекурсии для уравнения $u_t = f$, если он переводит любую симметрию этого уравнения в симметрию (то есть, если $u_\tau = g$ — симметрия, то и $u_T = R(g)$ — симметрия).

Утверждение. Для того, чтобы R был оператором рекурсии, достаточно, чтобы он удовлетворял соотношению

$$[\nabla_f - f_*, R] = 0. \tag{15}$$

Доказательство. По определению, симметрия $u_\tau = g$ характеризуется равенством

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0.$$

Применяя R, получаем

$$R((\nabla_f - f_*)(g)) = (\nabla_f - f_*)(R(g)) = 0,$$

что и означает, что $u_T = R(g)$ — тоже симметрия. ∎

Заметим, что для любого дифференциального оператора вида

$$R = r_n D^n + \cdots + r_0 + \cdots + r_{-k} D^{-k},$$

с $r_j \in \mathcal{F}$, коммутатор $[\nabla_f, R]$ сводится просто к дифференцированию всех коэффициентов:

$$[\nabla_f, R] = \nabla_f(r_n) D^n + \cdots + \nabla_f(r_0) + \cdots + \nabla_f(r_{-k}) D^{-k} =: \nabla_f(R).$$

Действительно, так как ∇_f коммутирует с D, то для любой функции $h \in \mathcal{F}$ имеем

$$[\nabla_f, R](h) = \nabla_f(R(h)) - R(\nabla_f(h)) = \nabla_f(R)(h).$$

С учётом этого замечания, (15) можно записать, как

$$\nabla_f(R) = [f_*, R].$$

Пример

Проверим, что $R=D+u_x$ — оператор рекурсии для потенциального уравнения Бюргерса

$$u_t=u_{xx}+u_x^2. \tag{16}$$

Имеем

$$f=u_{xx}+u_x^2,\quad f_*=D^2+2u_xD=(D+u_x)(D+u_x)-u_{xx}-u_x^2=R^2-f,$$

тогда

$$\begin{aligned}&\nabla_f(R)=\nabla_f(u_x)=D(f),\\&[f_*,R]=[R^2-f,R]=[R,f]=[D+u_x,f]=[D,f]=D(f),\end{aligned}$$

результаты совпали.

Следовательно, (16) допускает симметрии

$$\begin{aligned}u_{t_3}&=(D+u_x)(u_{xx}+u_x^2)=u_{xxx}+3u_xu_{xx}+u_x^3,\\u_{t_4}&=u_{xxxx}+4u_xu_{xxx}+3u_{xx}^2+6u_x^2u_{xx}+u_x^4\end{aligned}$$

и так далее.

Оператор рекурсии для КдФ

Покажем, что все высшие уравнения КдФ

$$u_{t_n} = R^{n-1}(u_x), \quad R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

являются симметриями КдФ. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение. Оператор R служит оператором рекурсии для уравнения $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Доказательство. Имеем

$$\nabla_f(R) = -4u_t - 2u_{xt}D^{-1} = -4(u_3 - 6uu_1) - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}. \quad (17)$$

Теперь вычислим коммутатор $f_* = D^3 - 6uD - 6u_1$ и R, разбивая R на слагаемые.

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,D^2]&=[-6uD-6u_1,D^2]\\
&=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1\\
&=-6uD^3-6u_1D^2+6(uD^3+2u_1D^2+u_2D)+6u_1D^2+12u_2D+6u_3\\
&=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-4u]&=[D^3-6uD,-4u]\\
&=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D\\
&=-4uD^3-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+4uD^3+24u^2D+24uu_1-24u^2D\\
&=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]&=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]\\
&=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u\\
&=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u\\
&=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$
-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}. \qquad \blacksquare
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2]\\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1\\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3\\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u]\\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D\\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D\\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}]\\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u\\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u\\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}. \qquad \blacksquare
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2]\\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1\\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3\\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u]\\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D\\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D\\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}]\\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u\\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u\\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$ ∎

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-2u_1D^2-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12uu_1+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$

$$[D^3-6uD-6u_1,D^2]=[-6uD-6u_1,D^2]$$
$$=-6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1$$
$$=-\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3$$
$$=12u_1D^2+18u_2D+6u_3;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-4u]=[D^3-6uD,-4u]$$
$$=-4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D$$
$$=-\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}$$
$$=-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+24uu_1;$$

$$[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}]=[D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]$$
$$=-2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u$$
$$=-\cancel{2u_1D^2}-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+\cancel{12uu_1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+\cancel{2u_1D^2}-\cancel{12u_1u}$$
$$=-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}.$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,D^2] &= [-6uD-6u_1,D^2]\\
&= -6uD^3-6u_1D^2+6D^2uD+6D^2u_1\\
&= -\cancel{6uD^3}-\cancel{6u_1D^2}+6(\cancel{uD^3}+2u_1D^2+u_2D)+\cancel{6u_1D^2}+12u_2D+6u_3\\
&= \cancel{12u_1D^2}+\cancel{18u_2D}+\cancel{6u_3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-4u] &= [D^3-6uD,-4u]\\
&= -4D^3u+4uD^3+24uDu-24u^2D\\
&= -\cancel{4uD^3}-12u_1D^2-12u_2D-4u_3+\cancel{4uD^3}+\cancel{24u^2D}+24uu_1-\cancel{24u^2D}\\
&= -\cancel{12u_1D^2}-\cancel{12u_2D}-4u_3+24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3-6uD-6u_1,-2u_1D^{-1}] &= [D^3-6Du,-2u_1D^{-1}]\\
&= -2D^3u_1D^{-1}+12Duu_1D^{-1}+2u_1D^2-12u_1u\\
&= -\cancel{2u_1D^2}-6u_2D-6u_3-2u_4D^{-1}+\cancel{12uu_1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}+\cancel{2u_1D^2}-\cancel{12u_1u}\\
&= -\cancel{6u_2D}-\cancel{6u_3}-2u_4D^{-1}+12(uu_2+u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем и получаем то же, что в (17):

$$
-4u_3+24uu_1-2(u_4-6uu_2-6u_1^2)D^{-1}. \qquad \blacksquare
$$

Коммутативность высших уравнений КдФ

Высшие уравнения КдФ служат симметриями не только для КдФ, но и друг для друга, то есть, они образуют коммутативную алгебру Ли. Это можно доказать разными способами, например, используя некоторые тождества, следующие из представления нулевой кривизны.

Вот идея другого, достаточно простого доказательства, которое годится для любых уравнений вида

$$u_t = u_k + \text{полиномиальные младшие члены}$$

и таких, что их симметрии тоже полиномиальны и автономны.
Во-первых, можно доказать, следя за старшими производными (и даже не используя полиномиальность), что любая симметрия такого уравнения имеет вид

$$u_{t_n} = \mathrm{const}(u_n + \text{младшие члены}).$$

Во-вторых, из полиномиальности следует, что в коммутаторе u_{t_n} и u_{t_m} нет линейных членов (поскольку $[u_n, u_m] = 0$, а коммутатор членов степени p и q имеет степень $p + q - 1$). Так как коммутатор любых двух симметрий есть симметрия (это общий факт, следующий из тождества Якоби), то из первого утверждения следует, что он равен 0.

Классические симметрии

Все ли симметрии КдФ мы получили? Оказывается, нет, есть и другие. Сначала поясним понятие так называемых классических симметрий. Очень часто уравнение (интегрируемое или нет) допускает некоторую непрерывную группу симметрий, то есть преобразований зависимых и независимых переменных, переводящих решения в решения. В физике часто встречаются группы переносов, преобразований Галилея, Лоренца, растяжения, вращения... Переходя от группы к ее алгебре Ли (то есть, к инфинитезимальным преобразованиям), получаем запись симметрии в виде эволюционного уравнения (уравнение Ли). Такие симметрии и называются классическими. Их изучение очень важно, но мы ограничимся парой примеров. Подробнее можно почитать в книгах

- Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.
- Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Пример 1. Уравнение магнетика Гайзенберга

$$s_t = [s, s_{xx}], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad |s| = 1, \tag{18}$$

где $[,]$ обозначает векторное произведение. Очевидно, это уравнение инвариантно относительно группы 3-мерных вращений $\tilde{s} = As$, где $A \in \mathrm{SO}(3)$, то есть $AA^t = 1$, $\det A = 1$.

Однопараметрическая подгруппа вращений задается матрицами $A = \exp(\tau a)$, $a = -a^t$, то есть $a \in \mathrm{so}(3)$. Можно определить

$$s(x, t, \tau) = \exp(\tau a) s(x, t, 0).$$

Инфинитезимальное преобразование определяется при дифференцировании по τ

$$s_\tau = as, \quad a = -a^t.$$

Легко проверить, что это — симметрия (18), то есть $(s_t)_\tau = (s_\tau)_t$.

При этом сами такие векторные поля не коммутируют, а образуют алгебру изоморфную $so(3)$: если

$$s_T = bs, \quad b = -b^t,$$

то $(s_\tau)_T - (s_T)_\tau = [a, b]$.

Кроме того, к классическим симметриям относятся однопараметрические подгруппы сдвигов по x и t (вообще, это верно для любых автономных уравнений):

$$\tilde{s}(x,t)=\tilde{s}(x+\tau,t),\qquad \tilde{s}(x,t)=\tilde{s}(x,t+\tau).$$

Ясно, что им отвечают дифференцирования

$$s_\tau=s_x,\quad s_\tau=[s,s_{xx}],$$

то есть, s_τ отождествляется с самим уравнением.

У нас не будет времени на изучение уравнения (18), но отметим, что оно имеет приложения в теории ферромагнетизма и обладает представлением нулевой кривизны (как и более общее уравнение Ландау–Лифшица $s_t=[s,s_{xx}+Js]$, где J диагональная матрица). Соответственно, у него есть и высшие симметрии.

Дополнительные симметрии КдФ

Можно прямым вычислением проклассифицировать все симметрии КдФ порядка ≤ 3 и получить ещё два ответа:

$$u_{\tau_1} = 6tu_x - 1, \qquad \text{преобразование Галилея} \tag{19}$$

$$u_{\tau_2} = 3t(u_{xxx} - 6uu_x) + xu_1 + 2u \qquad \text{растяжение} \tag{20}$$

Это классические симметрии КдФ.

На уровне группы, преобразование Галилея определяется заменой

$$\tilde{x} = x + 6\tau_1 t, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{u} = u + \tau_1.$$

Если $u(x,t)$ — решение КдФ, то $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ тоже, при любом τ_1, причем при $\tau_1 = 0$ преобразование тождественно. Запишем это в виде

$$u(x,t,\tau_1) = \tilde{u}(x + 6\tau_1 t, t) - \tau_1,$$

тогда дифференцирование по τ_1 (в точке $\tau_1 = 0$) даст симметрию (19) в инфинитезимальной форме.

Аналогично, растяжение отвечает группе

$$\tilde{x} = e^{\tau_2} x, \quad \tilde{t} = e^{3\tau_2} t, \quad \tilde{u} = e^{-2\tau_2} u.$$

Однопараметрическое семейство решений имеет вид

$$u(x, t, \tau_2) = e^{2\tau_2} \tilde{u}(e^{\tau_2} x, e^{3\tau_2} t).$$

Дифференцируем по τ_2, полагаем $\tau_2 = 0$, и получаем симметрию в инфинитезимальной форме, затем u_t заменяем, используя само уравнение КдФ:

$$u_{\tau_2} = 3t u_t + x u_1 + 2u = 3t(u_{xxx} - 6uu_x) + x u_1 + 2u.$$

Легко понять, что классическими являются также симметрии $u_{t_1} = u_x$ (групповое преобразование — сдвиг по x) и само уравнение КдФ $u_{t_2} = u_t$ (отвечает сдвигу по t).

Других классических симметрий у КдФ нет, но ведь мы можем построить новые симметрии при помощи оператора рекурсии R.

Нетрудно проверить, что $R(u_{\tau_1}) = 2u_{\tau_2}$, а дальше будут получаться некоторые высшие симметрии

$$u_{\tau_n} = R^{n-1}(u_{\tau_1}).$$

Однако, можно проверить, что они будут *нелокальными*, то есть, в данном случае интегрирование в операторе рекурсии будет выводить за пределы $\mathcal{F}$. Также, эти симметрии будут *некоммутативными* (можно показать, что они образуют алгебру Вирасоро). Это расширение иерархии КдФ — довольно сложный и интересный объект, но мы им не будем заниматься.

Наконец, можно пытаться строить симметрии, применяя отрицательные степени R к u_x или к $6tu_x - 1$, но при этом сразу будут получаться нелокальные и даже неэволюционные уравнения. Тем не менее, они в каком-то смысле тоже относятся к иерархии КдФ.

Зачем нужны симметрии?

В чем смысл высших уравнений КдФ? Любое из них ничуть не хуже КдФ по свойствам. В частности, можно для них повторить все вычисления многосолитонных решений (потенциалы Баргманна). Различие будет только в показателях экспонент: если в случае КдФ фазы имели вид

$$k_jx + 4k_j^3t + \delta_j,$$

то фазы для решения, удовлетворяющего всей иерархии равны

$$k_jx + 4k_j^3t_2 + 16k_j^5t_3 + 64k^7t_4 + \cdots + \delta_j.$$

Если положить $t_n = 0$ начиная с какого-то номера, то решение будет функцией от $x, t_2, \ldots, t_{n-1}$, удовлетворяющей каждому из уравнений $u_{t_j} = g_j$, $j = 2, \ldots, n-1$. Аналогично, ничего по существу не меняется и в методе обратной задачи рассеяния (его будем позже изучать).

Однако, это не кажется особенно ценным свойством. Если нас интересуют только решения КдФ, то зачем нам знать, как меняется решение по каким-то дополнительным параметрам, которых изначально в КдФ не было. Это просто переопределение фаз в уже известных семействах решений...

- Более важно другое применение симметрий: они помогают строить точные решения. Фактически, все точные решения получаются понижением размерности задачи, то есть, к заданному уравнению приписывается какое-нибудь ОДУ:

$$u_t = f, \quad g = 0, \quad f, g \in \mathcal{F}$$

и ищутся решения, удовлетворяющие обоим уравнениям. За счет ОДУ задача сводится к конечномерной системе. Однако, какое попало ОДУ приписывать нельзя, так как эта система, вообще говоря будет переопределенной. Нужно, чтобы второе уравнение было совместно с первым:

$$D_t(g)\Big|_{g=0} = 0.$$

Откуда брать g с таким свойством? Годятся стационарные уравнения для симметрий: так как для симметрий

$$D_t(g) = f_*(g),$$

то $D_t(g) = 0$ если $g = 0$.

Оказывается, что многосолитонные решения КдФ вкладываются в эту схему: они удовлетворяют стационарным уравнениям для высших уравнений КдФ. При этом условие быстроубывания фиксирует нулевые значения первых интегралов для этих стационарных уравнений. Если же не требовать быстроубывания, то возникают более общие решения — так называемые конечнозонные. Ими мы займемся на следующей лекции.

Если вдобавок использовать симметрии из расширенной иерархии, то это приводит к решениям, выражающимся через трансценденты Пенлеве или их высшие аналоги (так называемые струнные уравнения). Мы лишь слегка коснемся этой темы в конце курса.

- Ещё одно приложение симметрий — классификационное. Как правило, у произвольного уравнения может быть несколько классических (или групповых) симметрий, но нет симметрий порядка выше порядка самого уравнения. Наличие высших симметрий является исключительным свойством, характеризующим интегрируемые уравнения.

Гипотеза Фокаса (1980) утверждает, что если уравнение имеет хотя бы одну высшую симметрию, то их бесконечно много. Есть некоторые контрпримеры, но, по существу, эта гипотеза, вероятно, верна с какими-то оговорками.

Для заданного уравнения, вычисление симметрий заданного порядка — алгоритмическая процедура. Поиск всех уравнений, допускающих симметрии — существенно сложнее, но для некоторых отдельных классов эта задача решена (результаты Шабата и др., 1980–90), например, для уравнений вида

$$u_t = a(x, u, u_1, u_2),$$

$$u_t = a(x, u, u_1, u_2)u_3 + b(x, u, u_1, u_2),$$

$$u_t = u_5 + b(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$

а также для систем

$$u_t = u_2 + a(x, u, v, u_1, v_1), \quad v_t = -v_2 + b(x, u, v, u_1, v_1).$$

Домашнее задание

4.1. Докажите тождество (11). [Достаточно проверить, что операторы в левой и правой части дают один и тот же результат при действии на все динамические переменные u_j.]

4.2. Проверьте, что уравнение

$$s_\tau = s_{xxx} + \frac{3}{2}\big(\langle s_x, s_x\rangle s\big)_x, \quad s \in \mathbb{R}^3,$$

ограничивается на сферу $|s| = 1$ и определяет на ней симметрию для уравнения (18) $s_t = [s, s_{xx}]$.

[Необходимо проверить равенство смешанных производных $(s_t)_\tau = (s_\tau)_t$, для чего потребуются следствия из связи $\langle s, s\rangle = 1$ и некоторые тождества для смешанного произведения.]

Замечание. В отличие от (18), данное уравнение определено для $s \in \mathbb{R}^n$ любой размерности. Можно показать, что ограничение этого уравнения на сферу $|s| = 1$ допускает представление нулевой кривизны при любом n.

4.3. Пусть уравнение

$$u_t = f$$

обладает оператором рекурсии R. Как он преобразуется при замене вида $u = a(\tilde{u})$? В частности, покажите, что оператор $R = D + u_x$ для уравнения (16) $u_t = u_{xx} + u_x^2$ связан с очевидным оператором $R = D$ для линейного уравнения $u_t = u_{xx}$.

4.4. Проверьте непосредственно, что $R = D + v + v_1 D^{-1}$ является оператором рекурсии для уравнения Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x.$$

Свяжите этот результат с предыдущим, используя подстановку $v = u_x$.

4.5. Проверьте прямым вычислением, что уравнения (19) и (20) являются симметриями КдФ. Также, проверьте, что друг с другом эти симметрии не коммутируют. Какую алгебру Ли они образуют?