В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 3 · 20 февраля 2023

Многосолитонное решение КдФ

План лекции

- Функция Бейкера–Ахиезера
- Потенциалы Баргманна
- Система ОДУ на коэффициенты многочлена
- Переход к корням, первые интегралы
- Линеаризация системы
- Вронскианные формулы для потенциала и волновой функции
- Фазовый сдвиг

Функция Бейкера–Ахиезера

На прошлой лекции мы проверили, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{1}$$

равносильно условию совместности $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ для линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x, \tag{2}$$

где $a = -2\lambda - u$.

Было показано, что уравнение Риккати для функции $f = \psi_x/\psi$

$$f_x + f^2 = u - \lambda$$

допускает решение в виде ряда

$$f(z) = -z/2 + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \cdots, \quad \lambda = -z^2/4,$$

с локальными коэффициентами $F_j \in \mathcal{F}$, что даёт бесконечно много законов сохранения.

Теперь будем строить в виде ряда саму функцию ψ. Только на этот раз удобнее заменить λ на $-z^2$, а не $-z^2/4$.

Определение 1. Формальной функцией Бейкера–Ахиезера называется ряд вида

$$\psi(x,t,z) = e^{zx+4z^3t}\Big(1 + \frac{\varphi_1(x,t)}{z} + \frac{\varphi_2(x,t)}{z^2} + \cdots\Big), \tag{3}$$

удовлетворяющий уравнениям (2) с $\lambda = -z^2$.

Множитель e^{zx+4z^3t} — это частное решение уравнений (2) при $u = 0$:

$$\psi_{xx} = z^2\psi, \quad \psi_t = 4z^2\psi_x.$$

Покажем, что данное определение корректно, в том смысле, что коэффициенты ряда рекуррентно определяются. Обозначим

$$\psi = e^X\Phi, \quad X = zx + 4z^3t, \quad \Phi = 1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} + \dots,$$

и перепишем уравнения для Φ.

Имеем

$$\psi_{xx} = e^X(z^2\Phi + 2z\Phi_x + \Phi_{xx}) = e^X(u + z^2)\Phi,$$
$$\psi_t = e^X(4z^3\Phi + \Phi_t) = e^X\big(u_x\Phi + (4z^2 - 2u)(z\Phi + \Phi_x)\big).$$

Уравнение по x:

$$2z\Phi_x = -\Phi_{xx} + u\Phi.$$

Уравнение по t:

$$\begin{aligned}\Phi_t &= (4z^2 - 2u)\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi\\ &= 2z(-\Phi_{xx} + u\Phi) - 2u\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi\\ &= -2z\Phi_{xx} - 2u\Phi_x + u_x\Phi\\ &= (\Phi_{xx} - u\Phi)_x - 2u\Phi_x + u_x\Phi\\ &= \Phi_{xxx} - 3u\Phi_x.\end{aligned}$$

Расписываем по степеням z, получаем, при $j = 1, 2, \dots$:

$$2\varphi_{1,x} = u, \quad 2\varphi_{j+1,x} = -\varphi_{j,xx} + u\varphi_j, \tag{4}$$
$$\varphi_{j,t} = \varphi_{j,xxx} - 3u\varphi_{j,x}. \tag{5}$$

- Уравнение (4) — это рекуррентные соотношения, из которых φ_j находятся по заданному u. При этом приходится интегрировать по x. Легко видеть, что φ_j *не являются* локальными, то есть, они не выражаются как функции от $u, u_x, \dots$, в отличие от коэффициентов ряда $f(z) = \psi_x/\psi$.

- Из-за постоянных интегрирования ответ не единственный. Это ясно также из того, что функцию (3) можно умножать на произвольный постоянный ряд $1 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \dots$.

- По построению, (4) и (5) совместны, если u удовлетворяет КдФ. Поэтому, подстановка в (5) функций, найденных из (4), не приводит к противоречиям — просто уточняется зависимость постоянных интегрирования от t.

- Замечательное свойство уравнений (4) и (5) — их можно оборвать на любом номере. Точнее: если выполняется свойство, что $\varphi_{n+1} = 0$, то и $\varphi_{n+2}, \varphi_{n+3}, \dots$ можно выбрать равными 0. Это позволяет ввести следующий класс потенциалов.

Потенциалы Баргманна

Определение 2. Функция $u(x,t)$, вещественная, быстроубывающая и без особенностей, называется потенциалом Баргманна, если уравнения (2) с $\lambda = -z^2$ допускают решение в виде квазимногочлена

$$\psi(x,t,z) = e^{zx+4z^3t}(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n). \tag{6}$$

Это определение восходит к статье

V. Bargmann. On the connection between phase shifts and scattering potential. *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 488–493.

(точнее, там рассматривалось уравнение Шрёдингера на полупрямой, при $n = 1, 2$ и без зависимости от t).

- Ясно, что для произвольного потенциала условие обрыва не выполняется, то есть, это условие выделяет некий специальный класс потенциалов. Мы покажем, что, с учётом зависимости от t, получается $2n$-параметрическое семейство решений КдФ.

- Эти решения явные — записываются, как рациональные выражения от экспонент. Для вывода потребуется только линейная алгебра.

- Наибольшую трудность представляет анализ условий вещественности, быстрого убывания и регулярности. Сегодня мы не будем за этим следить — требуем только обрыв.

При обрыве, уравнения (4) и (5) превращаются в совместную пару систем ОДУ порядка $2n$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{j,xx} = -2\varphi_{j+1,x} + 2\varphi_{1,x}\varphi_j, \quad j = 1,\dots,n-1,\\ &\varphi_{n,xx} = 2\varphi_{1,x}\varphi_n,\\ &\\ &\varphi_{j,t} = \varphi_{j,xxx} - 6\varphi_{1,x}\varphi_{j,x}. \end{aligned} \tag{7}$$

(Точнее, уравнения по t нужно расписать как динамическую систему относительно $2n$ переменных $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{1,x},\dots,\varphi_{n,x}$.) Для каждого совместного решения этих систем, функция

$$u = 2\varphi_{1,x} \tag{8}$$

определяет некоторое решение КдФ.

Общее совместное решение систем (7) зависит от $2n$ произвольных постоянных. Чтобы его построить, мы предъявим полный набор из первых интегралов. Для этого нам понадобится одна лемма. Она верна для любых двух решений уравнений (2), не обязательно в виде рядов.

Лемма 1. Пусть функции ψ и $\tilde{\psi}$ удовлетворяют уравнениям (2)

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

тогда их вронскиан постоянен:

$$w := \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi} = \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix}, \quad w_x = 0, \quad w_t = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$w_x = \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_{xx} & \tilde{\psi}_{xx} \end{vmatrix} = (u-\lambda)\begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi & \tilde{\psi} \end{vmatrix} = 0.$$

Для дифференцирования по t надо ещё использовать следствие

$$\psi_{xt} = (-a_{xx} + 2a(u-\lambda))\psi + a_x\psi_x.$$

Тогда

$$w_t = \begin{vmatrix} \psi_t & \tilde{\psi}_t \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_{xt} & \tilde{\psi}_{xt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_x\psi & -a_x\tilde{\psi} \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ a_x\psi_x & a_x\tilde{\psi}_x \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание. В более общем виде: пусть $w = \det\Psi$, где Ψ — фундаментальная система решений для уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi,$$

таких, что $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$, тогда $w_x = w_t = 0$.

Доказательство следует из формулы Лиувилля для произвольной невырожденной матрицы Ψ, зависящей от параметра:

$$(\log\det\Psi)' = \operatorname{tr}(\Psi'\Psi^{-1}).$$

Первые интегралы для системы (7)

Пусть (2) допускает решение в виде квазимногочлена

$$\psi = \psi(x,t,z) = e^{zx+4z^3t}(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n) = e^X \Phi(z).$$

Тогда решением является также

$$\tilde\psi = \psi(x,t,-z) = e^{-zx-4z^3t}((-z)^n + \varphi_1(-z)^{n-1} + \dots + \varphi_n) = e^{-X}\Phi(-z).$$

Вронскиан этих решений — нечетный многочлен по z степени $2n+1$:

$$\begin{aligned} w = \psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi &= -2z\Phi(z)\Phi(-z) + \Phi(z)\Phi_x(-z) - \Phi_x(z)\Phi(-z)\\ &= -2(-1)^n z(z^2-k_1^2)\cdots(z^2-k_n^2). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $w(z)$ выражаются через переменные φ_j, $\varphi_{j,x}$, $j=1,\dots,n$.

Из Леммы 1 следует, что эти коэффициенты постоянны, что даёт n первых интегралов — половину от размерности системы (7).

Оказывается выгодным перейти от коэффициентов к корням k_j, так как тогда можно определить еще n дополнительных первых интегралов.

Утверждение 2. Нули w постоянны:

$$k_{j,x} = k_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отношения $\tilde{\psi}/\psi$ в точках $z = k_j$ также постоянны:

$$c_j \psi(k_j) = \tilde{\psi}(k_j), \quad c_{j,x} = c_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Доказательство. То, что k_j постоянны, как уже сказано, следует из Леммы 1. Для отношений имеем

$$\left(\frac{\tilde{\psi}}{\psi}\right)_x = \frac{\psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi}}{\psi^2} = \frac{w}{\psi^2}; \qquad \left(\frac{\tilde{\psi}}{\psi}\right)_t = \frac{\psi\tilde{\psi}_t - \psi_t\tilde{\psi}}{\psi^2} = \frac{2aw}{\psi^2},$$

(используем, что $\psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x$) и при подстановке $z = k_j$ производные c_j обращаются в 0. ■

Контрольный вопрос. Чем объясняется, что в системе размерности $2n$ нашлось $2n$ первых интегралов? Разве максимальное количество не должно быть на 1 меньше?

Может показаться, что найденными первыми интегралами трудно воспользоваться: мы ведь не можем найти корни заданного многочлена степени n. Но это и не надо — просто считаем, что корни k_j заданы, также, как и отношения c_j. Задача заключается, чтобы восстановить по этим данным функции φ_j.

Дополнительные предположения. Будем считать, что имеет место случай общего положения, а именно,

$$1)\ k_i^2 \neq k_j^2,\quad i \neq j; \qquad 2)\ k_j \neq 0; \qquad 3)\ c_j \neq 0, \infty.$$

Условие 3), на самом деле, не является ограничением, так как если $c_j = 0$ или $c_j = \infty$, то это означает, что ψ делится на постоянный множитель $z - k_j$ или $z + k_j$. На такие множители можно сократить и придти к ψ — квазимногочлену более низкой степени.

Предположения 1) и 2) более существенны. Если они не выполнены, то система все равно решается в явном виде, но вычисления усложняются, а ответ «вырождается» — получаются рациональные решения или рациональные на солитонном фоне. Мы принимаем эти условия для простоты, при этом основное семейство решений не теряется.

Обозначения

Уравнения (9) — система линейных алгебраических уравнений относительно φ_j. Прежде чем решать её в общем виде, введём несколько обозначений, потом рассмотрим примеры с $n=1$ и $n=2$.

Положим

$$X_j = X\big|_{z=k_j} = k_j x + 4k_j^3 t, \qquad y_j = c_j e^{X_j} - e^{-X_j}.$$

Производные по x временно будем обозначать штрихом или верхним индексом. В частности,

$$y_j' = k_j(c_j e^{X_j} + e^{-X_j}), \quad y_j'' = k_j^2(c_j e^{X_j} - e^{-X_j}), \ \dots$$

Вронскиан функций $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ будем обозначать

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1' & a_2' & \dots & a_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Пример: $n = 1$

Система (9) состоит из одного уравнения

$$c_1\psi(k_1) = \psi(-k_1),$$

где $\psi(z) = e^X(z+\varphi_1)$. Имеем

$$c_1 e^{X_1}(k_1+\varphi_1) = e^{-X_1}(-k_1+\varphi_1) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = -k_1\frac{c_1e^{X_1}+e^{-X_1}}{c_1e^{X_1}-e^{-X_1}} = -\frac{y_1'}{y_1}.$$

Согласно (8), $u = 2\varphi_{1,x}$ (при любом n), то есть

$$u = -2(\log y_1)_{xx},$$

где

$$y_1 = c_1e^{X_1}-e^{-X_1}, \quad X_1 = k_1x+4k_1^3t.$$

Это и есть солитон, при правильном выборе знаков.

Отметим, что если $k_1, c_1 \in \mathbb{R}$, то решение u вещественно, а его регулярность зависит от знака c_1:

$$\text{при } c_1 = -e^{2\delta_1} < 0: \qquad \varphi_1 = -k_1 \tanh(X_1 + \delta), \quad u = -\frac{2k_1^2}{\cosh^2(X_1 + \delta_1)},$$

$$\text{при } c_1 = e^{2\delta_1} > 0: \qquad \varphi_1 = -k_1 \coth(X_1 + \delta), \quad u = \frac{2k_1^2}{\sinh^2(X_1 + \delta_1)}.$$

Вещественное решение получается также, если $k_1 = i\kappa_1$ мнимое, а $c_1 = e^{2i\delta_1}$ лежит на единичной окружности:

$$\varphi_1 = \kappa_1 \tan(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1), \quad u = \frac{2\kappa_1^2}{\cos^2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1)}.$$

Однако, в этом случае в решении всегда есть полюсы.

Пример: $n=2$

Система (9):

$$c_1\psi(k_1)=\psi(-k_1),\quad c_2\psi(k_2)=\psi(-k_2),\quad \psi=e^X(z^2+\varphi_1z+\varphi_2).$$

Это даёт такие уравнения:

$$\begin{aligned}c_1e^{X_1}(k_1^2+\varphi_1k_1+\varphi_2)&=e^{-X_1}(k_1^2-\varphi_1k_1+\varphi_2),\\ c_2e^{X_2}(k_2^2+\varphi_1k_2+\varphi_2)&=e^{-X_2}(k_2^2-\varphi_1k_2+\varphi_2),\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{pmatrix}c_1e^{X_1}-e^{-X_1} & k_1(c_1e^{X_1}+e^{-X_1})\\ c_2e^{X_2}-e^{-X_2} & k_2(c_2e^{X_2}+e^{-X_2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}k_1^2(c_1e^{X_1}-e^{-X_1})\\ k_2^2(c_2e^{X_2}-e^{-X_2})\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_1'\\ y_2 & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}y_1''\\ y_2''\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_1=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_1'' \\ y_2 & y_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}}=-\frac{\Delta'}{\Delta},\quad u=-2(\log\Delta)_{xx},\quad \Delta=W(y_1,y_2).$$

Отметим, что $\Delta\ne0$, так как $k_1^2\ne k_2^2$. Можно найти также φ_2 (хотя для вычисления u это не нужно):

$$\varphi_2=-\frac{\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' \\ y_2'' & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}}=\frac{W(y_1',y_2')}{\Delta}.$$

Заметим, что

$$W(y_1,y_2,e^X)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & e^X \\ y_1' & y_2' & ze^X \\ y_1'' & y_2'' & z^2e^X \end{vmatrix}=e^X(z^2\Delta-z\Delta'+W(y_1',y_2')),$$

откуда следует формула для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\psi(x,t,z)=\frac{W(y_1,y_2,e^X)}{W(y_1,y_2)}.$$

Вронскианная формула

Система (9) при произвольном n:

$$c_j\psi(k_j)=\psi(-k_j),\quad j=1,\dots,n,$$

или, подробнее,

$$c_je^{X_j}(k_j^n+\varphi_1k_j^{n-1}+\dots+\varphi_n)=e^{-X_j}((-k_j)^n+\varphi_1(-k_j)^{n-1}+\dots+\varphi_n).$$

Теорема 3. Пусть $y_j:=c_je^{X_j}-e^{-X_j}$, $X_j:=k_jx+4k_j^3t$, тогда функция

$$u=-2(\log W(y_1,\dots,y_n))_{xx} \tag{10}$$

удовлетворяет уравнению КдФ $u_t=u_{xxx}-6uu_x$ при произвольных параметрах k_j, c_j таких, что k_j^2 попарно различны и не равны 0. Соответствующее уравнение Шрёдингера $\psi_{xx}=(u+z^2)\psi$ допускает точное решение

$$\psi(x,t,z)=\frac{W(y_1,\dots,y_n,e^{zx+4z^3t})}{W(y_1,\dots,y_n)}. \tag{11}$$

Доказательство. Запишем систему (9) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \hdotsfor{4} \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \dots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Определитель $\Delta = W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ в силу предположения, что все k_j^2 различны. Тогда $\varphi_1 = -\Delta'/\Delta$ и по формуле (8) находим u.
Чтобы получить функцию Бейкера–Ахиезера

$$\psi = e^X (z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n),$$

рассмотрим расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \\ \hdotsfor{5} \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \\ e^X & ze^X & \dots & z^{n-1}e^X & z^n e^X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}.$$

По правилу Крамера, $1 = \psi W(y_1, \dots, y_n)/W(y_1, \dots, y_n, e^X)$. ■

Итак, чисто алгебраическим путём, мы получили огромный запас точных решений КдФ, зависящий от $2n$ произвольных параметров k_j, c_j. Попутно, мы получили явное решение уравнения Шрёдингера с соответствующим потенциалом Баргманна, то есть, это пример точно решаемой квантово-механической задачи.

Замечание. Используя формулу $f = \psi_x/\psi$, можно получить из (11) также решение уравнения мКдФ $f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda)f_x$.

Отметим, что параметры могут быть комплексными, вещественность в построениях не использовалась. Случаи, когда решение u вещественно:

1) все параметры вещественны. В этом случае функции y_j можно записать (переобозначая c_j) в виде

$$y_j = \sinh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad y_j = \cosh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j);$$

2) некоторые параметры чисто мнимые, $k_j = i\kappa_j$, а соответствующие c_j лежат на единичной окружности, тогда

$$y_j = \sin(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad y_j = \cos(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j);$$

3) есть пары комплексно-сопряжённых параметров, например, $k_2 = k_1^*$ и $c_2 = c_1^*$ (во вронскиане при комплексном сопряжении только переставятся два столбца).

Однако, оказывается, что решения без полюсов возможны только в случае 1) и при этом ещё необходимо соблюдать некоторые правила выбора c_j.

Теорема 4. Решение (10) вещественно и не имеет особенностей при $x,t\in\mathbb{R}$, если и только если $k_j,c_j\in\mathbb{R}$, все k_j^2 попарно различны и не равны 0, и c_j удовлетворяют правилу чередования знаков

$$c_n\ge 0,\quad -c_{n-1}\ge 0,\ \dots,\ (-1)^{n-j}c_j\ge 0,\ \dots,\ (-1)^{n-1}c_1\ge 0,$$

при выборе нумерации по убыванию k_j^2:

$$k_1^2>k_2^2>\dots>k_n^2>0.$$

Такая нумерация обусловлена тем, что $\lambda_j=-k_j^2$ — собственные значения для оператора Шрёдингера и их всегда принято нумеровать по возрастанию (λ_1 — основное состояние).

Доказательство, в принципе, можно извлечь из явной формулы, но это довольно утомительно. Мы получим этот результат позже из более общих утверждений о спектральных свойствах оператора Шрёдингера.

С учетом этого правила и делая переобозначение $X_j = k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j$, формулу для n-солитонного решения можно записать так:

$$u = -2\partial_x^2 \log W\left(\cosh X_n, \sinh X_{n-1}, \dots, \begin{matrix} \sinh X_1 \\ \cosh X_1 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} \text{при чётном } n, \\ \text{при нечётном } n. \end{matrix}$$

Также напомним, что мы отбросили случай, когда имеются кратные нули k_j или $k_j = 0$. Система (9) становится тогда вырожденной, но это не означает, что исходная система (7) не решается, просто теперь указанных первых интегралов недостаточно и нужно искать дополнительные. Мы пропустим этот класс решений, хотя он достаточно интересен (рациональные и рациональные на солитонном/тригонометрическом фоне). В этом классе все вещественные решения обязательно имеют полюс.

Иллюстрация при $n = 4$

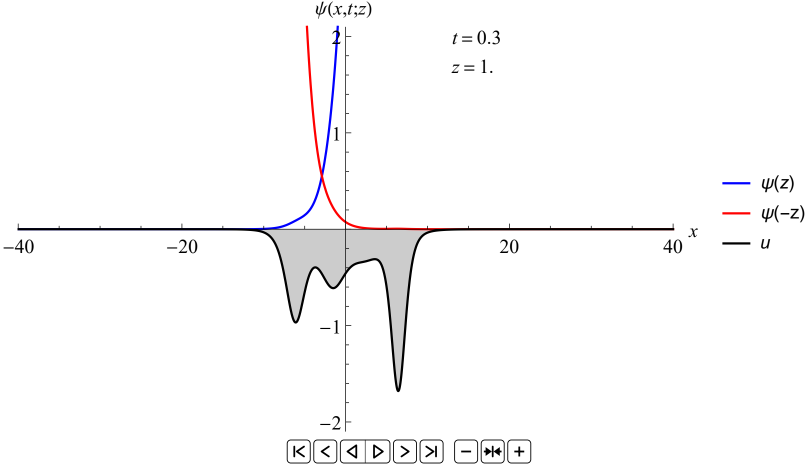
Возьмем конкретные числовые значения (ничем не примечательные)

$$k_1 = 0.95, \quad k_2 = 0.75, \quad k_3 = 0.6, \quad k_4 = 0.35,$$
$$c_j = (-1)^{n-j} e^{2\delta_j}, \quad \delta_1 = -5, \quad \delta_2 = 1.3, \quad \delta_3 = 0.3, \quad \delta_4 = -0.2.$$

Чередование знаков c_j обеспечивает регулярность потенциала и волновых функций.

- Одна из функций $\psi(z)$ и $\psi(-z)$ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$, другая при $x \to -\infty$.
- В точках $\lambda_j = -k_j^2$ эти функции становятся линейно зависимыми (что и написано в (9)) и определяют собственную (ненормированную) функцию оператора Шрёдингера.

Волновые функции при фиксированном t



Нули $\psi(x,z)$ и $\psi(x,-z)$

Обратим внимание на нули $\psi(x,z)$:

- при $z \geq k_1$ функция $\psi(x,z)$ не имеет нулей на оси x;
- при уменьшении z до 0, нули «заходят» в $\psi(x,z)$ через $x=+\infty$, при прохождении z через k_j. При каждом $z \in [k_{j+1},k_j)$, $\psi(x,z)$ имеет j нулей (n при $z \in [0,k_n)$);
- при дальнейшем уменьшении z нули «выходят» через $x=-\infty$, когда z проходит $-k_j$;
- у функции $\psi(x,-z)$ естественно, все наоборот.

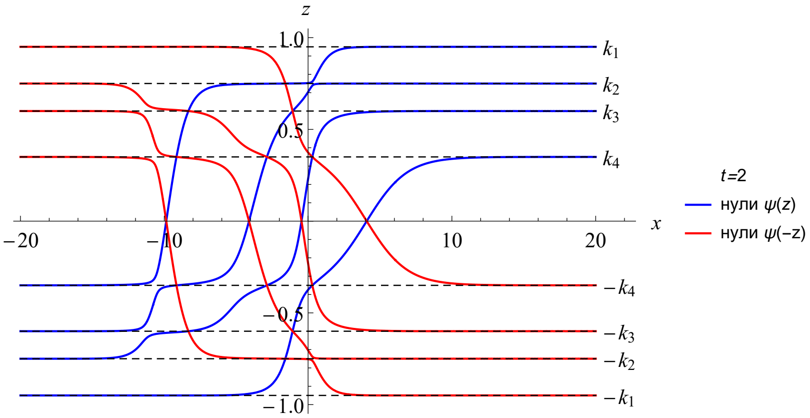
Те же самые нули, как функции от x:

- При каждом фиксированном x функция $\psi(z)$ имеет ровно n нулей по z:

$$\psi(z) = e^X (z-r_1(x))\dots(z-r_n(x)). \tag{12}$$

- При $x \to +\infty$ эти нули расположены по одному в каждом из интервалов (k_{j+1},k_j), $j=1,\dots,n-1$.

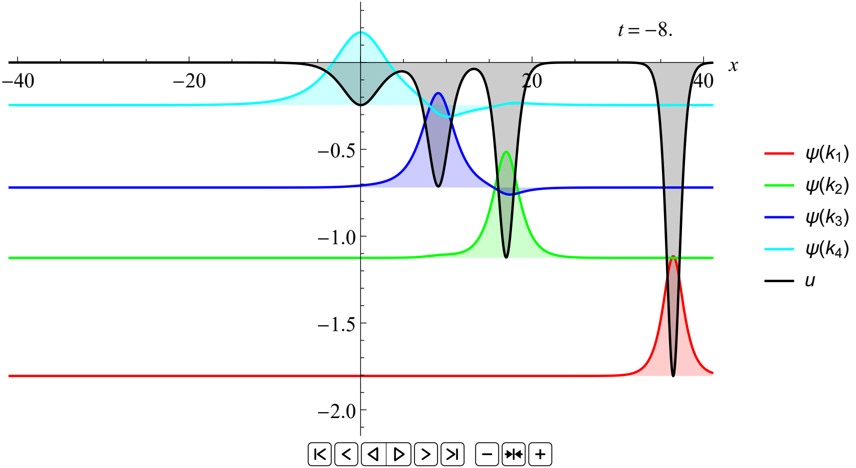
- При уменьшении x функции r_j монотонно убывают и при $x \to -\infty$ перемещаются в интервалы $(-k_j, -k_{j+1})$, обмениваясь местами с нулями $\psi(-z)$.
- Точки x, в которых происходит обмен — это нули собственных функций $\psi(k_j)$.
- За исключением этих точек, в каждом из $2n$ интервалов по z находится один нуль — либо функции $\psi(z)$, либо функции $\psi(-z)$.



Зависимость от t

Ограничимся *собственными* функциями $\psi_j = \psi(k_j, x, t)$. Построим их график при разных t.

- Нормируем функции так, что $||\psi_j||^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi_j^2\, dx = 1$.
- ψ_j имеет $j-1$ нулей по x в любой момент t.
- Собственные функции принято изображать сдвинутыми на соответствующий уровень энергии, то есть, в нашем случае, на $\lambda = -k_j^2$.
  Мы сдвинем на $-2k_j^2$ — это графически более наглядно, так как эти числа отвечают амплитудам солитонов (то есть, максимальной глубине потенциальных ям).
- Когда солитоны достаточно далеко друг от друга, все ψ_j локализованы вблизи своих солитонов.



$t = -8.$
x
−40
−20
20
40
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
$\psi(k_1)$
$\psi(k_2)$
$\psi(k_3)$
$\psi(k_4)$
u

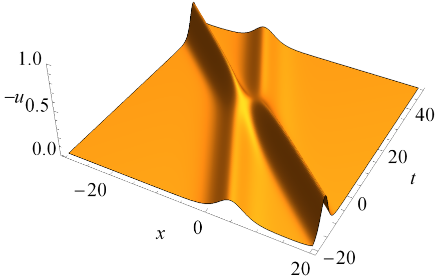
Фазовый сдвиг

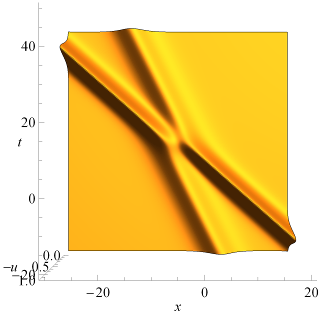
Проанализируем двух-солитонное решение

$$-u = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)(k_1^2 - k_2^2 + k_2^2 \cosh 2X_1 + k_1^2 \cosh 2X_2)}{(k_1 \cosh X_1 \cosh X_2 - k_2 \sinh X_1 \sinh X_2)^2},$$

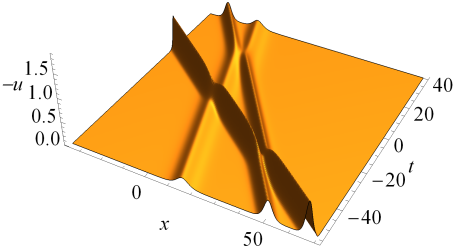
где

$$X_j = k_j x + 4k_j^3 t + d_j, \quad k_1 > k_2 > 0.$$





Можно видеть, что после прохождения друг через друга солитоны восстанавливают форму, подобно решениям линейного волнового уравнения. Однако, кое-что во взаимодействии солитонов происходит не так, как подсказывает линейная интуиция.



Во-первых, в момент столкновения амплитуды солитонов не складываются, как в линейном случае, а усредняются. При всех x, t верна оценка

$$0 < -u(x,t) < 2k_1^2,$$

то есть, решение не превосходит амплитуды самого большого солитона.

Это можно доказать для произвольного n, используя формулу (она легко выводится из формул (6) и (12))

$$-u = 2\sum_{j=1}^{n}(k_j^2 - r_j^2),$$

где r_j — нули многочлена $\Phi(z)$; как было отмечено, в каждом из интервалов $[k_{j+1}^2, k_j^2)$ содержится одно из значений r_s^2.

Во-вторых, после взаимодействия траектории солитонов слегка смещаются, происходит *фазовый сдвиг* (хорошо заметно при виде сверху). Вычислим его для $n=2$. Имеем:

$$\begin{aligned} W &= 4\begin{vmatrix} \cosh X_2 & \sinh X_1 \\ k_2\sinh X_2 & k_1\cosh X_1 \end{vmatrix} \\ &= (k_1-k_2)(e^{X_1+X_2}+e^{-X_1-X_2}) + (k_1+k_2)(e^{X_2-X_1}+e^{X_1-X_2}). \end{aligned}$$

В окрестности прямой $X_1 = k_1x + 4k_1^2t + d_1 = 0$ имеем оценки (помним, что $k_1 > k_2 > 0$, эквивалентность $\sim$ понимается с точностью до множителя):

$$e^{X_1} \sim 1, \qquad e^{X_2} \sim e^{4k_2(k_2^2-k_1^2)t} = \begin{cases} \infty & \text{при } t \to -\infty, \\ 0 & \text{при } t \to +\infty. \end{cases}$$

Отбрасывая убывающие экспоненты, получаем

$$\text{при } t\to-\infty: \quad W \sim (k_1-k_2)e^{X_1+X_2}+(k_1+k_2)e^{X_2-X_1}$$
$$\sim e^{X_2}\Big(e^{X_1}+\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}e^{-X_1}\Big)\sim e^{X_2}\cosh(X_1-\delta_{12}),$$

$$\text{при } t\to+\infty: \quad W \sim (k_1-k_2)e^{-X_1-X_2}+(k_1+k_2)e^{X_1-X_2}$$
$$\sim e^{-X_2}\Big(e^{X_1}+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-X_1}\Big)\sim e^{-X_2}\cosh(X_1+\delta_{12}),$$

где

$$\delta_{12}=\frac{1}{2}\log\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}.$$

Точно так же, рассматривая решение в окрестности прямой $X_2=0$ можно получить сдвиг фазы второго солитона $\delta_{21}=-\delta_{12}$.

При $t=-\infty$ большой солитон движется позади прямой $X_1=0$ со сдвигом $-\delta_{12}/k_1$ вдоль оси x, а малый солитон впереди прямой $X_2=0$ со сдвигом δ_{12}/k_2; при $t=+\infty$ знаки сдвигов меняются, большой солитон забегает вперёд своей прямой, а малый отстаёт от своей.

Аналогично можно найти фазовые сдвиги и в общем случае — рассматривая решение в полосе вдоль прямой $X_j=0$, отбрасывая убывающие экспоненты и упрощая вронскиан. Приведем только ответ. Пусть

$$\delta_{ij}=-\delta_{ji}=\frac{1}{2}\log\frac{k_i+k_j}{k_i-k_j},\quad i<j.$$

Теорема 5. Асимптотически, n-солитонное решение представляет собой сумму солитонов

$$u=\sum_{j=1}^{n}\frac{2k_j^2}{\cosh^2(k_jx+4k_j^3t+d_j\pm\delta_j)},\quad t\to\pm\infty,$$

где фазовый сдвиг равен

$$\delta_j=\sum_{i\neq j}\delta_{ji}=-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\log\frac{k_i+k_j}{k_i-k_j}+\frac{1}{2}\sum_{i>j}\log\frac{k_i+k_j}{k_j-k_i}.$$

Итак, при $t \to -\infty$, решение представляет собой сумму солитонов, упорядоченных слева направо по возрастанию амплитуды и путешествующих со скоростями пропорциональными амплитуде.

После взаимодействия порядок солитонов меняется и при $t \to +\infty$ солитоны располагаются в обратном порядке.

При этом они восстанавливают форму и единственным результатом взаимодействия является фазовый сдвиг.

Общий сдвиг δ_j, который испытывает один солитон, равен сумме сдвигов δ_{ji} при попарном взаимодействии. Эффекты от тройного взаимодействия отсутствуют.

Домашнее задание

3.1. Найдите все первые интегралы для системы ОДУ

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1(-u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n),\\ u_2' &= u_2(\ \ u_1 - u_2 + u_3 + \dots + u_n),\\ &\qquad\cdots\cdots\cdot\\ u_n' &= u_n(\ \ u_1 + u_2 + u_3 + \dots - u_n). \end{aligned}$$

Покажите, что ее интегрирование сводится к одной квадратуре и ответ записывается через гиперэллиптическую функцию. [*Подсказка:* обозначьте сумму u_j отдельной буквой.]

Замечание. Этот пример (восходящий к Ковалевской) никак не связан с солитонами, просто упражнение на тему первых интегралов. Интересных решений у этой системы нет. Однако, чуть более сложные системы с похожей «коллективной» структурой взаимодействия (все поля входят в правую часть через сумму или что-то в этом роде) и сходной схемой решения встречаются в приложениях, см. напр.

S. Watanabe, S.H. Strogatz. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D* **74** (1994) 197–253.