В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 2 · 13 февраля 2023

Представление Лакса для КдФ

План лекции

- Вспомогательные линейные уравнения
- КдФ как условие их совместности
- Представления нулевой кривизны
- Некоторые другие примеры
- Представление Лакса
- Преобразование Миуры
- Вывод законов сохранения для КдФ

Вспомогательные линейные уравнения

Практически всё, что будет изучаться в нашем курсе, основано на представлении нелинейных уравнений в виде условия совместности для линейных уравнений. Поля, входящие в нелинейное уравнение — это просто переменные коэффициенты в линейных уравнениях.
Продемонстрируем вывод уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{1}$$

из условия совместности стационарного одномерного уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi \tag{2}$$

и уравнения вида

$$\psi_t = b\psi + 2a\psi_x \tag{3}$$

(коэффициенты a и b сейчас подберём).

Замечание. По сравнению с предыдущей лекцией, мы изменили в (1) знак $u \to -u$ (то есть, солитон это теперь ямка, а не горбик). Это сделано потому, что в (2) принято писать именно такой знак, при этом u интерпретируется как потенциальная яма для квантовой частицы, а спектральный параметр λ играет роль энергии.

Проверка совместности в данном примере заключается в вычислении смешанной производной ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (3) по x и заменяем ψ_{xx} из (2):

$$\begin{aligned}\psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx}\\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b+2a_x)\psi_x.\end{aligned} \tag{4}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (2) по t:

$$\begin{aligned}\psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_xa + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x\\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b+2a_x)(u-\lambda)\psi\\ &= (b_{xx} + 2u_xa + (u-\lambda)(b+4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + (u-\lambda)a)\psi_x\\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(b\psi + 2a\psi_x).\end{aligned} \tag{5}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_xa. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что это действительно сводится к КдФ, если взять

$$b = u_x, \quad a = -2\lambda - u. \tag{7}$$

Проверка совместности в данном примере заключается в вычислении смешанной производной ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (3) по x и заменяем ψ_{xx} из (2):

$$\begin{aligned} \psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx} \\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b + 2a_x)\psi_x. \end{aligned} \tag{4}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (2) по t:

$$\begin{aligned} \psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_xa + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x \\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b + 2a_x)(u-\lambda)\psi \\ &= (b_{xx} + 2u_xa + (u-\lambda)(\cancel{b} + 4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + (u-\lambda)\cancel{a})\psi_x \\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(\cancel{b}\psi + 2\cancel{a}\psi_x). \end{aligned} \tag{5}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_xa. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что это действительно сводится к КдФ, если взять

$$b = u_x, \quad a = -2\lambda - u. \tag{7}$$

Отступление: что такое совместность?

Пусть дана система ОДУ в некоторой области в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1,\dots,u_n),\\ \qquad \dots\dots\dots \\ u_n' = f_n(u_1,\dots,u_n). \end{cases} \tag{8}$$

Она определяет правило дифференцирования функций от динамических переменных u_j:

$$\frac{d}{dt}a(u_1,\dots,u_n) = f_1\partial_1(a)+\dots+f_n\partial_n(a),$$

где для краткости обозначено $\partial_j=\partial/\partial u_j$.

Таким образом, векторное поле определяемое системой (8) можно отождествить с дифференциальным оператором

$$F=\frac{d}{dt}=f_1\partial_1+\dots+f_n\partial_n.$$

Пусть даны две динамические системы, относительно x и t:

$$\frac{du_j}{dx} = f_j(u_1, \dots, u_n), \quad \frac{du_j}{dt} = g_j(u_1, \dots, u_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

Им отвечают векторные поля

$$F = D_x = f_1\partial_1 + \dots + f_n\partial_n, \quad G = D_t = g_1\partial_1 + \dots + g_n\partial_n.$$

Существует ли, для любого начального условия при $x = t = 0$, совместное решение $\vec{u}(x,t)$ удовлетворяющее обеим системам? Так как частные производные по x и t коммутируют, то на совместном решении должно выполняться равенство

$$[D_x, D_t] = [F, G] = 0.$$

Из произвольности начального условия следует, что оно должно выполняться тождественно. Верно и обратное: если $[F, G] = 0$, то совместное решение определено, по крайней мере локально.

Коммутатор двух векторных полей определяется по общему правилу коммутатора для любых двух операторов:

$$\begin{aligned}[F,G](a) &= F(G(a)) - G(F(a))\\ &= \sum_{i,j}\Big(f_i\partial_i(g_j\partial_j(a)) - g_j\partial_j(f_i\partial_i(a))\Big)\\ &= \sum_{i,j}\Big(f_i\partial_i(g_j)\partial_j(a) - g_j\partial_j(f_i)\partial_i(a)\Big)\\ &= \sum_{i,j}\big(f_i\partial_i(g_j) - g_i\partial_i(f_j)\big)\partial_j(a).\end{aligned}$$

Вторые производные от a сокращаются и в результате $[F,G]$ также оказывается векторным полем. Для его вычисления сначала F применяем покомпонентно к G, потом наоборот, и вычитаем:

$$[F,G] = \sum_j (F(g_j) - G(f_j))\partial_j. \tag{9}$$

Динамические системы с коммутирующими векторными полями называются (инфинитезимальными) *симметриями* друг для друга.

Почему такое название? Симметрия — это преобразование, сохраняющее какой-то объект. В данном случае, сдвиг по интегральным траекториям одной системы сохраняет множество интегральных траекторий другой системы, то есть, решение $u(x,t_0)$ переводится в решение $u(x,t_1)$.

В дальнейшем мы обобщим это и на бесконечномерный случай. Но сейчас пора вернуться к линейным задачам.

Заметим, что уравнения можно рассматривать и неавтономные, просто при этом x и t включаются в число динамических переменных: системам

$$\frac{du_j}{dx}=f_j(x,t,u_1,\dots,u_n),\quad \frac{du_j}{dt}=g_j(x,t,u_1,\dots,u_n),\quad j=1,\dots,n,$$

отвечают векторные поля

$$D_x=\partial_x+f_1\partial_1+\dots+f_n\partial_n,\quad D_t=\partial_t+g_1\partial_1+\dots+g_n\partial_n.$$

Возвращаемся к линейным задачам

Переформулируем наше вычисление на новом языке.

Уравнение (2) легко записать в виде неавтономной динамической системы на переменные ψ и ψ_x. Для нее u — это не динамическая переменная, а просто коэффициент, определяющий зависимость правой части от x и t. В результате получаем векторное поле

$$D_x = \partial_x + \psi_x \frac{\partial}{\partial\psi} + (u-\lambda)\psi \frac{\partial}{\partial\psi_x}.$$

Аналогично, уравнению (3) отвечает векторное поле вида

$$D_t = \partial_t + (b\psi + 2a\psi_x)\frac{\partial}{\partial\psi} + (c\psi + d\psi_x)\frac{\partial}{\partial\psi_x}.$$

Условие совместности

$$[D_x, D_t] = 0,$$

которое эквивалентно двум уравнениям — зануление коэффициентов при $\partial/\partial\psi$ и $\partial/\partial\psi_x$. Из одного уравнения определяются c и d, это даёт правую часть в (4), а второе уравнение даёт (6).

Отметим, что выбор коэффициентов (7) — не единственно возможный. Соотношения (6) можно свести к одному уравнению, исключив b:

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a. \tag{10}$$

В качестве a можно было бы принять произвольную функцию от $u, u_1, u_2, \dots, u_n = \partial_x^n(u)$, что превращает (10) в эволюционное уравнение довольно общего вида.

Однако, здесь выдвигается важное дополнительное требование: это уравнение не должно содержать параметра λ, то есть, он должен тождественно сокращаться в правой части.

Это делает конструкцию жёсткой — коэффициент a должен быть многочленом по λ, и все его коэффициенты (почти) однозначно определяются.

В результате, возникает последовательность «высших» уравнений КдФ, или «иерархия» КдФ. Мы вернёмся к этому на одной из следующих лекций, а пока ограничимся парой примеров, следующих по простоте за КдФ.

Если a — многочлены первой и второй степени по λ, то получаем уравнение КдФ третьего порядка по x и высшее КдФ пятого порядка:

$$
\begin{aligned}
&a = -2\lambda - u && \Rightarrow \quad u_t = u_3 - 6uu_1,\\
&a = 8\lambda^2 + 4u\lambda - u_2 + 3u^2 && \Rightarrow \quad u_t = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1.
\end{aligned}
$$

Уравнения вида

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_n = \partial_x^n(u)$$

называются *эволюционными*.

Также можно взять и отрицательную степень λ, что приводит к уравнению другого типа:

$$a = q\lambda^{-1} \quad \Rightarrow \quad u_t = -4q_x, \quad q_{xxx} = 4uq_x + 2u_xq.$$

Представление нулевой кривизны

Благодаря линейности вспомогательных уравнений, условие совместности можно записать проще, чем равенство нулю коммутатора векторных полей $[F,G]=0$. Рассмотрим линейные уравнения общего вида

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \tag{11}$$

где Ψ — n-мерный вектор, U и V матрицы $n\times n$. Это конечномерные системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Условие их совместности записывается совершенно прозрачно:

$$\begin{aligned}\Psi_{xt} &= U_t\Psi + U\Psi_t = (U_t + UV)\Psi\\ &= V_x\Psi + V\Psi_x = (V_x + VU)\Psi.\end{aligned}$$

Так как Ψ — вектор из независимых переменных, то это равенство равносильно тому, что коэффициент при Ψ тождественно равен 0:

$$U_t - V_x = [V,U]. \tag{12}$$

Определение 1. Нелинейное уравнение в частных производных допускает *представление нулевой кривизны*, если оно эквивалентно уравнению (12), где U и V матрицы подходящей размерности >1, зависящие от динамических переменных (полей) для данного уравнения и спектрального параметра λ.

Уравнение КдФ прекрасно подходит под это определение. Уравнения (2), (3) и (4) для ψ записываются в матричном виде (11), если положить

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_x\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0&1\\ u-\lambda&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}-a_x&2a\\ -a_{xx}+2(u-\lambda)a&a_x\end{pmatrix}\tag{13}$$

(здесь, без потери общности, взяли $b=-a_x$). В частности, самому уравнению КдФ отвечает матрица V с $a=-2\lambda-u$, то есть

$$V=\begin{pmatrix}u_x&-4\lambda-2u\\ u_{xx}+2(\lambda-u)(2\lambda+u)&-u_x\end{pmatrix}.\tag{14}$$

Наши вычисления можно переформулировать так:

Утверждение 1. Уравнение КдФ допускает представление нулевой кривизны (12) с указанными матрицами U и V.

- Требование, чтобы матрицы зависели от λ важно. Нужно, чтобы решение уравнений (11) на ψ-функции имело нетривиальную зависимость от λ, как параметра. В частности, мы будем строить ψ-функции в виде ряда по λ, а МОЗР основан на изучении спектральных свойств уравнений (11) (при каких λ имеются локализованные или ограниченные решения, данные рассеяния и их зависимость от t).

- Следует учитывать *калибровочные преобразования*

$$\Psi = K\tilde{\Psi}, \quad U = K\tilde{U}K^{-1} + D_x(K)K^{-1}, \quad V = K\tilde{V}K^{-1} + D_t(K)K^{-1}, \tag{15}$$

где $K = K[u,\lambda]$ произвольная невырожденная матрица. Матрицы, связанные такой заменой, считаются калибровочно эквивалентными. Требуется, чтобы они не получались из каких-то тривиальных (например, диагональных или без λ).

- Существование нетривиального представления является сильным свойством, которое можно принять за определение интегрируемости. В принципе, есть некоторые алгоритмы, позволяющие для заданного уравнения найти матрицы U, V или доказать, что их не существует. Однако, они довольно сложны и не универсальны, и мы не будем на этом останавливаться.

Пример 1. Пусть $f=f(x,u,u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{F}$ произвольная функция и

$$U=\begin{pmatrix}u & \lambda(u-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}f & \lambda(f+1)\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что уравнение (12) для таких матриц эквивалентно уравнению $u_t=D_x(f)$. Получается, что представление нулевой кривизны есть у произвольного уравнения такого вида? Увы, это обман — то, что называют ‘fake representation’. Матрицы U и V получаются заменой (15) из диагональных матриц:

$$\tilde U=\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \tilde V=\begin{pmatrix}f & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Понятно, что от такого представления никакой пользы нет.

Распознать фальшивые представления по виду матриц может быть не так-то просто.

Другие примеры

Конечно, кроме КдФ есть и другие нетривиальные примеры.

Пример 2. Рассмотрим матрицы вида

$$U=\begin{pmatrix}-\lambda & -v\\ u & \lambda\end{pmatrix},\quad V=2\lambda U+U_1,\quad U_1=\begin{pmatrix}-uv & v_x\\ u_x & uv\end{pmatrix},\tag{16}$$

тогда уравнение (12) оказывается эквивалентным 2-компонентной эволюционной системе

$$u_t=u_{xx}+2u^2v,\quad -v_t=v_{xx}+2uv^2.\tag{17}$$

Это нелинейное уравнение Шрёдингера (система Захарова–Шабата или система Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура). Заметим, что здесь можно выделить несколько вещественных форм. Во-первых, можно считать $u,v\in\mathbb{R}$. Во-вторых, можно сделать замену $t\to it$, после чего появляются редукции $v=\pm u^*$, приводящие к уравнениям

$$-iu_t=u_{xx}\pm 2|u|^2u.\tag{NLS$^\pm$}$$

Как и в случае КдФ, увеличивая степень V по λ, получим системы более высокого порядка. Например, выбор

$$V = 4\lambda^2 U + 2\lambda U_1 + U_2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & -v_{xx} - 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & u_x v - uv_x \end{pmatrix}, \tag{18}$$

приводит к системе

$$u_t = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_t = v_{xxx} + 6uvv_x. \tag{19}$$

Здесь возможны редукции $v = \pm u$, приводящие к мКдФ$^{\pm}$

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2 u_x.$$

Также можно положить $v = 1$, в результате опять получится КдФ.

Пример 3. Пусть

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (12) эквивалентно уравнению sin-Гордон

$$u_{xt} = \sin u. \tag{20}$$

При выборе

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u \\ \sinh u & -\cosh u \end{pmatrix}$$

получается уравнение sinh-Гордон

$$u_{xt} = \sinh u. \tag{21}$$

Матрицы U здесь фактически те же, что и в (16), с точностью до скейлинга и замены $u \to u_x$, $v \to \pm u_x$. Как и в случае мКдФ$^\pm$, НШ$^\pm$, уравнения (20) и (21) эквивалентны, если считать переменную u комплексной, но их вещественные решения друг к другу не сводятся.

Представление Лакса

Определение 2. Нелинейное уравнение в частных производных допускает представление Лакса, если оно эквивалентно уравнению

$$L_t = [A, L], \tag{22}$$

где A и L — некоторые дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от динамических переменных для данного уравнения.

Очевидно, представление нулевой кривизны $U_t = V_x + [V, U]$ переписывается в такой форме, если взять

$$L = D_x - U, \quad A = V.$$

Но, в случае КдФ, можно сделать и по другому.

Перепишем линейные уравнения для ψ в операторном виде. Заметим, что уравнение для ψ_t не содержит производных ψ по x выше первого порядка, поскольку они исключены в силу уравнения Шрёдингера (2). Но, вместо исключения производных можно избавляться от параметра λ. Продифференцируем (2) по x и сократим в (3) член с $\lambda\psi_x$, тогда наши линейные уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi.$$

Это можно записать как

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = A\psi, \tag{23}$$

где L это оператор Шрёдингера, а A оператор третьего порядка:

$$L = -D_x^2 + u, \quad A = 4D_x^3 - 6uD_x - 3u_x. \tag{24}$$

Тогда условие совместности записывается так:

$$(L_t + LA)\psi = \lambda A\psi = AL\psi \quad \Rightarrow \quad L_t = [A, L].$$

Это представление с операторами (24) было выведено Лаксом в 1968.

Отступление: дифференциальные операторы

Поясним, что ДО состоят не только из дифференцирований, но и из умножений на функции: если $L=-D_x^2+u$, то $L\psi=-\psi_{xx}+u\psi$.

Произведение ДО определяется правилом композиции:

$$(AB)(f)=A(B(f)).$$

Отсюда, в частности, следует правило Лейбница для перестановки $D=D_x$ и оператора умножения на a:

$$(Da)(b)=D(ab)=aD(b)+D(a)b \quad\Rightarrow\quad Da=aD+D(a).$$

По индукции можно доказать также формулу

$$D^na=aD^n+\binom{n}{1}D(a)D^{n-1}+\dots+\binom{n}{n-1}D^{n-1}(a)D+D^n(a),$$

где $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (ясно, что это просто формула для $D^n(ab)$).

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(uD^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4uD^3 \\
&\qquad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L=-D^2+u,\quad A=4D^3-6uD-3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t,L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t=u_t&=[4D^3-6uD-3u_x,-D^2+u]\\
&=4D^3u-4uD^3+6uD^3-6D^2uD\\
&\qquad-6uDu+6u^2D+3u_xD^2-3D^2u_x\\
&=4(\cancel{u}D^3+3u_xD^2+3u_{xx}D+u_{xxx})-4\cancel{u}D^3\\
&\qquad+6\cancel{u}D^3-6(\cancel{u}D^2+2u_xD+u_{xx})D\\
&\qquad-6u(uD+u_x)+6u^2D\\
&\qquad+3u_xD^2-3(u_xD^2+2u_{xx}D+u_{xxx})\\
&=u_{xxx}-6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u^2}D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u]\\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD\\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x\\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3\cancel{u_x}D^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3\\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2\cancel{u_x}D + u_{xx})D\\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D\\
&\qquad + 3\cancel{u_x}D^2 - 3(\cancel{u_x}D^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx})\\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3\cancel{u}_xD^2 + 3\cancel{u}_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2\cancel{u}_xD + \cancel{u}_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2\cancel{u}_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Исторически, введённые выше понятия появились в такой последовательности:

в 1967 было показано, что уравнение КдФ служит условием совместности пары линейных уравнений (Гарднер, Грин, Краскал, Миура);

в 1968 было введено представление Лакса для КдФ, в дифференциальных операторах;

общее определение матричного представления нулевой кривизны появилось в 1971 (Захаров, Шабат).

Завершим лекцию рассказом о преобразовании Миуры (1968) и законах сохранения для КдФ.

Законы сохранения

Пусть дано эволюционное уравнение

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_n = \partial_x^n(u) \tag{25}$$

По аналогии с ОДУ, можно было бы принять определение первых интегралов, как таких функций $I[u]$, что $D_t(I) = 0$. Но, легко видеть, что для (26) таких функций не бывает, так как если u_k — старшая переменная, от которой зависит I, то в $D_t(I) = \nabla_f(I)$ имеется член $\partial_k(I)D^k(f)$, в который входит переменная u_{n+k} (n — порядок f) и она ни с чем не сокращается. Поэтому приходится рассматривать немного более сложное понятие.

Пусть $\mathcal{F}$ — множество гладких функций $f(u, u_1, \dots, u_k)$ от произвольного, но конечного числа динамических переменных u_j.

Определение 3. Законом сохранения называется пара функций $\rho, \sigma \in \mathcal{F}$ такая, что

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma).$$

Функция ρ называется плотностью, σ — током.

Если ρ — плотность закона сохранения, и граничные условия обеспечивают сокращение (например, благодаря быстроубыванию), то сохраняется интеграл от плотности:

$$\partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_t(\rho)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_x(\sigma)\, dx = \sigma\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Это и есть аналог первого интеграла для ОДУ, но, отличие в том, что это не функция от динамических переменных, а функционал, то есть нелокальный объект.

По произвольной функции $r \in \mathcal{F}$ можно построить закон сохранения с $\rho = D_x(r)$ и $\sigma = D_t(r)$, но это неинтересно и такие законы сохранения считаются тривиальными. Плотности, отличающиеся на полную производную от x называются эквивалентными:

$$\rho \sim \tilde{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \rho - \tilde{\rho} \in \operatorname{Im} D_x.$$

Функционалы, отвечающие эквивалентным плотностям совпадают (опять таки, при правильных граничных условиях):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho + D_x(a))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx.$$

В отличие от ОДУ, у которых всегда существуют первые интегралы (хотя их не всегда удаётся найти), у уравнений в частных производных законов сохранения обычно нет или есть всего несколько штук. Но, оказывается, что для уравнения КдФ их бесконечно много. Такое свойство служит достаточно характерным признаком интегрируемости.

Вот несколько первых законов сохранения

$$
\begin{aligned}
&D_t(u) = D_x(u_2 - 3u^2),\\
&D_t(u^2) = D_x(2uu_2 - u_1^2 - 4u^3),\\
&D_t(u_1^2 + 2u^3) = D_x(2u_1u_3 - u_2^2 + 6u^2u_2 - 12uu_1^2 - 9u^4),\\
&D_t(u_2^2 + 10uu_1^2 + 5u^4) = D_x(2u_2u_4 - u_3^2 + 20uu_1u_3 - 16uu_2^2\\
&\qquad\qquad - 10u_1^2u_2 + 20u^3u_2 - 90u^2u_1^2 - 24u^5),\\
&\qquad\qquad \dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Сейчас мы докажем, что эту последовательность можно неограниченно продолжить.

Преобразование Миуры

Мы проверили, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{26}$$

служит условием совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - 2(2\lambda + u)\psi_x. \tag{27}$$

Сделаем замену $\psi_x/\psi = f$. Тогда первое уравнение превратится в уравнение Риккати

$$f_x + f^2 = u - \lambda. \tag{28}$$

Второе уравнение даст

$$\begin{aligned}\psi_t/\psi = u_x - 2(2\lambda + u)f &= f_{xx} + 2ff_x - 2(3\lambda + f_x + f^2)f\\ &= f_{xx} - 2(3\lambda + f^2)f.\end{aligned}$$

Дифференцируем по x и получаем модифицированное уравнение КдФ (со знаком $-$)

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda)f_x. \tag{29}$$

Итак, если u удовлетворяет КдФ, то уравнения на ψ-функции (27) имеют совместное решение, и по нему строится функция $f = \psi_x/\psi$, удовлетворяющая мКдФ. Подстановка в обратную сторону еще проще.

Утверждение 2. (Миура, 1968) Пусть f удовлетворяет мКдФ (29), тогда $u = f_x + f^2 + \lambda$ удовлетворяет КдФ (26).

Прямая проверка:

$$\begin{aligned}
u &= f_x + f^2 + \lambda,\\
u_x &= f_{xx} + 2ff_x,\\
u_{xx} &= f_{xxx} + 2ff_{xx} + 2f_x^2,\\
u_{xxx} &= f_{xxxx} + 2ff_{xxx} + 6f_xf_{xx},\\
u_t &= f_{xt} + 2ff_t\\
&= f_{xxxx} - 6(f^2+\lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 + 2f(f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x)\\
&= u_{xxx} - 6f_xf_{xx} - 6(f^2+\lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 - 12f(f^2+\lambda)f_x\\
&= u_{xxx} - 6(f_x + f^2 + \lambda)(f_{xx} + 2ff_x)\\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Обращение преобразования Миуры

Обозначим $z^2=-4\lambda$ и построим *формальное* решение уравнения Риккати

$$f_x+f^2=u+z^2/4 \tag{30}$$

в виде ряда

$$f(z)=-z/2+F_0+\frac{F_1}{z}+\frac{F_2}{z^2}+\cdots. \tag{31}$$

При подстановке в (30) члены с z^2 сокращаются, коэффициент при z^1 даёт $F_0=0$, а из остальных коэффициентов следуют рекуррентные соотношения

$$F_1=-u,\qquad F_{n+1}=D_x(F_n)+\sum_{s=1}^{n-1}F_sF_{n-s},\quad n=1,2,\dots. \tag{32}$$

Отсюда все F_n однозначно находятся в виде дифференциальных многочленов от u.

Вот несколько первых коэффициентов (скобки просто группируют члены одинаковой степени):

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -u,\\
F_2 &= -u_1,\\
F_3 &= -u_2 + u^2,\\
F_4 &= -u_3 + 4uu_1,\\
F_5 &= -u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) - 2u^3,\\
F_6 &= -u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) - 16u^2u_1,\\
F_7 &= -u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) - (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4.
\end{aligned}
$$

Рекуррентные соотношения (32) порождают последовательность плотностей для уравнения КдФ (ясно, что их можно немного упростить по модулю $\operatorname{Im} D_x$, в частности, можно выкинуть старшие производные). Точнее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. 1) Все коэффициенты в разложении (31) являются плотностями законов сохранения для КдФ; 2) все плотности с чётными номерами тривиальны; 3) все плотности с нечётными номерами нетривиальны и друг другу не эквивалентны.

Доказательство. 1) Заметим, что f является плотностью простейшего закона сохранения для уравнения мКдФ (так как правая часть мКдФ есть полная производная по x). При подстановке ряда (31) в мКдФ, равенство выполняется тождественно по параметру z, следовательно все коэффициенты этого ряда являются плотностями законов сохранения, но уже для уравнения КдФ, поскольку они выражены через переменную u.

2) Заметим, что ряд $\tilde{f} = f(-z)$ удовлетворяет тому же уравнению Риккати:

$$f_x + f^2 = u + z^2/4, \quad \tilde{f}_x + \tilde{f}^2 = u + z^2/4.$$

Отсюда следует

$$f_x - \tilde{f}_x = \tilde{f}^2 - f^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} + f = \frac{2F_2}{z^2} + \frac{2F_4}{z^4} + \cdots = -D_x(\log(f - \tilde{f})).$$

Раскладывая $\log(f - \tilde{f})$ по z, получаем, что все F_{2k} — полные производные.

3) Каждую плотность можно разбить на группы мономов по степеням. Проследим только за членами вида u^k, полагая $u_n = 0$ при $n > 0$. Это превращает (32) в алгебраическое рекуррентное соотношение

$$F_1 = -u, \quad F_{n+1} = \sum_{s=1}^{n-1} F_s F_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

решение которого имеет вид $F_{2k} = 0$, $F_{2k-1} = c_k(-u)^k$, где c_k — числа $1, 1, 2, 5, 14, 24, \dots$. Поменяв знак u, легко видеть, что это возрастающая последовательность (на самом деле, это числа Каталана $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$).

Следовательно, все F_{2k-1} содержат член u^k с ненулевым коэффициентом. Отсюда следует, что $F_{2k-1} \notin \operatorname{Im} D_x$, так как член u^k не может возникнуть при дифференцировании.

Так как степени разные, это доказывает и неэквивалентность разных плотностей.

Домашнее задание

2.1. Покажите, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x = 3u_{yy} \tag{33}$$

служит условием совместности $\psi_{yt} = \psi_{ty}$ для линейных уравнений вида

$$\psi_y = \psi_{xx} - u\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x + v\psi. \tag{34}$$

(Получите систему на коэффициенты u, v и исключите в ней v.)

Замечание. Обратите внимание на отличия уравнений (34) от примеров на лекции. Во-первых, параметра λ нет. Во-вторых, относительно ψ это не ОДУ, а эволюционные уравнения, поэтому ψ, ψ_x, $\psi_{xx}, \ldots$ являются динамическими переменными. Их бесконечно много, поэтому они и заменяют, в какаом-то смысле, степени λ в одномерных спектральных задачах.

2.2. Решения уравнения (33), не зависящие от y, удовлетворяют продифференцированному КдФ

$$(u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x + a(t).$$

Покажите, что это уравнение сводится к обычному КдФ с $a(t) = 0$, при помощи замены вида $\tilde{u}(x,t) = u(x + b(t), t) + c(t)$ с подходящими b и c. Для таких решений зависимость ψ от y можно отделить, положив $\psi(x,y,t) = e^{-\lambda y}\psi(x,t)$. Покажите, что при этом уравнения (34) сводятся к уже известным нам линейным задачам для КдФ.

2.3. Аналогично, решения уравнения (33), не зависящие от t, удовлетворяют уравнению Буссинеска

$$3u_{yy} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 0.$$

Введите спектральный параметр, полагая $\psi(x,y,t) = e^{\lambda t}\psi(x,y)$ и выведите из (34) представление нулевой кривизны для этого уравнения (в матрицах 3×3, в отличие от КдФ).

2.4. Для КдФ мы получили два представления нулевой кривизны: одно с матрицами (13), (14), другое с матрицами (16), (18), в которых нужно подставить $v=-1$. Покажите, что эти представления калибровочно эквивалентны (возможно, кроме подбора матрицы K нужно ещё преобразовать λ).

2.5. Примеры дифференциальных подстановок, более простых по сравнению с преобразованием Миуры. Проверьте, что уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

получается подстановкой $u = v_x/v$ *из* линейного уравнения $v_t = v_{xx}$ (подстановка Коула–Хопфа).

Аналогично, проверьте, что уравнение

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x}$$

допускает подстановку $v = \sqrt{u_x}$ *в* линейное уравнение $v_t = v_{xxx}$.

2.6. Покажите, что первые три закона сохранения для КдФ обобщаются для уравнения вида

$$u_t = u_{xxx} + f(u)u_x$$

с произвольной гладкой функцией $f(u)$. Точнее, найдите функции $g(u)$ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{F}$ такие, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} D_t(u) &= D_x(\sigma_1), \\ D_t(u^2) &= D_x(\sigma_2), \\ D_t(u_1^2 + g(u)) &= D_x(\sigma_3). \end{aligned}$$

[*Подсказка:* при вычислении σ_j приходится использовать первообразные от $f(u)$, поэтому удобно обозначить $f(u) = F''(u)$.]

Замечание. Можно показать, что уже на следующей плотности возникают ограничения на f. Она и последующие плотности существуют, только если f многочлен не выше второй степени (то есть, случай КдФ или мКдФ).