

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 1 · 6 февраля 2023

Введение

План лекции

- Содержание курса
- Исторический обзор
- Уравнение Кортевега–де Фриза. Солитон
- Численный счёт (схема Забуски–Краскала)
- Взаимодействие солитонов
- Модель box-ball

Организационные вопросы

- как зовут лектора: Всеволод Эдуардович Адлер, место работы — ИТФ
- куда отправлять решения задач: `adler@itp.ac.ru`
- дедлайн: 2 недели
- дополнительные материалы (конспекты, видео):
<http://matphys.itp.ac.ru/lectures/lectures.html>
- чем все это кончится: дифференцированный зачет в районе 20 мая

Примерное содержание курса

- 1 Введение. Солитон КдФ. Разностная схема Забуски–Краскала. Многосолитонные решения численно.
- 2 Некоторые определения. Векторные поля, дифференциальные и разностные операторы, первые интегралы, законы сохранения, вариационная производная, скобки Пуассона, классические и обобщенные симметрии.
- 3 Представление Лакса для КдФ. Стационарное уравнение Шрёдингера и КдФ как его деформация. Преобразование Миуры, мКдФ. Бесконечная серия законов сохранения.
- 4 Линеаризуемые уравнения. Уравнения Бюргерса и Лиувилля, цепочки Вольтерры и Тоды с открытыми концами. Представления решений через определители.
- 5 Другие примеры. Представления нулевой кривизны. НУШ, синус-Гордон, цепочки Тоды и Вольтерры, разностные уравнения.
- 6 Потенциалы Баргманна. Обрыв ряда для функции Бейкера–Ахиезера. Вывод многосолитонного решения КдФ, вронскианная формула. Фазовый сдвиг.

- 7 Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Прямая задача. Спектральные свойства уравнения Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом. Данные рассеяния, их эволюция.
- 8 Обратная задача рассеяния для КдФ. Ее сведение к системе сингулярных интегральных уравнений.
- 9 Обобщённые симметрии, оператор рекурсии, иерархия КдФ. Локальность и коммутативность потоков.
- 10 Конечнзонные решения КдФ. Выражение 1-зонного решения через функции Якоби. Уравнения Дубровина.
- 11 Преобразования Бэклунда, одевающая цепочка. Принцип суперпозиции ПБ. Второй способ вывода многосолитонного решения КдФ.
- 12 Метод факторизации в квантовой механике. Некоторые примеры одномерных операторов Шрёдингера с точным спектром.
- 13 Автономные решения и уравнения Пенлеве

- В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
- М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

Исторический обзор

- (1834) Дж.С. Рассел: solitary wave of translation (гидродинамика)
- (1855) Лиувиль: уравнение $u_{xy} = e^u$ (УЧП)
- (1862) Боур: уравнение синус-Гордона $u_{xy} = \sin u$ (геометрия)
- (1872) Буссинеск: уравнение $u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0$ (гидродинамика)
- (1882) Дарбу: преобразование Дарбу для линейных уравнений (ОДУ)
- (1883) Бэклунд: преобразование Бэклунда для сГ (геометрия)
- (1888) Ковалевская: третий случай интегрируемости вращающегося твердого тела с закрепленной точкой (ОДУ)
- (1892) Бьянки: свойство перестановочности ПБ (геометрия)
- (1893) Лаплас: 2D цепочка Тоды $u_{n,xy} = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}}$ (УЧП)
- (1895) Кортевег, де Фриз: уравнение $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ (гидродинамика)

- (1905) Пенлеве, Гамбье и др.: классификация уравнений без критических подвижных точек (ОДУ)
- (1928) Бёрчнэл, Чонди: теория коммутирующих дифф. операторов (ОДУ)
- (1940) Шрёдингер: метод факторизации (квантовая механика)
- (1948) Бюргерс, Хопф, Коул: уравнение $u_t = u_{xx} + 2uu_x$
(гидродинамика)
- (1949) Баргманн: безотражательные потенциалы (квантовая механика)
- (1951) Гельфанд, Левитан, Марченко: обратная задача рассеяния
(квантовая механика)
- (1955) Ферми, Паста, Улам, Тсингоу: явление возвращаемости в нелинейных моделях (теория эргодичности)

(1965) Забуски, Крaskал: концепция солитона

(1967) Гарднер, Грин, Крaskал, Миура: решение КдФ методом обратной задачи рассеяния

(1967) Тода: цепочка $u_n'' = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}}$

(1968) Лакс: представление КдФ на языке дифф. операторов

(1970) Кадомцев, Петвиашвили, Дрюма: $(u_t - u_{xxx} - 6uu_x)_x = \pm 3u_{yy}$

(1971) Захаров, Шабат, Абловиц, Кауп, Ньюэлл, Сигур:

НУШ $iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2u$ и родственные уравнения

(1973) Гуревич, Питаевский: задачи о распаде решений с нестандартными гранич. условиями

(1974) Манаков, Кац, ван Мёрбеке: цепочка Вольтерры

$$u_n' = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

(1974) Новиков, Дубровин: конечнозонные (квазипериодические) решения

(1979) Фаддеев, Склянин, Тахтаджян: квантовый метод обратной задачи

...

и так далее. Больше уравнений, решений, методов и приложений

Уравнение КдФ

Уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

описывает отклонение u поверхности воды от нулевого уровня в одномерном канале постоянной глубины h . Предполагается, что $u \ll h$, а длины волн $L \gg h$. Вывод из уравнений гидродинамики можно посмотреть в [Ньюэлл]. Все коэффициенты в (1) обезразмерены, число 6 введено для удобства (можно расставить любые коэффициенты, растягивая u , x или t).

Полезно помнить, что член uu_x описывает нелинейное взаимодействие волн. В уравнении Хопфа $u_t = uu_x$ он приводит к *опрокидыванию*.

В уравнении Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$ опрокидывание подавляется членом u_{xx} , отвечающим *диссипации* волн (затухание).

А в КдФ добавляется u_{xxx} , отвечающий *дисперсии* (расползание). Он также подавляет опрокидывание.

Пример. Уравнение Хопфа

Решим уравнение Хопфа

$$u_t - uu_x = 0 \quad (2)$$

методом характеристик. По коэффициентам уравнения выписываем характеристическую систему

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

(или, равносильно, $t' = 1$, $x' = -u$, $u' = 0$, где штрих — производная по вспомогательной переменной) и ищем её первые интегралы. В этом примере они легко находятся:

$$J_1 = u, \quad J_2 = x + ut.$$

Решение $u(x, t)$ определяется неявно из уравнения $F(J_1, J_2) = 0$, где F произвольная функция. Это можно заменить на уравнение

$$u = a(x + ut) \quad (3)$$

с произвольной функцией a . (Проверьте подстановкой в (2), вычисляя u_x , u_t как производные неявной функции).

Ответ (3) кажется идиотским (как решить такое уравнение при произвольной функции a ?), но его геометрический смысл вполне нагляден. При $t = 0$ имеем $u(x, 0) = a(x)$, то есть, функция a задаёт профиль u в начальный момент $t = 0$.

При любом t , точки графика u , лежащие на фиксированной высоте $u = u_0$, определяются уравнением $a(x + u_0 t) = u_0$. То есть, они получаются из начальных точек параллельным переносом вдоль оси x на расстояние $-u_0 t$. Более высокие точки едут быстрее. В результате, график просто испытывает преобразование косого сдвига. В некоторый момент неизбежно наступает опрокидывание.

Солитон КдФ

Вернёмся к КдФ. Солитон определяется, как быстроубывающее решение в виде бегущей волны:

$$u(x, t) = y(x - ct), \quad y, y', y'', \dots \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Подстановка в (1) дает ОДУ на $y = y(z)$:

$$-cy' = y''' + 6yy'.$$

Интегрируем, получаем

$$y'' + 3y^2 + cy + c_1 = 0.$$

Умножаем на $2y'$ и интегрируем еще раз:

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 + 2c_1y + c_2 = 0.$$

В принципе, это уравнение вида $y' = F(y)$, то есть, с разделяющимися переменными. Оно интегрируется в квадратурах:

$$z = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{-2y^3 - cy^2 - 2c_1y - c_2}}.$$

При произвольных постоянных это так называемый эллиптический интеграл, в элементарных функциях не берется. Кроме того, эта формула даёт не $y(z)$, а $z(y)$. Задача обращения эллиптического интеграла приводит к эллиптическим функциям (Якоби или Вейерштрасса). Мы к ним вернемся, когда будем изучать периодические решения КдФ.

Но, сейчас нам нужен не общий случай, а специальный. Мы забыли про условие быстроубывания. Оно тут же фиксирует константы $c_1 = c_2 = 0$, в результате получаем более простое уравнение

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 = 0.$$

Оно решается в элементарных функциях (эллиптический интеграл сводится к интегрируемому случаю дифференциального бинома, подстановки Эйлера).

Проще всего сделать такие манипуляции:

$$\begin{aligned} y = 2v^{-2} &\Rightarrow y' = -4v^{-3}v' \Rightarrow \\ 16v^{-6}(v')^2 + 16v^{-6} + 4cv^{-4} &= 0 \Rightarrow \\ 4(v')^2 + cv^2 &= -4. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что должно быть $c < 0$. Положим $c = -4k^2$, тогда имеем

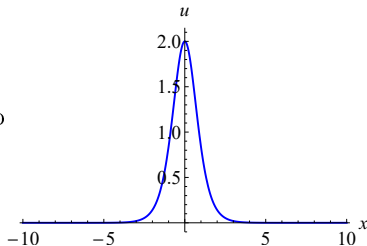
$$k^2 v^2 - (v')^2 = 1.$$

Очевидно, этому уравнению удовлетворяют гиперболические функции $v = k^{-1} \cosh(kz + \delta)$. Собирая все вместе, получаем пресловутый солитон:

$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(kx + 4k^3t + \delta)}. \quad (4)$$

Это решение было известно еще Расселлу (хотя он не знал уравнения КдФ).

Все что мы пока видим из формулы (4), это что скорость солитона с параметром k равна $4k^2$ и совпадает с удвоенной амплитудой. То есть, чем выше солитон, тем быстрее он бежит.



Интересные решения в виде бегущей волны есть у многих уравнений (хотя они не всегда бывают быстроубывающими, например, кинки выходят на разные постоянные при $x \rightarrow \pm\infty$).

Более продвинутое свойство, указывающее на интегрируемость, заключается в существовании у КдФ *многосолитонных* решений. Их вывод будет одной из наших целей на последующих лекциях.

А пока обратимся к численному счету, который позволит посмотреть, как эти решения устроены.

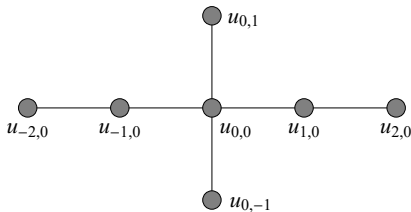
Разностная схема Забуски–Краскала

Рассмотрим дискретизацию уравнения КдФ (1) предложенную в работе

[ZK] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* **15:6** (1965) 240–243.

(В этой статье и был введён термин *солитон*, как сокращение от *solitary wave pulse* — импульс в виде уединённой волны, или от *solitary wave of translation* — уединённая волна переноса.)

Эта дискретизация имеет вид разностного уравнения на функцию $u_{n,m}$ с таким шаблоном (для краткости, n и m в индексах пропущены):



А именно,

$$\begin{aligned} u_{0,1} - u_{0,-1} = & a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) \\ & + 2ah^2(u_{1,0} + u_{0,0} + u_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}). \end{aligned} \quad (5)$$

Утверждение 1

Уравнение (5) аппроксимирует КдФ с шагом h по x и ah^3 по t :

$$u_{n,m} \sim u(x, t), \quad x = nh, \quad t = amh^3.$$

Доказательство. Подставляем в (5) разложения в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} u_{n+j,m} & \sim u(x + jh, t) = u + jhu_x + \frac{1}{2}j^2h^2u_{xx} + \frac{1}{6}j^3h^3u_{xxx} + O(h^4), \\ u_{n,m+j} & \sim u(x, t + ajh^3) = u + ajh^3u_t + O(h^6). \end{aligned}$$

Члены с h^0 , h^1 , h^2 сокращаются, а при h^3 получается равенство

$$2ah^3(u_t - u_{xxx} - 6uu_x) + O(h^5) = 0. \quad \blacksquare$$

Возьмём в качестве начального условия $u(x, 0)$ сумму трех солитонов вида (4) с разными k и δ (нужны два слоя решётки при $t = 0$ и $t = ah^3$).

Выберем δ так, чтобы солитоны были далеко друг от друга, тогда это начальное условие мало отличается от точного 3-солитонного решения и дальше оно эволюционирует почти как 3-солитонное решение. Но, в моменты столкновения это уже вовсе не сумма трех солитонов!

Ещё одно упрощение — периодическая сетка: $u_{n+N,m} = u_{n,m}$, где $N = (x_{\max} - x_{\min})/h$. Этот распространённый трюк позволяет избежать граничных эффектов. Правда, настоящие солитоны не периодические, но на большом интервале отличия почти нет.

$k = 0.7, 0.85$ и 1 ; параметры сетки: $h = 0.1, a = 0.1$

Параметр h должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить хорошее приближение начального профиля по x . Параметр a отвечает за устойчивость разностной схемы и также не может быть большим, иначе решение пойдёт вразнос. Это зависит от крутизны начальных условий, так что параметр приходится подбирать опытным путём.

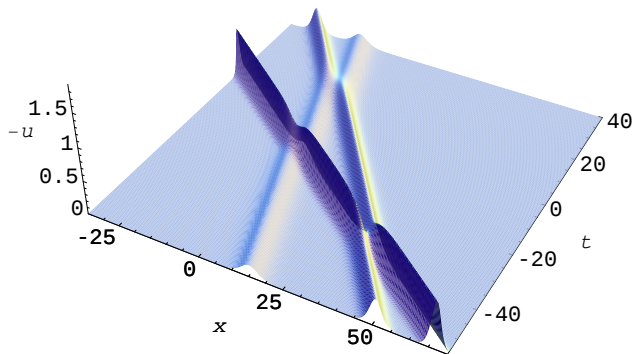


График 3-солитонного решения, как функции от x и t

Воспроизведем решение из [ZK]. Там рассматривался распад синусоидальной волны на 8 отдельных пиков. Поскольку решение периодическое, они не могут разойтись и вынуждены вечно проходить друг через друга. Тем не менее, индивидуальность пиков неплохо прослеживается и Забуски и Крaskалу этого было достаточно, чтобы говорить о солитонах.

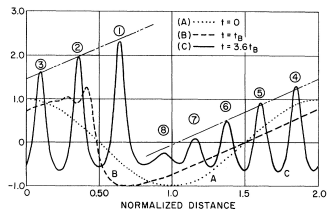
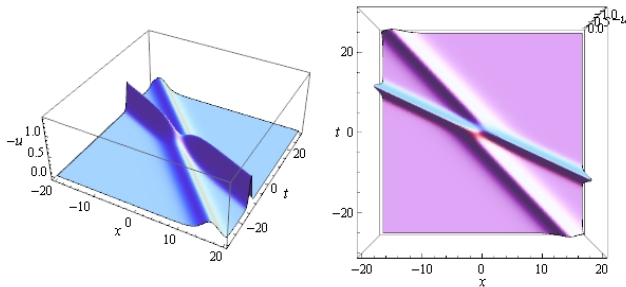


FIG. 1. The temporal development of the wave form $u(x)$.

Начальное условие $u = \cos 0.15x$; $N = 400$, $a = 0.005$. Справа — график из [ZK], на нем ось x перевёрнута и масштабирована. Он примерно отвечает моменту $t = 3.6$ на анимации слева.

Как устроено многосолитонное решение КдФ

- При $t \rightarrow -\infty$ это сумма изолированных солитонов, расположенных слева направо по возрастанию. Амплитуды у всех разные.
- Все они бегут налево, причем чем больше амплитуда, тем больше скорость.
- При конечных t происходят столкновения. При этом, в отличие от линейных волн, амплитуды не складываются. Наоборот, солитоны слегка расползаются и как бы приседают. В любой момент времени максимум решения не превосходит амплитуды наибольшего солитона.
- Площадь под графиком (масса) сохраняется в любой момент времени. Есть и другие сохраняющиеся величины.
- После столкновения солитоны полностью восстанавливают форму, размер и скорость (упругое столкновение).
- Однако, они немного смещаются (фазовый сдвиг). Более быстрый солитон проскакивает вперед, медленный — притормаживает. Величина сдвига есть функция от амплитуд двух сталкивающихся солитонов.



- При $t \rightarrow +\infty$ опять имеем сумму изолированных солитонов, расположенных слева направо по убыванию.
- Итоговый фазовый сдвиг для каждого солитона равен сумме фазовых сдвигов при попарных столкновениях. Он не зависит от порядка столкновений. Даже если в какой-то момент несколько солитонов попадают в одну точку, сдвиги будут такими же, как если бы они сталкивались по очереди.
- Решение задачи Коши с общими быстроубывающими начальными данными представляет собой многосолитонное решение с мелкой рябью на его фоне.

Эти свойства характерны для многих интегрируемых уравнений, с вариациями и усложнениями. Например, в системах с несколькими полями солитоны могут определяться не двумя параметрами k, δ , а большим числом. При столкновениях эти параметры могут как-то преобразовываться. Может даже происходить распад и слияние солитонов, по определенным правилам.

Кроме солитонов, встречаются и другие типы точных решений — кинки (разные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$), солитоны огибающей (то есть, солитоны в виде осциллирующих волновых пакетов), бризеры (пульсирующие солитоны) и еще более экзотические решения (в КдФ этого нет).

Важное свойство интегрируемых уравнений — они допускают точные решения, составленные из *произвольного* числа элементарных решений.

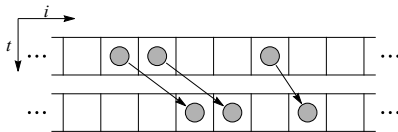
Неинтегрируемые уравнения этим свойством не обладают.

Полуэмпирический факт: бывают уравнения, у которых есть 2-солитонные решения, но нет 3-солитонных. Но, если уравнение допускает 3-солитонное решение, то оно интегрируемо и допускает n -солитонное решение с произвольным n .

Заключительный пример. Система шаров и ящиков

Рассмотрим бесконечную ленту, разбитую на клетки. В момент t в конечном числе клеток размещено по одному шару. Чтобы перейти к моменту $t + 1$, перенесём каждый шар по очереди, начиная с крайнего левого и кончая крайним правым, в ближайшую свободную клетку справа от него; при этом каждый шар переносится только один раз. Затем весь процесс повторяется, каждый раз с левого края.

Чтобы не передвинуть шар дважды, удобно помещать его не в исходную ленту, а в её копию снизу.



Разные копии ленты изображают разные моменты времени. Состояние системы описывается последовательностью из 0 и 1, с конечным числом единиц.

Пусть $x_i^t \in \{0, 1\}$ обозначает состояние i -й клетки в момент t , тогда эволюция согласно описанному правилу задаётся формулой

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i^t = 0 \text{ и } \sum_{k=-\infty}^{i-1} (x_k^t - x_k^{t+1}) > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, мы имеем динамическую систему, в которой все переменные дискретны: и пространственная (позиция на ленте), и временная (номер хода) и полевая (состояние клетки). Такие системы иногда называют *ультрадискретными* (разновидность клеточных автоматов).

Оказывается, что система шаров и ящиков *интегрируема*: шары демонстрируют ярко выраженное солитонное поведение. В каком-то смысле, это самая наглядная солитонная система, которую можно вообразить.

Роль *солитона* в данной модели играет группа из n шаров идущих подряд. Она движется направо со скоростью n клеток за ход. Чем больше n , тем больше скорость. Пусть справа имеется (достаточно далеко) другая группа из $m < n$ шаров.

В какой-то момент произойдёт столкновение. Некоторое время шары обмениваются местами. Потом взаимодействие заканчивается и образуется опять две отдельные группы из *того же самого* числа шаров, но теперь более быстрая группа будет правее. При этом, группы получают некоторый *фазовый сдвиг*, то есть, их траектории смещаются относительно тех прямых, по которым они распространялись вначале.

Если взять несколько групп разделённых достаточно большими промежутками (так, что в начальный момент времени их можно считать изолированными), то через некоторое время все они провзаимодействуют и разойдутся, восстановив исходные количества шаров в каждой группе.

Это верно, даже если выбрать начальное расположение так, чтобы все траектории пересекались в одном месте — всё равно система восстановится. Более того, окончательный фазовый сдвиг каждой группы будет такой же, как если бы группы взаимодействовали только попарно. *Эффекты тройного взаимодействия отсутствуют*, что является характерным свойством интегрируемых уравнений.

Для box-ball модели эти свойства легко пронаблюдать на компьютере, но строгое доказательство довольно сложно — система проста лишь на первый взгляд.

Домашнее задание

Во всех задачах, построение графиков и прочие задания связанные с программированием не являются обязательными.

1.1. Как уже было сказано, и скорость, и амплитуда солитона (4) определяются параметром k . А чему равна характерная ширина этого солитона? Вычислите площадь под графиком (= масса солитона) и найдите ширину, заменив солитон равновеликим равнобедренным треугольником с высотой, равной амплитуде солитона.

1.2. Решите методом характеристик двумерное уравнение типа Хопфа

$$u_t = uu_x + u^2 u_y, \quad u(x, y, 0) = a(x, y).$$

Выберите начальное значение $a(x, y) = \sin x \cos y$ или самостоятельно, постройте графики решения для разных моментов t .

1.3. Найдите бегущие волны в виде солитонов или кинков (разные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$) для модифицированного уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2u_x. \quad (\text{mKdV}^\pm)$$

В этом уравнении, как и в КдФ, коэффициенты можно растягивать, но если работать только с вещественными переменными, то знак поменять невозможно. Это приводит к тому, что решения для уравнений с разными знаками устроены по разному (хотя многие формально-алгебраические свойства уравнений от знака не зависят). Нужно аккуратно разобрать оба случая по отдельности. Постройте графики полученных решений.

1.4. То же самое для уравнения Буссинеска (или уравнения нелинейной струны)

$$u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0. \quad (\text{Bs}^\pm)$$