

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 13 · 2 мая 2022

Заключительные замечания

Что мы прошли

(с разной степенью подробности, в основном — на простейшем примере уравнения КдФ)

- представления Лакса или нулевой кривизны
- законы сохранения
- симметрии (классические и высшие)
- оператор рекурсии
- подстановки типа Миуры
- метод обратной задачи рассеяния
- преобразования Дарбу–Бэклунда
- решения:
 - ▶ многосолитонные (потенциалы Баргманна)
 - ▶ конечнозонные (уравнения Новикова и Дубровина)
 - ▶ автомодельные (уравнения Пенлеве)
- слегка затронули другие типы уравнений, в частности:
 - ▶ цепочки (Вольтерры, Тоды, одевающая)
 - ▶ дискретные уравнения (суперпозиция ПБ)

Что мы не прошли

- теория и приложения дифференциальных и псевдодифференциальных операторов
- представления Лакса на алгебрах Ли
- лагранжева и гамильтонова структура, би-гамильтоновость
- r -матричный формализм
- билинейные уравнения Хироты
- рациональные решения
- задачи с «неинтегрируемыми» граничными условиями (типа задач Гуревича–Питаевского)
- различные классы уравнений, в частности:
 - ▶ интегрируемые отображения (пример — бильярд в квадрике)
 - ▶ задачи многих тел (пример — система Калоджеро–Мозера для полюсов рациональных решений КдФ)
 - ▶ трехмерные уравнения (пример — уравнение Кадомцева–Петвиашвили)
- связи с квантовыми интегрируемыми моделями

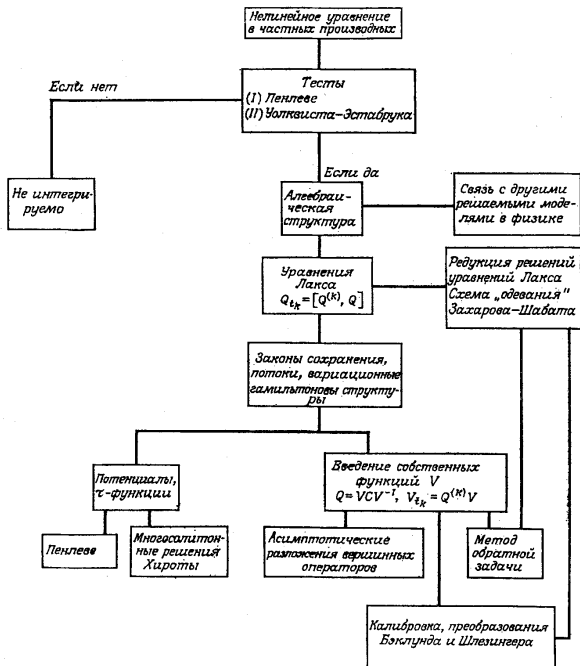
Все эти темы и сюжеты тесно связаны друг с другом.

Справа схема из учебника

- А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике, 1989.

На следующей странице продвинутая схема из обзора на конференции, посвященной 100-летию уравнения КдФ

- R.K. Bullough, P.J. Caudrey. Solitons and the Korteweg-de Vries Equation: integrable systems in 1834–1995. *Acta Appl. Math.* **39** (1995) 193–228.



"SOLITONS"

U, V and Φ are $N \times N$ Matrices $\cdot \left\{ \begin{matrix} ad(N, C) \\ gl(N, C) \end{matrix} \right\} = g \ni U, V$

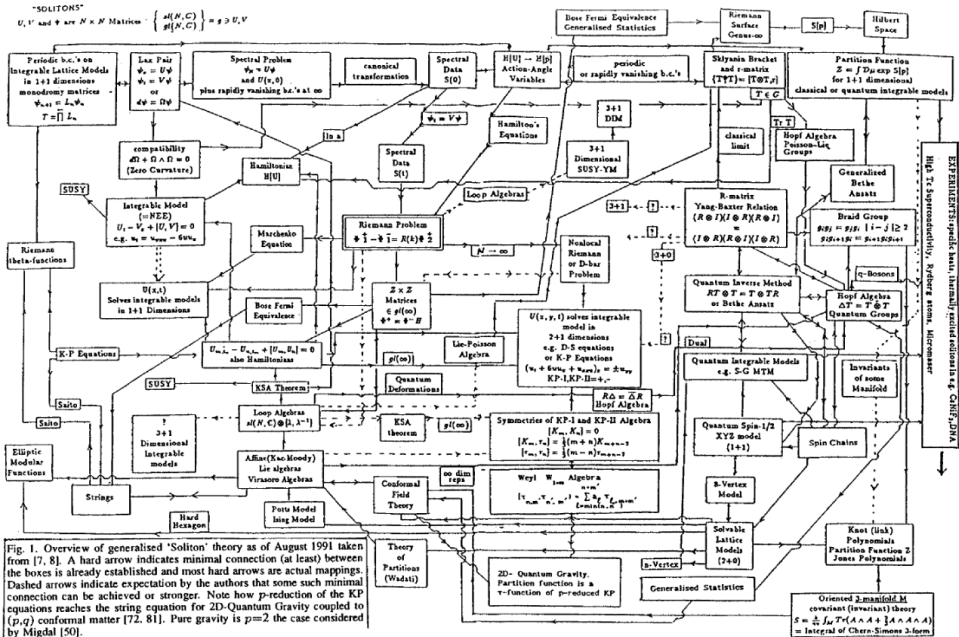


Fig. 1. Overview of generalised 'Soliton' theory as of August 1991 taken from [7, 8]. A hard arrow indicates minimal connection (at least) between the boxes is already established and most hard arrows are actual mappings. Dashed arrows indicate expectation by the authors that some such minimal connection can be achieved or stronger. Note how p -reduction of the KP equations reaches the string equation for 2D-Quantum Gravity coupled to (p, q) conformal matter [72, 81]. Pure gravity is $p=2$ the case considered by Migdal [50].

Некоторые знакомые формулы можно разглядеть в левой части схемы. Правая часть посвящена квантовым интегрируемым моделям, которые вы будете изучать на последующих курсах.

Из связей между этими частями, можно отметить, что вычисление некоторых статсумм приводит к уравнениям Пенлеве и, в более общем случае, к «струнным» уравнениям, которые представляют собой стационарные уравнения для высших потоков КдФ плюс классическая симметрия Галилея. (Внизу схемы)

Напоследок, остановимся коротко на одном из центральных понятий в правой части схемы — уравнении Янга–Бакстера. Оказывается, и в нашем курсе нечто подобное тоже было, хотя в другом контексте.

Уравнение Янга–Бакстера

Пусть дано линейное отображение

$$R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V,$$

где V некоторое линейное пространство.

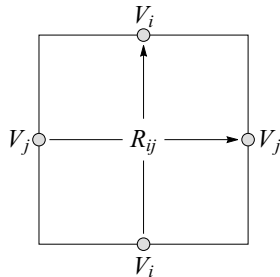
Определим отображения

$$R_{ij} : V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V,$$

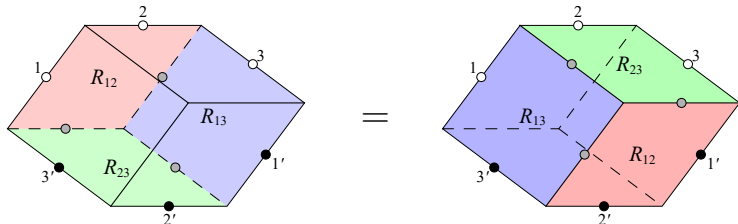
действующее как R на i -й и j -й компоненте произведения и тождественно на оставшейся. Говорят, что R удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, если выполняется равенство (на схеме записано в других обозначениях)

$$R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}.$$

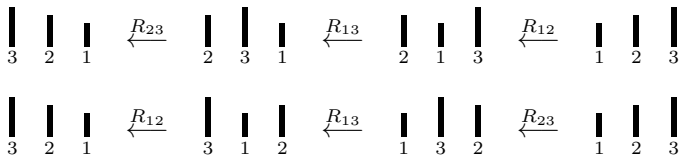
Смысл этого уравнения означает «совместность отображения вокруг куба», причём i -я копия пространства V ассоциируется с параллельными рёбрами куба, а само отображение R — с гранью куба.



Используя грани на кубе, можно отобразить $V \otimes V \otimes V$ в себя двумя разными способами. Уравнение Янга–Бакстера означает, что они приводят к одному и тому же результату.



Что это напоминает? Конечно, фазовый сдвиг при взаимодействии солитонов. Его окончательная величина не зависит от порядка столкновений. Для трёх солитонов есть два возможных сценария:



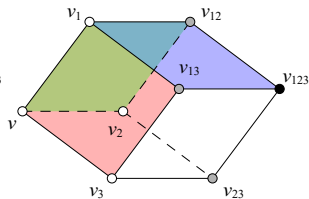
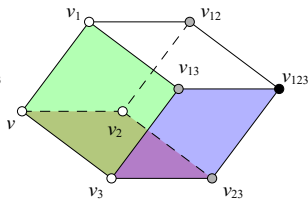
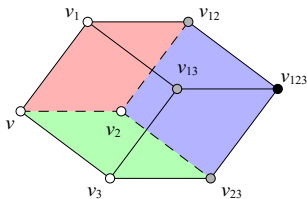
Но это ещё не всё: аналогичным свойством обладают также формулы суперпозиции преобразований Дарбу–Бэклунда. Для построения многосолитонных решений, мы использовали отображение

$$v_{ij} = v - \frac{\alpha_i - \alpha_j}{v_i - v_j},$$

где переменные v приписаны вершинам квадрата и симметричны по индексам, а параметры α приписаны рёбрам (или координатным направлениям). По заданным v, v_1, v_2, v_3 можно вычислить

$$v_{123} = -\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)v_1v_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_2v_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)v_3v_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)v_3 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)v_2}$$

тремя разными способами (например, сначала v_{13} , v_{23} , и по ним v_{123}), дающими один и тот же результат.



Это та же самая совместность вокруг куба, отличия связаны лишь с другим способом выбора начальных данных.

Если вместо v, v_1, v_2, v_3 выбрать начальные данные v, v_1, v_{12}, v_{123} в других четырёх вершинах, то получатся те же два способа раскраски, что раньше.

Также, можно перейти от переменных v в вершинах к переменным на рёбрах (удовлетворяющим одевающей цепочке, если вспомнить про x)

$$f_1 = v_1 - v, \quad f_2 = v_{12} - v_1, \quad f_3 = v_{123} - v_{12}.$$

Это приводит к примеру *нелинейного* отображения

$$R : ((f_i, \alpha_i), (f_j, \alpha_j)) \mapsto \left(\left(f_j + \frac{\alpha_j - \alpha_i}{f_i + f_j}, \alpha_i \right), \left(f_i + \frac{\alpha_i - \alpha_j}{f_i + f_j}, \alpha_j \right) \right),$$

удовлетворяющего уравнению Янга–Бакстера.