В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 12 · 25 апреля 2022

Уравнения Пенлеве

План лекции

- Примеры групповых редукций к ОДУ второго порядка
  - КдФ и уравнение P_1
  - КдФ и P_2
  - синус-Гордон и P_3
- Классификация Пенлеве
  - Тест Пенлеве–Ковалевской
  - WTC-тест

Некоторые учебники:

- Е.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ДНТВУ, 1939.
- В.И. Громак, Н.А. Лукашевич. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
- K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida. From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg, 1991.
- R. Conte (ed). The Painlevé property. One century later. Springer, 1999.
- V.I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: Walter de Gruyter, 2002.
- A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Kapaev, V.Yu. Novokshenov. Painlevé Transcendents. The Riemann–Hilbert Approach. AMS, 2006.

плюс многие другие толстые книги и тысячи статей…

До сих пор мы рассматривали семейства частных решений, определяемые стационарными уравнениями для высших симметрий заданного интегрируемого уравнения. Могло сложиться впечатление, что интегрируемость этих конечномерных редукций получается автоматически.

Однако, все не так просто. Интегрируемость сохранялась по той причине, что мы использовали только симметрии, коммутирующие друг с другом. При переходе к конечномерной динамической системе это свойство сохраняется, что и обеспечивает ее интегрируемость по Лиувиллю.

Все портится, стоит включить в игру хотя бы одну симметрию, не коммутирующую с остальными. В результате возникают динамические системы более сложной природы. В простейшем случае, это уравнения Пенлеве.

Групповые редукции

Вспомним еще раз про частное решение уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

в виде бегущей волны $u(x,t) = y(z)$, $X = x - ct$.

Такая подстановка понижает размерность: УЧП превращается в ОДУ

$$y''' = 6yy' - cy'.$$

Его порядок понижается до первого:

$$(y')^2 = 2y^3 - cy^2 + c_1 y + c_2$$

и решение записывается через эллиптические функции (кноидальная волна), а в частном случае $c_1 = c_2$ получаем сепаратрисное решение — солитон.

Оказывается, что это не единственная возможная редукция КдФ, есть ещё две. Но ОДУ получаются более сложные. Разберём эти примеры.

Редукция КдФ к P_1

Будем искать решение в таком виде:

$$u(x,t) = y(X) + ct, \quad X = x - 3ct^2.$$

Имеем

$$u_t = -6cty' + c, \quad u_x = y', \quad u_{xxx} = y'''.$$

В этих формулах t — «лишняя» переменная, но при подстановке в КдФ она удачно сокращается и, как раньше, получается ОДУ:

$$-6cty' + c = y''' - 6(y + ct)y' \quad \Rightarrow \quad y''' = 6yy' + c.$$

В этом случае порядок удаётся понизить лишь один раз:

$$y'' = 3y^2 + cX + c_1.$$

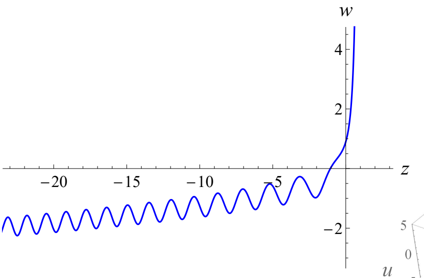
Параметры несущественны и замены $y = \alpha w$, $X = \beta z + \gamma$ приводят уравнение к каноническому виду (первое уравнение Пенлеве)

$$w'' = 6w^2 + z. \tag{P_1}$$

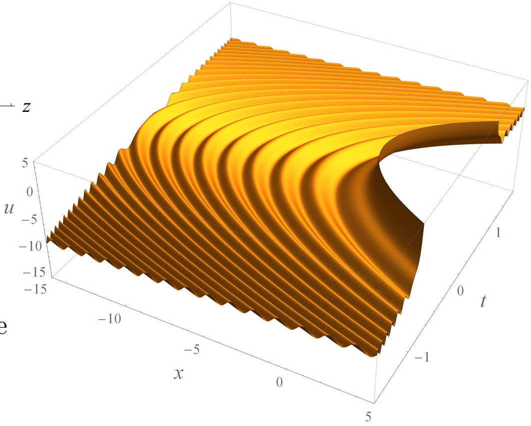
Итак, КдФ имеет решения вида

$$u(x,t) = 2w(x - 6t^2) + 2t,$$

где $w(z)$ — решение P_1, которое можно найти численно.



Оказывается, что $w(z)$ обязательно имеет по крайней мере один полюс, так что u будет иметь полюс на параболе $x - 6t^2 = \mathrm{const}$. Тем не менее, решение выглядит достаточно интересно.



Перечислим некоторые (весьма нетривиальные) свойства P_1, без доказательств.

- Так как порядок уравнения равен 2, то общее решение зависит от двух произвольных констант (например, начальные условия $w(z_0)$, $w'(z_0)$ в какой-то точке).

Доказано, что не существует частных решений, которые выражались бы через элементарные, гипергеометрические или эллиптические функции.

Поэтому, P_1 определяет новую, нелинейную, спецфункцию — (первый) трансцендент Пенлеве.

- Представляет интерес рассматривать не только вещественные переменные z и w, но и комплексные.

Доказано, что общее решение $w(z)$ — мероморфная функция при всех $z \in \mathbb{C}$, то есть, все особые точки — полюсы (второго порядка). Точка $z = \infty$ — существенно особая. Точнее, w представляется в виде

$$w(z) = -(\log s(z))'',$$

где $s(z)$ — целая функция в $\mathbb{C}$.

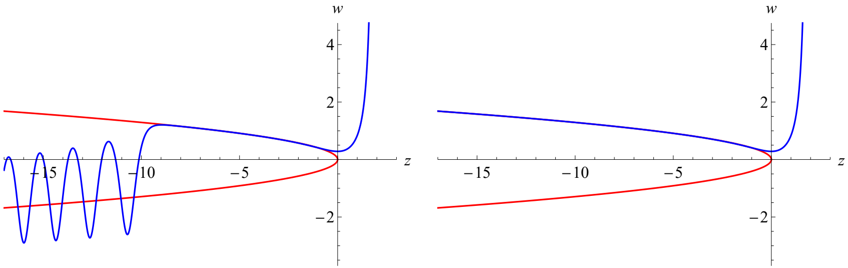
- Вещественные решения имеют полюсы при $z \in \mathbb{R}$, но при $z \to -\infty$ решение не имеет особенностей. В случае общего положения (как на предыдущем рисунке), решение имеет асимптотику

$$w(z) = -\sqrt{-z/6} + O(1), \quad z \to -\infty,$$

где $O(1)$ обозначает осциллирующую часть (для нее есть явная формула).

- При специальном подборе начальных данных, можно получить сепаратрисные решения с асимптотикой

$$w(z) = \sqrt{-z/6} + o(z), \quad z \to -\infty.$$



Галилеевская инвариантность

Возникает естественный вопрос: а как догадаться, что можно искать решение КдФ в виде

$$u(x,t) = y(X) + ct, \quad X = x - 3ct^2,$$

откуда взялась эта подстановка?

Тут всё очень просто. Вспомним (лекция 8), что КдФ инвариантно относительно группы, порождённой следующими преобразованиями:

$\tilde{x} = x + t_1,$	$\tilde{t} = t,$	$\tilde{u} = u$	сдвиг по x
$\tilde{x} = x,$	$\tilde{t} = t + t_2,$	$\tilde{u} = u$	сдвиг по t
$\tilde{x} = x + 6\tau_1 t,$	$\tilde{t} = t,$	$\tilde{u} = u + \tau_1$	преобразование Галилея
$\tilde{x} = e^{\tau_2} x,$	$\tilde{t} = e^{3\tau_2} t,$	$\tilde{u} = e^{-2\tau_2} u$	растяжение

Все возможные редукции отвечают переходу к инвариантам какой-либо 1-параметрической подгруппы в этой группе.

Например, для решений в виде бегущей волны $u = u(x - ct)$, переменные $X = x - ct$ и $y = u$ являются инвариантами 1-параметрической подгруппы, порожденной сдвигами

$$\tilde{x} = x + \tau, \quad \tilde{t} = t + \tau, \quad \tilde{u} = u.$$

Точно так же, переменные $X = x - 3ct^2$ и $y = u - ct$ являются инвариантами некоторой 1-параметрической подгруппы, порожденной преобразованием Галилея и сдвигами. Но, проще разбираться не с подгруппами, а с подалгебрами:

$u_{t_1} = u_x$	сдвиг по x
$u_{t_2} = u_t$	сдвиг по t
$u_{\tau_1} = 6tu_x - 1$	преобразование Галилея
$u_{\tau_2} = 3tu_t + xu_x + 2u$	растяжение

Это классические симметрии КдФ и стационарное уравнение для любой их линейной комбинации даст связь, совместную с КдФ.

Возьмем такую линейную комбинацию (симметрия Галилея + сдвиг по t):

$$c(6tu_x - 1) + u_t = 0. \tag{1}$$

Ей отвечает какая-то 1-параметрическая подгруппа преобразований, при желании ее можно найти, но на самом деле нам нужны лишь инварианты. Решаем уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx}{6ct} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{c} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 6ct\,dt, \quad du = c\,dt \quad \Leftrightarrow$$
$$C_1 = x - 3ct^2, \quad C_2 = u - ct.$$

Постоянные C_1 и C_2 и есть искомые инварианты. Решение записывается как

$$F(C_1, C_2) = 0.$$

Разрешая относительно u, получаем нашу подстановку:
$u = y(x - 3ct^2) + ct$.

Итак, можно сказать, что P_1 определяет галилеевски-инвариантные решения КдФ (хотя, строго говоря, в (1) замешаны еще и сдвиги по t).

Что еще можно получить из классических симметрий? Общее стационарное уравнение имеет вид

$$c_1 u_x + c_2 u_t + c_3(6tu_x - 1) + c_4(3tu_t + xu_x + 2u) = 0.$$

Если $c_4 = c_3 = 0$, то имеем уравнение для решения в виде бегущей волны.

Если $c_4 = 0$ и $c_3 \neq 0$, то коэффициент c_1 можно превратить в 0 сдвигом $t \to t + \mathrm{const}$, в результате приходим к уравнению (1).

Если $c_4 \neq 0$, то, во-первых, можно положить $c_3 = 0$, применяя преобразование Галилея, при котором

$$x \to x + 6ct, \quad t \to t, \quad u \to u + c, \quad \partial_x \to \partial_x, \quad \partial_t \to \partial_t + 6c\partial_x$$

(проверьте, что при такой подстановке к симметрии растяжения добавляется симметрия Галилея). После этого, можно положить $c_1 = c_2 = 0$, применяя сдвиги по x и t.

Итак, имеется лишь три существенно различных случая, два из которых мы уже рассмотрели.

Автомодельная редукция

Для симметрии растяжения имеем уравнение

$$3tu_t + xu_x + 2u = 0.$$

Находим инварианты по методу характеристик (или непосредственно из формул для группового преобразования):

$$\frac{dt}{3t} = \frac{dx}{x} = -\frac{du}{2u} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = t^{-1/3}x, \quad C_2 = t^{2/3}u.$$

Приходим к *автомодельной* (или *самоподобной*) подстановке

$$u(x,t) = t^{-2/3}y(X), \quad X = t^{-1/3}x.$$

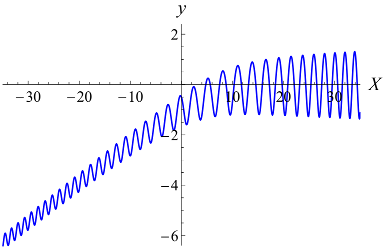
Вычисляем производные:

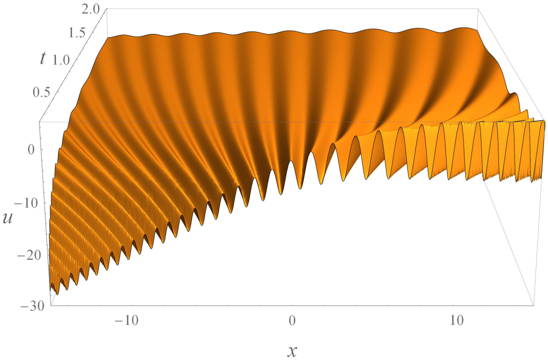
$$u_t = -\frac{2}{3}t^{-5/3}y - \frac{1}{3}t^{-2}xy', \quad u_x = t^{-1}y', \quad u_{xxx} = t^{-5/3}y'''.$$

Как и в прошлый раз, при подстановке в уравнение «лишняя» переменная t сокращается и получается ОДУ

$$y''' = 6yy' - \frac{1}{3}Xy' - \frac{2}{3}y. \tag{2}$$

Численный счет показывает, что среди решений уравнения (2) есть и полюсные, и регулярные при всех вещественных X. Однако, в данном случае особенность зашита в самой подстановке $u(x,t) = t^{-2/3}y(t^{-1/3}x)$, так что решение всегда имеет особенность вдоль прямой $t = 0$. На следующем графике изображено типичное автомодельное решение КдФ при $t > 0.1$.





Уравнение P_2

Как и в случае галилеевской редукции, порядок уравнения (2)

$$y''' = 6yy' - \frac{1}{3}Xy' - \frac{2}{3}y.$$

понижается до 2, но менее очевидным способом. Есть даже два способа.

1) Сделаем замену $y(X) = v(X) + X/6$, это даст

$$v''' = 6vv' + \frac{2X}{3}v' + \frac{v}{3}.$$

Умножаем на v и интегрируем, получаем

$$vv'' - \frac{1}{2}(v')^2 = 2v^3 + \frac{1}{3}Xv + c.$$

С точностью до масштабирования v и X это уравнение

$$w''(z) = \frac{(w')^2}{2w} + 4\alpha w^2 - zw - \frac{1}{2w}. \qquad (P_{34})$$

2) Прежде чем делать редукцию, применим преобразование Миуры $u = f_x + f^2$, где f удовлетворяет мКдФ

$$f_t = f_{xxx} - 6f^2 f_x.$$

Для этого уравнения автомодельная редукция имеет вид

$$f(x,t) = t^{-1/3} g(X), \quad X = t^{-1/3} x,$$

и на g получается уравнение, которое один раз интегрируется:

$$g''' = 6g^2 g' + \frac{1}{3}(Xg' + g) \qquad \Rightarrow \qquad g'' = 2g^3 + \frac{X}{3} g + a.$$

С точностью до масштабирования, это уравнение P_2

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha. \tag{P_2}$$

Сопоставляя выписанные формулы, можно получить обратимые подстановки между P_2 и P_{34}, но не будем на этом останавливаться.

Некоторые свойства P_2:

- В отличие от P_1, уравнение содержит неустранимый параметр α. Пара преобразований Бэклунда

$$\widehat{w} = w \pm \frac{2\alpha \pm 1}{2w' \pm 2w^2 \pm z}, \quad \widehat{\alpha} = \mp 1 - \alpha,$$

переводит P_2 в такое же уравнение с другими параметрами. Это связывает решения для всех значений $\alpha + 2n$, $-\alpha + 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

- В частности, при $\alpha = 0$, очевидно, имеется частное решение $w = 0$. Оно порождает последовательность рациональных решений при $\alpha = n$.

- При $\alpha = 1/2$ имеется однопараметрическое семейство частных решений, удовлетворяющих уравнению Риккати:

$$w' = w^2 + z/2 \quad \Rightarrow \quad w'' = 2ww' + 1/2 = 2w^3 + zw + 1/2.$$

Линеаризация приводит к уравнению Эйри. Это решение порождает последовательность частных решений при $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

- Все остальные решения — трансцендентные функции (не выражаются через элементарные, гипергеометрические или эллиптические).
- Общее решение $w(z)$ — мероморфная функция при всех $z \in \mathbb{C}$ (с полюсами первого порядка).

Уравнение sin-Гордона и P_3

Очень простой пример связан с автомодельной редукцией для уравнения

$$u_{xt} = 2\sin u.$$

Очевидна группа растяжений $x \to \varepsilon x$, $y \to y/\varepsilon$ (или группа Лоренца). Решения, инвариантные относительно нее имеют вид

$$u(x,t) = y(z), \quad z = xt \quad \Rightarrow \quad u_x = ty', \quad u_{xt} = xty'' + y'.$$

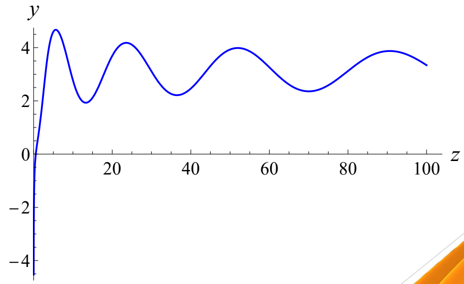
Получаем ОДУ (с неподвижной особой точкой $z = 0$):

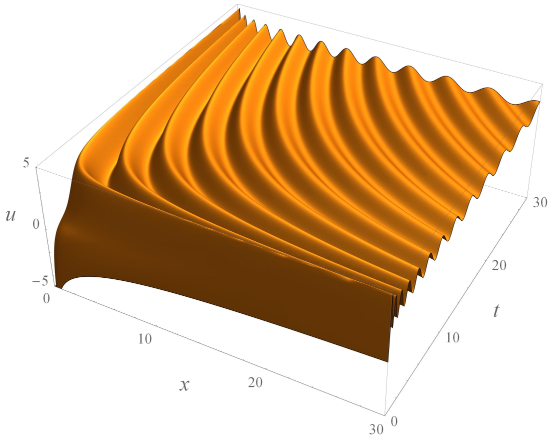
$$y'' = -\frac{y'}{z} + \frac{2}{z}\sin y.$$

Замена $e^{iy} = w$ приводит к частному случаю P_3 (с параметрами $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \delta = 0$)

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{w^2 - 1}{z}. \tag{P_3}$$

Графики решения (в исходных переменных $u(x,t)$)





Уравнения Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z \tag{P$_1$}$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \tag{P$_2$}$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \tag{P$_3$}$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} \tag{P$_4$}$$

$$\begin{aligned} w'' = {} & \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} \\ & + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{z} + \delta\frac{w(w+1)}{w-1} \end{aligned} \tag{P$_5$}$$

$$\begin{aligned} w'' = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)(w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' \\ & + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right) \end{aligned} \tag{P$_6$}$$

История

Этот список был получен Пенлеве и Гамбье ($\sim$1890–1910) в рамках аналитической теории ОДУ, при изучении уравнений вида

$$w'' = f(z, w, w'), \tag{3}$$

где f — рациональная функция от w, w', коэффициенты которой — аналитические функции от z, и обладающих следующим свойством:

> *общее решение, как функция комплексной переменной $w(z)$, не должно иметь подвижных (то есть, зависящих от выбора начальных данных) существенно особых точек.*

Например, у решений уравнения P_1 есть единственная существенно особая точка $z = \infty$, но она неподвижна; все остальные особенности подвижные, но это полюсы (вида

$$w(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \ldots,$$

где z_0 зависит от начальных данных).

В результате классификации был получен список из 50 уравнений (приведен в [Айнс]). Из них большинство решаются в элементарных или эллиптических функциях, или сводятся к линейным уравнениям гипергеометрического типа. Лишь шесть уравнений не сводятся к чему-то более простому и определяют новые спецфункции — трансценденты Пенлеве (для некоторых специальных значений параметров и начальных условий решения все же могут упрощаться, как мы видели на примере P_2).

Свойство Пенлеве применимо не только к уравнениям вида (3). Впервые его использовала Ковалевская (1880), при анализе уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих вращение твёрдого тела с закрепленной точкой в однородном поле тяжести

$$\dot{u} = [u, Ju] + [\gamma, v], \quad \dot{v} = [v, Ju], \quad u, v \in \mathbb{R}^3,$$

где $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ и $\gamma \in \mathbb{R}^3$ — постоянные параметры (моменты инерции и координаты центра масс в системе координат связанной с телом). В общем случае эта система неинтегрируема, но при некоторых соотношениях на параметры интегрируется в квадратурах. Заметим, что всегда есть первые интегралы

$$\langle v, v \rangle, \quad \langle u, v \rangle, \quad \langle u, Ju \rangle - 2\langle \gamma, v \rangle.$$

Два первых — функции Казимира, а третий — гамильтониан, для скобки Пуассона–Ли на $e(3)$ (алгебра движений $\mathbb{R}^3$). Для интегрируемости по Лиувиллю нужен еще один первый интеграл.

	параметры	первый интеграл
Эйлер	$\gamma = 0$	$\langle u, u\rangle$
Лагранж	$J_1 = J_2$ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$	u_3
Ковалевская	$2J_1 = 2J_2 = J_3$ $\gamma_3 = 0$	$\left\lvert J_1(u_1 + iu_2)^2 + 2(\gamma_1 + i\gamma_2)(v_1 + iv_2)\right\rvert^2$

Случай Ковалевской сводится к гиперэллиптическим функциям рода 2 (фактически, возникают уравнения Дубровина). Позже были найдены ещё несколько случаев частной интегрируемости, в которых есть условия на значения первых интегралов.

Итак, мотивировка для изучения свойства Пенлеве была связана с интегрируемостью в квадратурах, но, как выяснилось, существуют уравнения, у которых это свойство есть, но в квадратурах они не интегрируются.

Альтернативный подход к уравнениям Пенлеве (Фукс, ∼1900) связан с их выводом из условия совместности линейных уравнений

$$\Psi_\lambda = A(\lambda; z, w, w')\Psi, \quad \Psi_z = B(\lambda; z, w, w')\Psi \quad \Rightarrow \quad A_z = B_\lambda + [B, A]$$

(изомонодромное представление Лакса). Например, для P_1

$$A = \begin{pmatrix} -w' & 2\lambda + 2w \\ -2\lambda^2 + 2\lambda w - 2w^2 - z & w' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2w - \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Для уравнений в частных производных, замечательным обстоятельством является то, что для уравнений, интегрируемых в смысле МОЗР, редукции по группам классических симметрий приводят к ОДУ со свойством Пенлеве.

Представления нулевой кривизны при редукциях преобразуются в изомонодромные.

А само свойство Пенлеве можно использовать в качестве довольно простого детектора интегрируемости.

Тест Ковалевской–Пенлеве

Рассмотрим сначала случай ОДУ, на примере

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha + \beta z.$$

Ищем решение в виде ряда Лорана по $z - z_0$ с произвольным z_0.

Требование заключается, чтобы ряд содержал ещё одну произвольную постоянную в коэффициентах, тогда можно надеяться, что он представляет общее решение.

Легко показать, что разложение должно начинаться с $(z - z_0)^{-1}$: если

$$w \sim p(z - z_0)^{-k},$$

тогда

$$pk(k+1)(z - z_0)^{-k-2} = 2p^3(z - z_0)^{-3k} + \dots,$$

а это возможно лишь при $k = 1$.

Итак, пусть

$$w = \frac{p}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots, \qquad z_0, p, c_j \in \mathbb{C}.$$

Выпишем соотношения на коэффициенты при подстановке в уравнение.

$$\begin{array}{rrlcl}
(z-z_0)^{-3}: & p^2 = 1 & & & \text{первые четыре} \\
(z-z_0)^{-2}: & 6c_0 = 0 & & & \text{уравнения} \\
(z-z_0)^{-1}: & 6c_1 = -pz_0 & & & \text{определяют} \\
(z-z_0)^{0}: & (6-2)c_2 = -p-\alpha-\beta z_0 & & & p, c_0, c_1, c_2 \\
(z-z_0)^{1}: & (6-6)c_3 = c_1(6pc_1+z_0)+\beta & \Leftrightarrow & 0=\beta & \text{«резонанс»} \\
(z-z_0)^{2}: & (6-12)c_4 = \ldots & & & \\
(z-z_0)^{3}: & (6-20)c_5 = \ldots & & &
\end{array}$$

В уравнении для c_3 все сокращается: при подстановке ранее найденного получаем противоречие, если $\beta \neq 0$ или тождество, если $\beta = 0$.

При $\beta \neq 0$ ряда Лорана нет, свойство Пенлеве не выполняется.

При $\beta = 0$ коэффициент c_3 произволен. Дальше всё опять определяется однозначно и получается ряд с двумя произвольными постоянными z_0 и c_3, как и нужно для общего решения уравнения второго порядка.

Это означает, что уравнение с $\beta = 0$ (то есть, P_2) *возможно* удовлетворяет свойству Пенлеве. Но, это ещё не доказательство, а лишь необходимое условие — нужно доказывать, что радиус сходимости ненулевой, полюса не накапливаются и общее решение мероморфно.

Вариант теста для УЧП

Гипотеза Абловица–Рамани–Сигура (1978) утверждает, что если УЧП интегрируемо (в смысле МОЗР), то любая его редукция к ОДУ обладает свойством Пенлеве.

Чтобы применить этот принцип к исследованию заданного уравнения, нужно сначала провести его групповой анализ, классифицировать все инвариантные решения, перейти к соответствующим ОДУ и для каждой полученной редукции проделать тест, как в предыдущем примере.

Если результат всегда положительный, то наше уравнение, вероятно, интегрируемо.

Конечно, на практике это слишком громоздкая процедура, хочется применять тест только один раз и непосредственно к уравнению в частных производных. Подходящее обобщение было предложено Вейссом, Табором и Кэрнивейлом (WTC-тест, 1983).

Решение ищется в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{1}{X^m}(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots), \quad a_j = a_j(t), \quad X = X(x,t),$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $X(x,t)$ *произвольная* гладкая функция.

Уравнение $X = 0$ описывает сингулярное многообразие решения. Обычно можно, не теряя общности, принять $X = x - q(t)$, что упрощает вычисления.

Требуется, чтобы такой ряд содержал достаточное число резонансов, то есть, чтобы среди коэффициентов a_j было столько свободных функций, сколько нужно для корректной постановки задачи Коши.

В случае эволюционного уравнения n-го порядка по x, ответ должен содержать, кроме $q(t)$, еще $n-1$ произвольную функцию среди коэффициентов a_j.

Применим тест к КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

Пусть $X = x - q(t)$, сначала следим только за главными членами:

$$u \sim \frac{a_0}{X^m}, \qquad u_t \sim m\frac{q' a_0}{X^{m+1}}, \qquad u_x \sim -m\frac{a_0}{X^{m+1}},$$
$$u_{xxx} \sim -m(m+1)(m+2)\frac{a_0}{X^{m+3}}.$$

Сравнивая слагаемые u_{xxx} и uu_x видим, что для баланса необходимо, чтобы было

$$-m(m+1)(m+2)\frac{a_0}{X^{m+3}} + 6m\frac{a_0^2}{X^{2m+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2, \quad a_0 = 2.$$

Итак, разложение должно иметь вид

$$u = \frac{2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + a_2 + a_3 X + a_4 X^2 + \dots$$

При подстановке в уравнение получаем

$$\begin{aligned}
X^{-4}:&\quad 30a_1=0,\\
X^{-3}:&\quad 6a_1^2+24a_2-4q'=0,\\
X^{-2}:&\quad 6a_1a_2+12a_3-a_1q'=0,\\
X^{-1}:&\quad -a_1'=0.
\end{aligned}
\qquad\Rightarrow\qquad a_1=0,\quad a_2=\frac{1}{6}q',\quad a_3=0.$$

Уравнение при X^{-1} превратилось в тождественно. В этом порядке должны были бы появиться члены с a_4, но они сократились и эта функция остаётся произвольной (первый резонанс).

Продолжаем:

$$\begin{aligned}
X^0:&\quad -6a_5-\frac{1}{6}q''=0,\\
X^1:&\quad 0=0,\\
X^2:&\quad 24a_7-a_4'=0,\quad \ldots
\end{aligned}
\qquad\Rightarrow\qquad a_5=-\frac{1}{36}q'',\quad a_7=\frac{1}{24}a_4'.$$

Функция a_6 также свободна (второй резонанс). В последующих порядках ничего интересного больше не происходит, просто последовательно находим все a_j. Построенный ряд содержит произвольные функции $q(t)$, $a_4(t)$, $a_6(t)$ — столько и должно быть для уравнения третьего порядка.

Домашнее задание

Задача 33. Проверить, что нелинейное уравнение Шрёдингера

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad v_t = -v_{xx} - 2uv^2 \tag{4}$$

допускает следующую редукцию (связанную с преобразованием Галилея):

$$u(x,t) = e^s p(z), \quad v(x,t) = e^{-s} q(z), \quad s = \frac{1}{6}(t^3 - 3xt), \quad z = x - \frac{1}{2}t^2.$$

1) Выписать систему ОДУ (четвертого порядка) на $p(z)$, $q(z)$ (все лишние x и t должны сократиться).
2) Найти у этой системы один первый интеграл.
3) Показать, что порядок понижается на единицу за счет перехода к переменным $f = p'/p$, $g = q'/q$, $h = 2pq$.
4) Используя первый интеграл, свести задачу к уравнению P_2 на f или g.
5) Показать, что f и g связаны преобразованием Бэклунда (приведено в лекции).

Задача 34. То же самое для другой редукции (4) — автомодельной, связанной с симметрией растяжения

$$u_\tau = 2tu_{t_2} + xu_x + (1+2\alpha)u, \quad v_\tau = 2tv_{t_2} + xv_x + (1-2\alpha)v$$

(точнее говоря, это комбинация двух разных растяжений — член с α отвечает группе $u \to cu$, $v \to v/c$, а остальные члены — масштабированию x, t, u, v).

1) Найти инварианты для соответствующей подгруппы (по методу характеристик) и задать с их помощью формулы для редукции.
2) Выписать систему ОДУ (четвертого порядка).
3) Как и раньше, понизить порядок на 2, переходя к переменным типа f, g, h и подбирая первый интеграл.
4) Свести систему к P_4.

Задача 35. Проверить, что уравнение

$$w'' = w^2 + wz$$

не удовлетворяет свойству Пенлеве. [Примените тест с рядами Лорана. Определите, с какой степени должен начинаться ряд. Покажите, что при определении коэффициентов получается противоречие или нет свободных параметров.]

Задача 36. Применить тест WTC к уравнению КдФ–Бюргерса

$$u_t = u_{xxx} + u_{xx} - 6uu_x.$$

Условие баланса здесь не меняется и решение ищется, как раньше, в виде ряда

$$u = 2X^{-2} + a_1X^{-1} + a_2 + a_3X + \dots, \quad X = x - q(t).$$

Сколько свободных коэффициентов имеется в этом случае?