В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 11 · 18 апреля 2022

Приложения одевающей цепочки

План лекции

На прошлой лекции было показано, что последовательность преобразований Дарбу для уравнения Шрёдингера определяется одевающей цепочкой ($f' = df/dx$)

$$f'_n + f'_{n+1} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}.$$

Её решение можно строить, стартуя с известных ψ-функций затравочного потенциала u_0.

В частности, если $u_0 = 0$, то это даёт n-солитонные решения КдФ.

Но, можно действовать и наоборот — найти какое-то явное решение ОЦ и по нему определить потенциалы

$$u_n = f_n^2 + f'_n + \alpha_n$$

и соответствующие ψ-функции.

Мы разберём два сюжета, связанных с этой идеей.

- ***Метод факторизации*** (сейчас известен как «суперсимметричная квантовая механика»). Этот метод использовался для построения точно-решаемых потенциалов ещё до открытия солитонов.
    - E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940/1941) 9–16.// Э. Шредингер. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976.
    - L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) 21–68. // Сб. переводов "Математика" **10:3** (1966) 39.

  Основная идея: потенциалы u_n должны быть «примерно» одинаковыми (shape invariance), то есть, ПД должно только менять какие-то параметры. Простейший пример — гармонический осциллятор.

- ***Квазипериодическое замыкание ОЦ***
    - А.П. Веселов, А.Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера. *Funct. Anal. Appl.* **27:2** (1993) 1–21.

  Основная идея: положим $f_{n+N} = f_n$, $\alpha_{n+N} = \alpha_n + 2c$, тогда ОЦ превратится в систему ОДУ. Что из неё получится, то и наше.

  При $c = 0$ получаются конечнозонные потенциалы, при $c \neq 0$ — трансцендентные обобщения гармонического осциллятора.

Основные формулы

Напомним формулы из предыдущей лекции. Преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера с потенциалом u_n

$$\psi_n'' = (u_n - \lambda)\psi_n \tag{1}$$

определяется формулами

$$\psi_{n+1} = \psi_n' - f_n\psi_n, \quad u_n = f_n^2 + f_n' + \alpha_n, \quad u_{n+1} = u_n - 2f_n'. \tag{2}$$

Исключение u_n приводит к одевающей цепочке

$$f_n' + f_{n+1}' = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}. \tag{3}$$

Переменная f_n выражается через частное решение (1) при $\lambda = \alpha_n$:

$$f_n = \varphi_n'/\varphi_n, \qquad \varphi_n'' = (u_n - \alpha_n)\varphi_n \tag{4}$$

(функция φ_n определяет ядро ПД). Обратное ПД имеет вид

$$\psi_n = \frac{1}{\alpha_n - \lambda}(\psi_{n+1}' + f_n\psi_{n+1}). \tag{5}$$

На матричном языке (представление нулевой кривизны):

$$\Psi_n' = U_n\Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = F_n\Psi_n \quad \Rightarrow \quad F_n' = U_{n+1}F_n - F_nU_n,$$

где

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} -f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & -f_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_n' \end{pmatrix},$$

причём

$$F_n^{-1} = \frac{1}{\alpha_n - \lambda}\begin{pmatrix} f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & f_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. Сегодня мы совсем не будем рассматривать зависимость от времени t в КдФ. Дело в том, что интересующие нас решения ОЦ будут определяться такими условиями замыкания (shape invariance или квазипериодичность), которые, вообще говоря, *несовместны* с динамикой по t (за исключением n-солитонных и n-зонных решений). В отличие от, например, уравнений Новикова, производная по t от этих условий не обращается тождественно в 0.

Метод факторизации

Название связано с выводом ПД на языке дифференциальных операторов. Этот способ полностью эквивалентен старому, но имеет смысл привести и его.

Введём обозначение для оператора Шрёдингера

$$L_n = -D^2 + u_n, \quad D := d/dx.$$

Уравнение Шрёдингера записывается, как

$$L_n \psi_n = \lambda \psi_n.$$

Оператор A_n называется *сплетающим*, если выполняется соотношение

$$L_{n+1} A_n = A_n L_n,$$

где L_{n+1} — оператор Шрёдингера с потенциалом u_{n+1}. Тогда

$$L_{n+1} A_n \psi_n = A_n L_n \psi_n = \lambda A_n \psi_n,$$

то есть, $\psi_{n+1} = A_n \psi_n$ удовлетворяет УШ с потенциалом u_{n+1}.

Формулы (1)–(5) воспроизводятся, если взять в качестве сплетающего оператор первого порядка $A_n = D - f_n$, при этом параметры α_n вводятся, как постоянные интегрирования.

Более того, соотношения между u_n и f_n равносильны факторизации

$$L_n - \alpha_n = -D^2 + u_n - \alpha_n = -(D + f_n)(D - f_n) = -D^2 + f_n' + f_n^2,$$

$$L_{n+1} - \alpha_n = -D^2 + u_{n+1} - \alpha_n = -(D - f_n)(D + f_n) = -D^2 - f_n' + f_n^2,$$

то есть,

$$L_n - \alpha_n = A_n^\dagger A_n, \quad L_{n+1} - \alpha_n = A_n A_n^\dagger,$$

где

$$A_n = D - f_n, \quad A_n^\dagger = -D - f_n.$$

Отсюда, очевидно, следует

$$(L_{n+1} - \alpha_n)A_n = A_n A_n^\dagger A_n = A_n(L_n - \alpha_n) \quad \Rightarrow \quad L_{n+1}A_n = A_n L_n,$$

то есть, оператор A_n — сплетающий.

Пока ничего нового не произошло, все формулы совпадают со старыми.

Далее, мы предполагали, что для u_0 известно много частных решений φ_0^n при $\lambda = \alpha_n$ и строили последовательность ПД по такой схеме:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & u_0 & \longrightarrow & u_1 & \longrightarrow & u_2 & \longrightarrow & u_3 \quad \dots \\
\hline
\alpha_0 & \varphi_0^0 & \xrightarrow{A_0} & 0 & & & & \\
\alpha_1 & \varphi_0^1 & \xrightarrow{A_0} & \varphi_1^1 & \xrightarrow{A_1} & 0 & & \\
\alpha_2 & \varphi_0^2 & \xrightarrow{A_0} & \varphi_1^2 & \xrightarrow{A_1} & \varphi_2^2 & \xrightarrow{A_2} & 0 \\
 & & & \dots & \dots & \dots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
A_n = D - f_n \\[1em]
f_n = (\varphi_n^n)'/\varphi_n^n
\end{array}
$$

Теперь предположим, что у нас есть последовательность функций f_n, удовлетворяющая ОЦ. Тогда мы можем по ним определить φ_n^n и найти функции φ_0^n пользуясь обратными ПД:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & u_0 & \longleftarrow & u_1 & \longleftarrow & u_2 & \longleftarrow & u_3 \quad \dots \\
\hline
\alpha_0 & \varphi_0^0 & & & & & & \\
\alpha_1 & \varphi_0^1 & \xleftarrow{A_0^\dagger} & \varphi_1^1 & & & & \\
\alpha_2 & \varphi_0^2 & \xleftarrow{A_0^\dagger} & \varphi_1^2 & \xleftarrow{A_1^\dagger} & \varphi_2^2 & & \\
 & & & \dots & \dots & \dots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
A_n^\dagger = -D - f_n \\[1em]
\varphi_n^n = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f_n \, dx\right)
\end{array}
$$

В результате, мы получим потенциал u_0, для которого известны частные волновые функции при всех $\lambda = \alpha_n$.

При некоторых условиях на f_n, функции

$$\varphi_n^n = \exp\Bigl(\int_{x_0}^{x} f_n \, dx\Bigr)$$

отвечают основному состоянию L_n при $\lambda = \alpha_n$ (суммируемы с квадратом и не имеют нулей). Операторы $A_{n-1}^{\dagger}$ переводят их в собственные функции оператора L_{n-1} при этом же значении λ, которое для L_{n-1} является уже вторым, и так далее.

Для потенциала u_0 получаем собственные функции

$$\varphi_0^n = A_0^{\dagger} A_1^{\dagger} \cdots A_{n-1}^{\dagger} \varphi_n^n \tag{6}$$

для n-го собственного значения α_n. Поэтому, $A_n^{\dagger}$ называют операторами рождения или повышающими операторами, A_n — операторами уничтожения или понижающими.

Оказывается, что многие точно-решаемые квантовомеханические задачи открытые в 1920–30 вкладываются в эту схему.

Гармонический осциллятор

Одевающая цепочка

$$f_n' + f_{n+1}' = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}$$

имеет очевидное решение

$$f_n = -cx, \quad \alpha_n = 2cn + \alpha_0.$$

Для него имеем

$$u_n = f_n^2 + f_n' + \alpha_n = c^2x^2 + c(2n-1) + \alpha_0,$$
$$\varphi_n^n = \exp\Bigl(\int_{x_0}^{x} f_n\,dx\Bigr) \propto e^{-cx^2/2}.$$

Пусть $c > 0$, тогда φ_n^n — собственная функция без нулей, то есть, основное состояние.

Случай $c < 0$, на самом деле, не сильно отличается, просто вместо собственной функции имеем дополнительную растущую. Но, удобнее работать с собственными.

Примем $c = 1$ и

$$f_n = -x, \quad \alpha_n = 2n+1, \quad u_n = x^2 + 2n, \quad \varphi_n^n = e^{-x^2/2}.$$

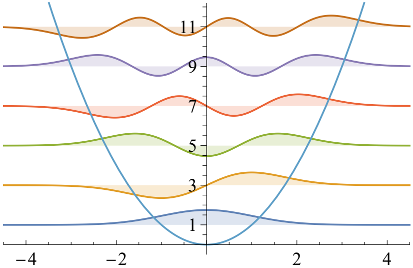
Так как все f_n одинаковы, то все операторы совпадают:

$$A_n = A = D + x, \quad A_n^\dagger = A^\dagger = -D + x.$$

Следовательно, с.ф. и с.з. для u_0 находятся совсем просто (то, что ничего не пропущено, обосновывается подсчётом числа нулей):

$$\varphi_0^n = (x - D)^n (e^{-x^2/2}) = H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad \alpha_n = 2n+1,$$

где H_n — полиномы Эрмита



$$H_0 = 1,$$
$$H_1 = 2x,$$
$$H_3 = 2(2x^2 - 1),$$
$$H_4 = 4x(2x^2 - 3),$$
$$H_5 = 4(4x^3 - 12x^2 + 3), \quad \ldots$$

(на графике функции нормированы).

Другие примеры

Как найти другие явные решения ОЦ?

Одно из возможных условий форм-инвариантности (по Инфельду–Халлу): пусть все f_n имеют вид

$$f_n(x) = (n-c)F(x) + G(x) + H(x)/(n-c),$$

с какими-то функциями F, G, H, которые нужно уточнить.

Для краткости обозначим $m = n - c$. Подстановка в цепочку даёт

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = (2m+1)(F' + F^2) + 2(G' + FG) + \left(\frac{2}{m+1} - \frac{2}{m}\right)GH \\ + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m}\right)H' + \left(\frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{m^2}\right)H^2.$$

Так как α_n не зависит от x, а функции от m в правой части линейно независимы, то коэффициенты при них должны быть постоянными.

Отсюда, на F, G, H получается система

$$F' + F^2 = c_1, \quad G' + FG = c_2, \quad GH = c_3, \quad H^2 = c_4,$$

где c_i — постоянные. В зависимости от их выбора, имеется несколько типов решений. Все они выражаются через элементарные функции.

Параметры α_n и потенциалы u_n имеют вид

$$-\alpha_n = c_1 m^2 + 2c_2 m + 2c_3/m + c_4/m^2, \quad m = n - c,$$
$$u_n = -m(m-1)F' - (2m-1)G' + G^2 + 2FH.$$

Потенциалы получаются не обязательно регулярными на всей оси x, среди них есть и полюсные, что отвечает потенциальным ямам на полуоси или на отрезке.

Значения α_n определяют «алгебраический» спектр, в том смысле, что соответствующие волновые функции находятся явно, в квадратурах. Но, перебор случаев показывает, что при правильном выборе констант они отвечают также и за физический спектр, то есть, это те значения, для которых волновые функции суммируемы. Так что, эта конструкция вполне содержательна с точки зрения квантовой механики.

Упрощённая классификация решений ($m = n - c$):

	f_n	α_n	u_n
(A)	$\dfrac{d}{\sin(ax+b)}$ $+am\cot(ax+b)$	a^2m^2	$\dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}(a^2m(m-1)+d^2$ $+ad(2m-1)\cos(ax+b))$
(B)	$-e^x - m$	$-m^2$	$e^{2x} - (2m-1)e^x$
(C)	$m/x + dx$	$-d(4m+1)$	$m(m-1)/x^2 - 2dm + d^2x^2$
(D)	$-x$	$2n+1$	$x^2 + 2n$
(E)	$am\cot(ax+b) + d/m$	$a^2m^2 - d^2/m^2$	$m(m-1)\dfrac{a^2}{\sin^2(ax+b)}$ $+2ad\cot(ax+b)$
(F)	$m/x + d/m$	$-d^2/m^2$	$m(m-1)/x^2 + 2d/x$

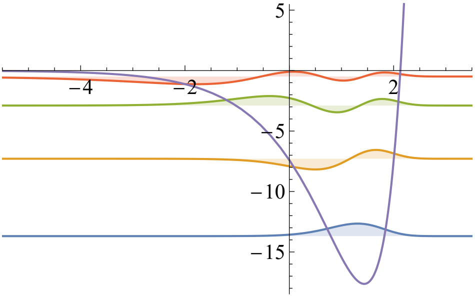
(A) потенциалы Пёшля–Теллера
(B) потенциал Морзе
(C) гармонический осциллятор на полуоси
(D) гармонический осциллятор (его мы разобрали)
(E) потенциалы Маннинга–Розена
(F) задача Кеплера

В случаях (A) и (E) есть также варианты с гиперболическими функциями.

Также следует учесть, что кроме целочисленного параметра n, определяющего энергетические уровни α_n, в этих решениях возможно ещё квантование некоторых других параметров входящих в потенциалы, так что картина более сложная, чем кажется на первый взгляд. Детальный анализ можно найти в [Infeld & Hull 1951].

Потенциал Морзе (2-атомная молекула) при $c = 3.7$

Здесь $f_n = c - n - e^x$ и функции $\varphi_n^n = \exp((c-n)x - e^x)$ нормируемы при $n < \lfloor c \rfloor$. Следовательно, для потенциала $u_0 = e^{2x} - 8.4e^x$ имеется четыре собственных значения $-(c-n)^2$ при $n = 0, 1, 2, 3$. Собственные функции строятся по общей формуле (6).



Квазипериодическое замыкание

Для гармонического осциллятора условие форм-инвариантности особенно просто: $f_{n+1} = f_n$.

Это легко обобщить. Рассмотрим условие периодичности

$$f_{n+N} = f_n.$$

Уравнение цепочки при сдвиге на N должно перейти в себя, что даёт

$$f_n' + f_{n+1}' - f_n^2 + f_{n+1}^2 = \alpha_n - \alpha_{n+1} = \alpha_{n+N} - \alpha_{n+N+1}.$$

Отсюда следует, что параметры должны удовлетворять условию

$$\alpha_{N+n} = \alpha_n + 2c.$$

Будем называть случай $c = 0$ периодическим и $c \neq 0$ квазипериодическим.

Кроме того, свойства замыкания зависят от чётности N.

Одевающая цепочка сводится к системе на переменные $f_1, \dots, f_N$:

$$\begin{cases} f_1' + f_2' = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_1 - \alpha_2, \\ f_2' + f_3' = f_2^2 - f_3^2 + \alpha_2 - \alpha_3, \\ \qquad\qquad \dots \\ f_N' + f_1' = f_N^2 - f_1^2 + \alpha_N - \alpha_{N+1}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\alpha_{N+1} = \alpha_1 + 2c$.

Если N нечётно, то матрица при производных невырождена и система легко приводится к нормальному виду.

Если N чётно, то матрица вырождена. Однако, если сложить уравнения, чередуя знаки, то появляется дополнительная связь

$$f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 - \dots - f_N^2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_N + c = 0, \tag{8}$$

что позволяет выписать систему на $N-1$ переменную.

При любом N есть первый интеграл

$$J = f_1 + \dots + f_N + cx, \quad J' = 0. \tag{9}$$

Периодический случай

Напомним, что одевающая цепочка эквивалентна матричному уравнению

$$F_n' = U_{n+1}F_n - F_nU_n, \quad U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} -f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & -f_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, при любом k,

$$(F_{n+k} \cdots F_n)' = U_{n+k-1}F_{n+k} \cdots F_n - F_{n+k} \cdots F_nU_n.$$

В периодическом случае имеем

$$\begin{aligned} u_{n+N} &= f_{n+N}^2 + f_{n+N}' + \alpha_{n+N} \\ &= f_n^2 + f_n' + \alpha_n = u_n \qquad \Rightarrow \qquad U_{n+N} = U_n, \end{aligned}$$

следовательно выполняется уравнение Лакса

$$M_n' = [U_n, M_n], \quad M_n = F_{n+N-1} \cdots F_n,$$

с полиномиальной по λ матрицей M_n.

Это совпадает с уравнением Лакса для стационарных высших симметрий КдФ (то есть, для уравнений Новикова). На лекциях 8 и 9 было показано, что M_n имеет вид

$$M_n = \begin{pmatrix} -A_n' & 2A_n \\ -A_n'' + 2A_n(u_n - \lambda) & A_n' \end{pmatrix},$$

где A_n многочлен от λ, коэффициенты которого — дифференциальные многочлены от u_n (сейчас n это номер, а не порядок производной по x!).

Несложно показать, что при $N = 2m+1$ и $N = 2m+2$ степень A_n равна m. Определитель M_n — первый интеграл

$$2A_nA_n'' - (A_n')^2 - 4(u_n - \lambda)A_n^2 = C(\lambda),$$

и на нули A_n выписывается система уравнений Дубровина порядка m, которая интегрируется в квадратурах.

Итак, периодический случай сводится к m-зонным потенциалам, просто сейчас мы работаем в других переменных и имеем матрицу M_n в факторизованном виде. В периодическом случае имеется совместность с динамикой по t в силу КдФ.

Квазипериодический случай

При $c \neq 0$ представление Лакса портится, так как $U_{n+N} \neq U_n$. Определитель $\det M_n$ уже не является первым интегралом. Вообще, выживает лишь один первый интеграл (9)

$$J = f_1 + \cdots + f_N + cx.$$

В результате, система для f_n становится неинтегрируемой. Также теряется совместность с уравнением КдФ. Тем не менее, f_n — это некоторые конкретные функции, их можно найти хотя бы численно, и по ним дальше строить потенциалы и собственные функции, как обычно.

В результате возникает обобщение гармонического осциллятора — потенциал с квадратичным ростом и спектром, состоящим из N арифметических прогрессий

$$\alpha_{kN} = \alpha_0 + 2kc, \quad \alpha_{1+kN} = \alpha_1 + 2kc, \ \ldots, \ \ \alpha_{N-1+kN} = \alpha_{N-1} + 2kc.$$

Пример с $N = 3$

Простейший нетривиальный случай отвечает $N = 3$. Обозначим $y_n = f_n + f_{n+1}$, $\delta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} y_1' = y_1(y_3 - y_2) + \delta_1, \\ y_2' = y_2(y_1 - y_3) + \delta_2, \\ y_3' = y_3(y_2 - y_1) + \delta_3. \end{cases} \tag{10}$$

Примем нормировку $c = 1$,

$$y_1 + y_2 + y_3 = -2x, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2.$$

Отсюда можно исключить y_3:

$$y_1' = -y_1(y_1 + 2y_2 + 2x) + \delta_1, \quad y_2' = y_2(2y_1 + y_2 + 2x) + \delta_2.$$

Теперь из первого уравнения выразим y_2 и подставим во второе, тогда на функцию $w = y_1 = -x - f_3$ получается уравнение

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4xw^2 + 2(x^2 - a)w + \frac{b}{w}, \tag*{P_4}$$

с параметрами

$$a = \delta_2 + \frac{\delta_1}{2} + 1, \quad b = -\frac{\delta_1^2}{2}.$$

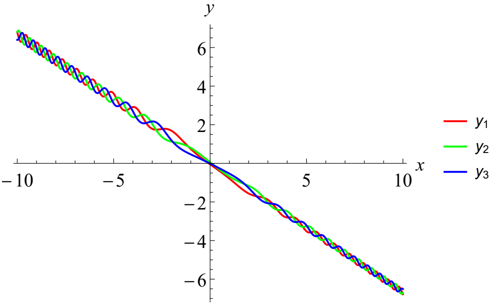
Это одно из шести уравнений Пенлеве, которые определяют некоторый класс аналитических функций со специальными свойствами. Подробнее мы поговорим о этих уравнениях на следующей лекции. Пока отметим лишь, что общее решение уравнения P_4 не выражается через элементарные или специальные функции (хотя есть некоторые частные рациональные решения и решения в терминах функций Эрмита, для некоторых специальных значений параметров и начальных условий). То есть, это некоторая новая спецфункция — трансцендент Пенлеве.

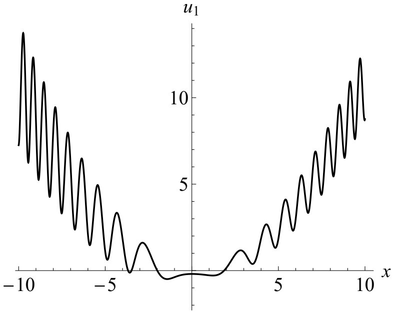
При численном счете для системы (10), в пространстве параметров и начальных условий можно найти некоторую конечную область, отвечающую регулярным решениям (без полюсов на вещественной оси). При этом все $\delta_n < 0$,

$$f_n = -\frac{x}{3} + O(1), \quad u_n = \frac{x^2}{9} + O(x), \quad x \to \pm\infty,$$

то есть, решения устроены примерно, как в случае гармонического осциллятора, но теперь на него накладываются высокочастотные осцилляции.

Типичное решение выглядит так:





Согласно общей схеме, функция

$$\varphi_n^n = e^{\int f_n \, dx}$$

удовлетворяет уравнению Шрёдингера с потенциалом u_n, при $\lambda = \alpha_n$.

Для решений, которые ведут себя так, как на графике, эта функция не имеет нулей и является быстроубывающей. Следовательно это основное состояние для потенциала u_n.

Применяя операторы $A_k^\dagger$, получаем собственные функции для любого из потенциалов u_1, u_2, u_3. При этом собственнные значения для u_1 образуют возрастающую последовательность

$$\alpha_{1+3k} = \alpha_1 + 2k, \quad \alpha_{2+3k} = \alpha_2 + 2k, \quad \alpha_{3(k+1)} = \alpha_3 + 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то есть, спектр состоит из трёх арифметических прогрессий с шагом 2.

Численные эксперименты показывают, что решения такого типа имеются при всех нечётных N.

Для чётных N всё немного усложняется (в частности, при $N = 4$ система сводится к уравнению P_5, это тоже уравнение второго порядка, но более громоздкое, чем P_4). Вообще, при чётных N решение имеет неподвижную особую точку при $x = 0$ и соответствующие операторы Шрёдингера служат аналогами гармонического осциллятора на полуоси (тип (C) в классификации Инфельда–Халла).

Итак, на этих примерах мы видим, что возможна ситуация, когда квантово-механическая задача является точно-решаемой в том смысле, что спектр допускает явное описание, хотя сам потенциал и собственные функции выражаются через некоторые трансцендентные функции.