

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 10 · 11 апреля 2022

Преобразования Бэклунда

Уравнения с дискретными переменными

До сих пор мы в основном рассматривали уравнения в частных производных (за исключением цепочки Тоды в лекции 5). Уравнения с дискретными переменными (дифференциально-разностные или чисто разностные) также очень важны в теории интегрируемости и часто встречаются в приложениях.

Дискретная переменная может играть роль дискретного аналога непрерывной переменной (пространственной или временной). Например, рассмотрим цепочку Вольтерры (Манаков, 1974)

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (1)$$

будем считать n аналогом x и зададим начальные данные в виде плавной кривой (для простоты программирования, замкнем решетку с большим периодом).

Получится динамическая система большой размерности, но довольно простой структуры. Она легко решается численно стандартными солверами для ОДУ.

Как видим, решение ведёт себя очень похоже на солитоны КдФ, или на то, что мы видели в эксперименте Забуски–Краскала (лекция 1). Возникает несколько солитонов (их число зависит от начальной кривой), распространяющихся с разной скоростью и, благодаря условию периодичности, всё время догоняющих друг друга. Строго говоря, это не «чистое» многосолитонное решение, но достаточно хорошее приближение к нему.

Это неудивительно, так как можно показать, что цепочка (1) допускает непрерывный предел к уравнению КдФ: положим

$$u_n(t) = 1 + h^2 U(X, T), \quad X = nh + 2ht, \quad T = h^3 t/3, \quad (2)$$

где h малый параметр (шаг решетки), тогда при подстановке разложений по формуле Тейлора в (1) для $U(X, T)$ получается уравнение КдФ $U_T = U_{XXX} + 6UU_X$ с точностью до членов порядка $O(h^2)$.

Таким образом, можно сказать, что (1) служит дискретизацией КдФ. Однако, этим содержание этого уравнения далеко не исчерпывается.

В отличие от разностной схемы Забуски–Краскала, цепочка Вольтерры — самостоятельное интегрируемое уравнение, то есть, у него есть точные многосолитонные решения, представление Лакса, законы сохранения и высшие симметрии. Все это можно изучать столь же долго и нудно, как и в случае КдФ. Но, мы этого делать не будем, так как все охватить невозможно, и вернёмся к КдФ через пару страниц.

Приведём только одну простейшую высшую симметрию цепочки (1). В её правой части содержатся более далёкие соседи по решетке (число соседей играет роль порядка по производным для непрерывных уравнений).

Можно проверить, что уравнение (1) совместно с уравнением

$$u_{n,T} = u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})). \quad (3)$$

Как обычно, это означает, что векторные поля ∂_t и ∂_T коммутируют, что позволяет строить их общее решение $u_n(t, T)$ как функцию от трех переменных, дискретной и двух непрерывных.

Зафиксируем любой номер n и заметим, что все переменные u_{n+k} могут быть явно выражены через две соседние переменные $(u, v) = (u_n, u_{n+1})$ и их производные по t , поскольку (1) можно переписать в виде

$$u_{n-1} = u_{n+1} - \frac{u_{n,t}}{u_n}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{u_{n+1,t}}{u_{n+1}}.$$

Делая это для симметрии, нетрудно показать, что для u и v получается эволюционная система (Леви, 1980)

$$u_T = -u_{tt} + (u^2 + 2uv)_t, \quad v_T = v_{tt} + (v^2 + 2uv)_t. \quad (4)$$

Так как n произвольно, этой системе удовлетворяет любая пара соседей, в том числе $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$.

Переход от $(u, v) = (u_n, u_{n+1})$ к $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ задаётся, как легко видеть, преобразованием

$$\tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = u + \frac{v_t}{v}. \quad (5)$$

Оно переводит любое решение (с $v \neq 0$) системы (4) в решение этой же системы. Такие преобразования (не сводящиеся к точечным заменам переменных) называются преобразованиями Бэклунда.

Преобразование (5) — это явная и обратимая дифференциальная подстановка, простейший тип ПБ.

Бывают и более сложные, неявные ПБ, что мы сейчас увидим на примере КдФ.

Важный вывод заключается в том, что дискретная переменная может интерпретироваться не только как аналог непрерывной, но и просто как номер, счётчик некоторых отображений. В этом случае не обязательно должен быть какой-то непрерывный предел.

Обе точки зрения дополняют друг друга.

Преобразование Бэклунда для КдФ

Иногда ПБ получаются как композиция двух подстановок, действующих в разные стороны. Уравнения

$$\text{КдФ} : \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x \quad \text{и} \quad \text{мКдФ} : \quad f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x$$

служат типичным примером.

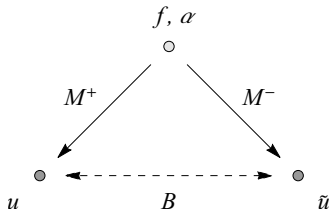
Напомним (см. лекцию 3), что имеется преобразование Миуры, отображающее решения мКдФ в решения КдФ:

$$M^+ : \quad u = f^2 + f_x + \alpha.$$

Уравнение для f инвариантно относительно замены $f \rightarrow -f$. Это даёт ещё одну подстановку между теми же уравнениями:

$$M^- : \quad \tilde{u} = f^2 - f_x + \alpha.$$

Уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают, но сами решения *разные*.



Связь между u и $\tilde{u}$ и есть ПБ для КдФ.

Это *неявное* преобразование. Пусть u задано. Чтобы получить $\tilde{u}$, нужно сначала обратить M_α^+ , то есть, построить f как решение пары ОДУ

$$f_x = u - \alpha - f^2, \quad f_t = u_{xx} - 2u_x f - 2(u + 2\alpha)(u - f^2 - \alpha), \quad (6)$$

(второе уравнение это мКдФ, в котором f_x , f_{xx} и f_{xxx} заменены через u). Эта система совместна, если u удовлетворяет КдФ. Далее $\tilde{u}$ находится по явным формулам при помощи M_α^- .

Замечание 1. При выводе законов сохранения, мы строили f в виде ряда по $\sqrt{-\lambda}$. В качестве настоящего решения этот формальный ряд не годится. Сейчас требуется решение в виде функции от x, t , при некотором конкретном числовом значении $\lambda = \alpha$.

Промежуточную переменную f можно исключить и привести ПБ к соотношениям непосредственно между u и $\tilde{u}$. Имеем:

$$u = f^2 + f_x + \alpha, \quad \tilde{u} = u - 2f_x. \quad (7)$$

Отсюда находим $2f^2 = u + \tilde{u} - 2\alpha$ и тогда

$$u_x + \tilde{u}_x = (u - \tilde{u})\sqrt{2(u + \tilde{u} - 2\alpha)}. \quad (8)$$

Это x -часть преобразования Бэклунда.

Ещё одно уравнение, t -часть, получается, если подставить f во второе уравнение (6) или непосредственно в уравнение мКдФ; это даст

$$u_t + \tilde{u}_t = (u_{xx} - \tilde{u}_{xx} - 3u^2 + 3\tilde{u}^2)\sqrt{2(u + \tilde{u} - 2\alpha)}. \quad (9)$$

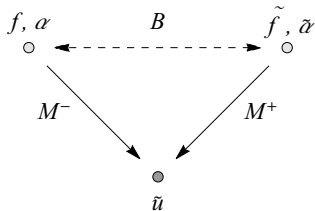
Перекрёстным дифференцированием проверяется, что отсюда следует

$$u_t - u_{xxx} + 6uu_x = \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxx} + 6\tilde{u}\tilde{u}_x,$$

то есть, если одна переменная удовлетворяет КдФ, то это верно и для второй; кроме того, дифференцирование (8) в силу КдФ даёт тождество (является следствием (8) при дифференцировании по x).

Одевающаяся цепочка

Преобразование в виде (8) не особенно удобно из-за корня. Но, мы можем взглянуть на картину и с другой стороны:



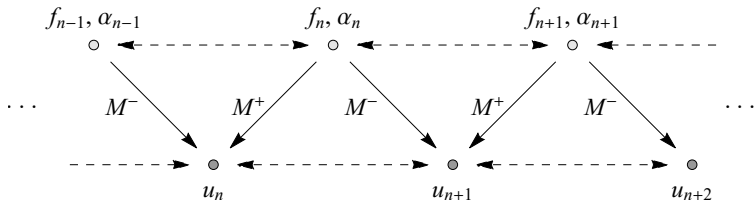
Вместо того, чтобы исключать f , исключим $\tilde{u}$ из соотношений

$$M^+ : \tilde{u} = \tilde{f}^2 + \tilde{f}_x + \tilde{\alpha}, \quad M^- : \tilde{u} = f^2 - f_x + \alpha.$$

Параметр $\tilde{\alpha}$ выбирается независимо от α . Это даёт x -часть ПБ между двумя уравнениями мКдФ с разными параметрами:

$$f_x + \tilde{f}_x = f^2 - \tilde{f}^2 + \alpha - \tilde{\alpha}. \quad (10)$$

Так как мы собираемся применять ПБ многократно, то для нас нет принципиальной разницы между этими двумя диаграммами — они склеиваются в одну общую последовательность.



Переменные u_n , f_n связаны следующими соотношениями с произвольными параметрами α_n :

$$u_n = f_n^2 + f_{n,x} + \alpha_n, \quad u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Исключение u_n приводит к так называемой *одевающей цепочке*:

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad (12)$$

исключение f_n — к цепочке

$$u_{n,x} + u_{n+1,x} = (u_n - u_{n+1})\sqrt{2(u_n + u_{n+1} - 2\alpha_n)}.$$

Удобна также переменная v , определяемая по формулам

$$u_n = 2v_{n,x}, \quad v_n = f_n - f_{n+1}.$$

Постоянные интегрирования можно выбрать так, чтобы эта переменная удовлетворяла, при каждом n , потенциальному уравнению КдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2. \quad (13)$$

Соответствующая цепочка имеет вид

$$v_{n,x} + v_{n+1,x} = (v_n - v_{n+1})^2 + \alpha_n. \quad (14)$$

Все три цепочки, для переменных f , u и v , определяют x -часть ПБ для соответствующих эволюционных уравнений. Про t -часть можно особо не думать, достаточно помнить, что цепочки совместны с динамикой по t . При построении решений это позволяет определять зависимость постоянных интегрирования от t .

Преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера

Одевающую цепочку можно вывести иначе, стартуя с линейной задачи для КдФ, то есть, уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi. \quad (15)$$

Покажем, что это уравнение допускает преобразования вида

$$\tilde{\psi} = \psi_x - f\psi, \quad (16)$$

то есть, можно так выбрать f , что $\tilde{\psi}$ также будет удовлетворять уравнению Шрёдингера, с новым потенциалом $\tilde{u}$.

Дифференцируя (16) и заменяя ψ_{xx} из (15), получаем

$$\tilde{\psi}_x = \psi_{xx} - f_x\psi - f\psi_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f\psi_x; \quad (17)$$

дифференцируя ещё раз, получаем

$$\tilde{\psi}_{xx} = (u_x - f_{xx} - f(u - \lambda))\psi + (u - 2f_x - \lambda)\psi_x.$$

С другой стороны, должно быть

$$\tilde{\psi}_{xx} = -(\tilde{u} + \lambda)\tilde{\psi} = -(\tilde{u} + \lambda)(\psi_x - f\psi).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$\tilde{u} = u - 2f_x, \quad u_x - f_{xx} + f(\tilde{u} - u) = 0.$$

Заменив во втором уравнении $\tilde{u} - u = -2f_x$ и проинтегрировав, получим

$$u = f^2 + f_x + \alpha, \quad \tilde{u} = u - 2f_x$$

— это в точности соотношения (7), которые были получены из преобразований Миуры.

- Преобразование (16), (7) называется преобразованием Дарбу для уравнения Шрёдингера.
- Различие между ПБ и ПД заключается лишь в том, что ПБ выписывается на полевые переменные u, f , а ПД расширяет это преобразование на волновые функции.
- Напомним, что преобразование Миуры можно линеаризовать:

$$f = \phi_x / \phi, \quad \phi_{xx} = (u - \alpha)\phi.$$

Следовательно, ПД строится по частному решению ϕ уравнения Шрёдингера при частном значении спектрального параметра $\lambda = \alpha$.

- Преобразования $u \rightarrow \tilde{u}$ и $\tilde{u} \rightarrow u$ отличаются только сменой знака f . На решениях уравнения Шрёдингера, действие обратного ПД имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \lambda}(\tilde{\psi}_x + f\tilde{\psi}). \quad (18)$$

Это легко получить из (16) и (17): имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x &= (u - f_x - \lambda)\psi - f\psi_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f(\tilde{\psi} + f\psi) \Rightarrow \\ \tilde{\psi}_x + f\tilde{\psi} &= (u - f_x - f^2 - \lambda)\psi = (\alpha - \lambda)\psi. \end{aligned}$$

- Преобразование в матричном виде, с индексом n :

$$\Psi_{n,x} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = A_n \Psi_n,$$

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} -f_n & 1 \\ f_n^2 + \alpha_n - \lambda & -f_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n,x} \end{pmatrix}$$

(вторая строка A_n получается из (17), если заменить $u = f^2 + f_x + \alpha$).
Условие совместности (полудискретное представление нулевой кривизны)

$$A_{n,x} = U_{n+1}A_n - A_nU_n$$

эквивалентно соотношениям (11) $u_n = f_n^2 + f_{n,x} + \alpha_n$, $u_{n+1} = u_n - 2v_{n,x}$.

Ещё один способ вывода n -солитонного решения КдФ

Переход $u_n \mapsto u_{n+1}$ согласно (11) требует решения уравнения Риккати. Формулы становятся явными, если при некотором n (пусть при $n = 0$) известно достаточно много частных решений уравнения Шрёдингера.

Схема такая:

1. Пусть при $n = 0$ известен набор решений φ_0^j , отвечающих попарно различным частным значениям спектрального параметра:

$$\varphi_{0,xx}^j = (u_0 - \alpha_j)\varphi_0^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

2. Если u_n и φ_n^j известны, используем одну из φ_n^j , чтобы построить f_n как логарифмическую производную. Для определенности, используем φ_n^n :

$$f_n = \varphi_{n,x}^n / \varphi_n^n. \quad (20)$$

3. Применяем ПД для пересчета остальных φ_n^j в φ_{n+1}^j и для определения u_{n+1} :

$$\varphi_{n+1}^j = \varphi_{n,x}^j - f_n \varphi_n^j, \quad u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}. \quad (21)$$

4. Идем к шагу 2 для $n = n + 1$ и повторяем, пока не надоеет.

Отметим, что на каждом шаге пропадает одна волновая функция, так как φ_n^n принадлежит ядру оператора $\partial_x - f_n$.

Если изначально задано N функций φ_0^j , то мы сможем сделать N шагов.

Если функций бесконечно много, то процесс можно продолжать сколько угодно долго. Можно это изобразить такой диаграммой:

	u_0	$\xrightarrow{f_0}$	u_1	$\xrightarrow{f_1}$	u_2	$\xrightarrow{f_2}$	u_3	$\dots$
α_0	φ_0^0	$\rightarrow$	0					
α_1	φ_0^1	$\rightarrow$	φ_1^1	$\rightarrow$	0			
α_2	φ_0^2	$\rightarrow$	φ_1^2	$\rightarrow$	φ_2^2	$\rightarrow$	0	
$\vdots$	$\vdots$							$\ddots$

Замечание 2. На самом деле, пропажа функции восполнима, так как $\partial_x - f_n$ можно применить ко второму линейно-независимому решению уравнения Шредингера, которое находится квадратурой. Это позволяет строить преобразования с кратными значениями α_j (правда, при этом кроме дифференцирования приходится использовать и интегрирование). Для простоты, мы не рассматриваем этот случай; пусть все α_n различны.

Замечание 3. Описанная процедура неоднозначна, так как зависит от нумерации α_j . На n -м шаге можно использовать любую функцию φ_n^j из тех, что остались на данный момент. Результат преобразования на шаге $n + 1$ зависит от этого выбора. Возникает вопрос, сколько разных потенциалов получается за счёт изменения порядка преобразований. Позже мы на него ответим.

Свернем результат n -кратного ПД в компактную вронскианную формулу, типа той, что уже выводилась для n -солитонного решения (лекция 4).

Лемма 1. Для вронскианов $W(y_1, \dots, y_n) = \det(\partial_x^{k-1}(y_j)) \big|_{j,k=1}^n$ верно тождество

$$W(y_1, \dots, y_n) = y_1 W(A(y_2), \dots, A(y_n)), \quad A = \partial_x - y_{1,x}/y_1. \quad (22)$$

Доказательство. (Ср. с Леммой 1 из лекции 5). Обе части равенства — линейные дифференциальные операторы степени $n - 1$ по ∂_x , действующие на y_n . Их ядра совпадают (натянуты на $y_1, \dots, y_{n-1}$), откуда следует, что они отличаются на скалярный множитель. Сравнение коэффициентов при $\partial_x^{n-1}(y_n)$ приводит к равенству (22) для $n - 1$ и утверждение следует по индукции. 

Введем обозначения

$$\Delta_n = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\Delta_n(\varphi) = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}, \varphi),$$

где φ произвольная функция. Для единообразия, пусть

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_0(\varphi) = \varphi.$$

Из формул (20), (21) получаем, пользуясь Леммой 1,

$$\Delta_n = \varphi_0^0 W(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{n-1}) = \varphi_0^0 \varphi_1^1 W(\varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{n-1}) = \dots = \varphi_0^0 \dots \varphi_{n-1}^{n-1}$$

и, аналогично,

$$\Delta_n(\varphi_0^j) = \varphi_0^0 \dots \varphi_{n-1}^{n-1} \varphi_n^j, \quad j \geq n.$$

В результате, волновые функции потенциала u_n выражаются через вронскианы от волновых функций потенциала u_0 :

$$\varphi_n^j = \frac{\Delta_n(\varphi_0^j)}{\Delta_n}, \quad j \geq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, имеем $\varphi_n^n = \Delta_{n+1}/\Delta_n$, откуда получаем выражение для f_n :

$$f_n = \frac{\Delta_{n+1,x}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n,x}}{\Delta_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(при $n = 0$ второе слагаемое равно 0).

Подставляя это в формулу $u_n = u_0 - 2f_{0,x} - \dots - 2f_{n-1,x}$, получаем

$$u_n = u_0 - 2\partial_x^2 \log \Delta_n.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть φ_0^j частные волновые функции потенциала u_0 , отвечающие попарно различным собственным значениям. Потенциал, возникающий в результате n -кратного преобразования Дарбу, построенного по этим функциям, имеет вид

$$u_n = u_0 - 2\partial_x^2 \log W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}). \quad (23)$$

Волновая функция этого потенциала равна

$$\psi_n(x, \lambda) = \frac{W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}, \psi_0(x, \lambda))}{W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1})}.$$

Простейший пример получается для затравочного потенциала $u_0 = 0$. Для него уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\psi_{0,xx} = -\lambda\psi_0$$

и решается явно при любом λ . Чтобы получить решение КдФ, нужно еще восстановить зависимость от t . Это легко, нужно лишь решить вспомогательную линейную задачу по t для ψ_0 :

$$\psi_{0,t} = u_{0,x}\psi_0 - 2(2\lambda + u_0)\psi_{0,x} = -4\lambda\psi_{0,x}.$$

Отсюда следует, что в качестве φ_0^j выступают функции вида

$$\varphi_0^j = a_j e^{k_j x} + b_j e^{-k_j x}, \quad k_j^2 = -\alpha_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что (23) даёт в точности ту же формулу для потенциалов Баргманна, что мы ранее получили по формулам Крамера для системы линейных уравнений, возникающей при обрыве ряда для ψ -функции (лекция 4). Как и там, в этом выводе на параметры нет никаких ограничений, кроме $\alpha_i \neq \alpha_j$, так как это чисто алгебраическая процедура. Напомним, что требование вещественности и регулярности решений приводит к правилу чередования знаков при экспонентах.

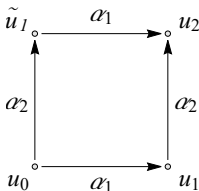
Коммутативность преобразований Бэклунда

Из формулы (23) ясно, что конечный результат n -кратного ПД не зависит от того, в каком порядке используются затравочные волновые функции φ_0^j . Их перенумерация приводит лишь к перестановке столбцов в вронскиане, что не меняет u_n . При этом промежуточные потенциалы, будут, конечно разными.

Пусть B_i обозначает преобразование Дарбу–Бэклунда с параметром α_i . Тогда, если u_0 и u_1 связаны B_1 , а u_1 и u_2 связаны B_2 , то найдется еще потенциал $\tilde{u}_1$, который связан с u_0 и u_2 преобразованиями с переставленными параметрами. Это свойство коммутативности

$$B_2 B_1 = B_1 B_2$$

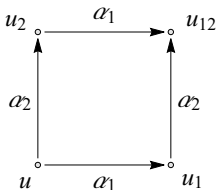
выражается диаграммой Бьянки



Здесь удобно немного сменить обозначения, чтобы подчеркнуть равноправие каждого из путей. Будем теперь обозначать действие B_i приписыванием индекса i :

$$u \xrightarrow{B_1} u_1 \xrightarrow{B_2} u_{12} \xrightarrow{B_3} u_{123} \xrightarrow{B_4} u_{1234} \dots,$$

тогда свойство коммутативности формулируется, как совпадение переменных, отличающихся перестановкой индексов: $u_{12} = u_{21}$.



Это свойство можно доказать и не пользуясь вронскианными формулами. Кроме того, замечательным обстоятельством является то, что между переменными в вершинах квадрата имеется некая алгебраическая связь. В принципе, ее можно вывести прямо для переменных u, u_1, u_2 и u_{12} , но в них она выглядит достаточно громоздко (так как и само ПБ в этих переменных записывается с корнем).

Удобнее всего работать с переменной v , связанной с u соотношением $u = 2v_x$. Для нее преобразование B_i определяется уравнением (14); в новых обозначениях,

$$B_i : \quad v_x + v_{i,x} = (v - v_i)^2 + \alpha_i. \quad (24)$$

Теорема 3. (Формула нелинейной суперпозиции). Пусть переменная v связана с v_i преобразованием B_i и с v_j преобразованием B_j , причем $\alpha_i \neq \alpha_j$. Тогда существует единственная переменная v_{ij} , связанная с v_i преобразованием B_j и с v_j преобразованием B_i . Эта переменная однозначно выражается через v, v_i, v_j из уравнения

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j. \quad (25)$$

Доказательство. Утверждается, что если функции v, v_i и v_j связаны соотношениями

$$v_x + v_{i,x} = (v - v_i)^2 + \alpha_i, \quad v_x + v_{j,x} = (v - v_j)^2 + \alpha_j,$$

то существует функция v_{ij} такая, что

$$v_{i,x} + v_{ij,x} = (v_i - v_{ij})^2 + \alpha_j, \quad v_{j,x} + v_{ij,x} = (v_j - v_{ij})^2 + \alpha_i.$$

Эти уравнения можно сложить с нужными знаками, так что все производные сократятся:

$$(v - v_i)^2 + \alpha_i - (v_i - v_{ij})^2 - \alpha_j = (v - v_j)^2 + \alpha_j - (v_j - v_{ij})^2 - \alpha_i.$$

Нетрудно проверить, что это даёт в точности соотношение (25). Таким образом, если искомая переменная v_{ij} существует, то она единственна и находится из этого уравнения (деление возможно, так как если $v_i = v_j$, то и $\alpha_i = \alpha_j$). Далее, следует еще проверить, что определённая таким образом v_{ij} действительно удовлетворяет двум последним дифференциальным уравнениям. Это делается прямой подстановкой; оказывается, что они выполняются тождественно в силу двух первых уравнений. ■

Применение формулы суперпозиции даёт более эффективный способ построения солитонных решений, чем вронскианы, поскольку вычисление определителей большого порядка — трудоемкая операция.

Проиллюстрируем сначала для $n = 2$.

Пример. Построим 2-солитонное решение. Пусть $v = 0$. Решаем уравнение для v_j , полагая $\alpha_j = -k_j^2$, $k_j > 0$:

$$v_{j,x} = v_j^2 - k_j^2.$$

Зависимость от t уточняется подстановкой в уравнение $v_t = v_{xxx} - 6v_x^2$, в результате получаем решения двух типов

$$v_j = -k_j \tanh X_j \quad \text{или} \quad v_j = -k_j \coth X_j, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 x + d_j \quad (26)$$

(при дифференцировании $\tanh$ получается солитон КдФ, $u = 2v_x$).

Теперь используем формулу суперпозиции, причем возьмём решения разных типов. Это даст

$$v_{ij} = -\frac{\alpha_i - \alpha_j}{v_i - v_j} = \frac{k_j^2 - k_i^2}{k_i \tanh X_i - k_j \coth X_i}.$$

Так как $|\tanh x| < 1$ и $|\coth x| > 1$, то знаменатель не обращается в ноль при выборе $k_j > k_i > 0$. Это и дает, при дифференцировании, 2-солитонное решение КдФ.

Солитонная лестница

Чтобы получить n -солитонное решение, стартуем с тривиального решения $v = 0$ и n штук 1-кинковых вида (26)

$$v_1, \quad v_2, \quad v_2, \quad \dots \quad v_n.$$

Чтобы конечный результат был без полюсов, нужно чередовать $\tanh$ и $\coth$ в зависимости от упорядочения k_j , но не будем за этим следить. На первом шаге эти решения превращаются в 2-кинковые ($n - 1$ штуки)

$$v_{12}, \quad v_{23}, \quad v_{34}, \quad \dots \quad v_{n-1,n}$$

по формуле (25). Здесь каждая пара соседей имеет общего «предка», поэтому можно опять применить (25). Это даёт $n - 2$ решения

$$v_{123}, \quad v_{234}, \quad \dots \quad v_{n-2,n-1,n}.$$

Опять, индексы у соседей отличаются одним элементом. Продолжаем процесс, пока не дойдем до одного n -кинкового решения

$$v_{1,2,\dots,n}.$$

Всего формула суперпозиции применяется $n(n - 1)/2$ раз. При численном счёте это действительно даёт существенный выигрыш по сравнению с вычислением определителя n -го порядка.

Общее определение преобразований Бэклунда

Итак, ПБ — это преобразование, явное или неявное (но не сводимое к точечным заменам переменных), которое устанавливает соответствие между решениями двух уравнений. В общем виде строго сформулировать довольно трудно. Пример с КдФ подпадает под следующее определение.

Определение. Пусть $x = (x, y, \dots)$ — набор независимых переменных (при преобразовании они не меняются). Уравнения

$$A(u, u_x, \dots, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0, \quad B(u, u_x, \dots, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0 \quad (27)$$

задают ПБ между уравнениями $F(u, u_x, \dots) = 0$ и $G(\tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0$, если результат исключения u из уравнений $A = B = F = 0$ в точности эквивалентен уравнению $G = 0$ и наоборот, исключение $\tilde{u}$ из уравнений $A = B = G = 0$ даёт в точности уравнение $F = 0$.

Особенно интересен случай, когда уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают (авто-ПБ). Такие преобразование можно применять многократно, что важно при построении решений. Существование авто-ПБ — признак интегрируемости уравнения.

Классическим примером, даже более прозрачным, чем ПБ для КдФ, служит ПБ для уравнения $\sin$ -Гордона.

Пример (Бэклунд, 1883). Рассмотрим уравнения

$$\tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sin \frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\tilde{u} + u}{2} \quad (28)$$

(x -часть и y -часть ПБ). Продифференцируем первое по y , второе по x , и заменим производные в правых частях в силу самих уравнений. Получим

$$\tilde{u}_{xy} + u_{xy} = 2 \cos \frac{\tilde{u} - u}{2} \sin \frac{\tilde{u} + u}{2}, \quad \tilde{u}_{xy} - u_{xy} = 2 \cos \frac{\tilde{u} + u}{2} \sin \frac{\tilde{u} - u}{2}.$$

Если взять разность, то переменные $\tilde{u}$ сокращаются. Наоборот, при сложении сокращаются u . Следовательно, если переменные u и $\tilde{u}$ связаны соотношениями (28), то они удовлетворяют уравнениям

$$u_{xy} = \sin u, \quad \tilde{u}_{xy} = \sin \tilde{u}.$$

В этом примере при исключении одной из переменных даже не требуется использовать уравнение для неё.

Преобразования Дарбу — это продолжения ПБ на уровень вспомогательных линейных задач. Как мы знаем, для интегрируемых уравнений полезно рассматривать представление нулевой кривизны

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_t = V_x + [V, U].$$

Если у уравнения имеется преобразование Бэклунда $U \mapsto \tilde{U}$, то мы имеем еще одну копию этих уравнений

$$\tilde{\Psi}_x = \tilde{U}\tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi}_t = \tilde{V}\tilde{\Psi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{U}_t = \tilde{V}_x + [\tilde{V}, \tilde{U}].$$

Естественно ожидать, что эти две копии как-то связаны. ПД определяется как преобразование вида

$$\tilde{\Psi} = A\Psi,$$

где матрица A может зависеть от динамических переменных $u, \tilde{u}$, а иногда и от некоторых вспомогательных переменных (типа f для уравнения КдФ). Условие совместности с исходными линейными задачами имеет вид

$$A_x = \tilde{U}A - AU, \quad A_t = \tilde{V}A - AV.$$

Первое уравнение отвечает x -части ПБ, второе — t -части.

Иначе говоря, ПД — это преобразование линейного уравнения, переводящее его решения в решения уравнения такого же вида, но с новыми коэффициентами. А ПБ — это формулы, по которым преобразуются сами коэффициенты.

Если включить зависимость от n , то линейные задачи записываются как

$$\Psi_{n,x} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = V_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = A_n \Psi_n,$$

условия совместности принимают вид

$$U_{n,t} = V_{n,x} + [V_n, U_n], \quad A_{n,x} = U_{n+1} A_n - A_n U_n, \quad A_{n,t} = V_{n+1} A_n - A_n V_n.$$

Домашнее задание

Задача 30. Проверьте, что формула (2) действительно определяет непрерывный предел из цепочки Вольтерры (1) в КдФ.

Задача 31. Проверьте (можно на компьютере (тогда и график постройте)), что функция

$$u_n(t) = \frac{w_{n-2}(t)w_{n+1}(t)}{w_{n-1}(t)w_n(t)}, \quad w_n(t) = 1 + k^n \exp((k - k^{-1})t + d)$$

является точным решением цепочки Вольтерры.

Замечание. Данное решение имеет вид бегущей волны, так как w_n можно представить, при $k > 0$, как $w_n = 1 + \exp((k - k^{-1})t + \log(k)n + d)$. Если искать такие решения прямой подстановкой $u_n(t) = y(an + bt)$ в (1), то на y возникает не ОДУ, а ДУ с *отклоняющимся аргументом*, которое не очень-то ясно, как решать. Альтернативный способ даёт стационарное уравнение типа Новикова для суммы потоков (1) и (3)

$$u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})) + au_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0.$$

Это разностное уравнение, порядок которого легко понизить, в результате (1) сводится к системе из двух ОДУ.

Задача 32. Проверьте, что уравнение sin-Гордона и его ПБ выводятся из линейных уравнений $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_t = V\Psi$, $\tilde{\Psi} = A\Psi$ с матрицами

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} \lambda + \alpha \cos \frac{\tilde{u}-u}{2} & -\alpha \sin \frac{\tilde{u}-u}{2} \\ \alpha \sin \frac{\tilde{u}-u}{2} & -\lambda + \alpha \sin \frac{\tilde{u}-u}{2} \end{pmatrix}.$$