

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 9 · 4 апреля 2022

Конечнозонные решения КдФ

Уравнения Новикова

На прошлой лекции было показано, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \quad (1)$$

допускает бесконечную последовательность коммутативных и локальных симметрий ($u_n = \partial_x^n(u)$, $D = D_x$)

$$u_{t_1} = u_1$$

$$u_{t_2} = u_3 - 6uu_1$$

$$u_{t_3} = D(u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3)$$

$$u_{t_4} = D(u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4)$$

...

Их можно строить при помощи оператора рекурсии

$$R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1},$$

по формуле

$$u_{t_n} = g_n = R^{n-1}(u_x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Симметрией является и произвольная линейная комбинации конечного числа этих потоков. Сегодняшняя цель — исследовать стационарное уравнение для такой симметрии, то есть, ОДУ порядка $2n + 1$ вида

$$G = g_{n+1} + c_1 g_n + \cdots + c_n g_1 = 0, \quad (2)$$

что впервые было сделано в статье

С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974) [54–66](#).

Согласно определению симметрии, (2) определяет связь, совместную с динамикой по t в силу КдФ, так как выполняется тождество

$$D_t(G) = (D^3 - 6uD - 6u_1)(G) = 0.$$

Уравнение (2) один раз интегрируется, так как все g_j — полные производные по x . Уравнение порядка $2n$

$$A = a_{n+1} + c_1 a_n + \cdots + c_n a_1 + c_{n+1} = 0, \quad g_j = D(a_j), \quad (3)$$

также совместно с динамикой по t : можно проверить, что

$$D_t(A) = (D^3 - 6uD)(A) = 0,$$

при условии, что постоянная интегрирования c_{n+1} от t не зависит.

- Уравнение (2) можно записать в виде

$$u_{t_{n+1}} + c_1 u_{t_n} + \dots + c_n u_{t_1} = 0$$

— это линейное уравнение в частных производных первого порядка, общее решение которого представляется в виде

$$u = F(c_1 t_{n+1} - t_n, c_2 t_{n+1} - t_{n-1}, \dots, c_n t_{n+1} - t_1),$$

то есть, функция от n «фаз». Поэтому, решения уравнения Новикова иногда называют ***n-фазными***. Конечно, это еще надо интерпретировать (что такое t_j и чему равна F).

- Другое название — ***n-зонные*** решения, будет объяснено чуть позже.
- Наша цель — показать, что интегрирование уравнения (3) сводится к квадратурам, хотя и довольно сложным.

План лекции:

- разбор случая $n = 1$, сведение к функциям Якоби
- пример численного решения, для $n = 2$
- произвольное n : понижение порядка, уравнения Дубровина
- интегрирование в квадратурах (без θ -функций)

Замечание. Неавтономные (и нелокальные, при $n > 2$) симметрии КдФ

$$u_{\tau_n} = h_n = R^{n-1}(6tu_x - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

приводят к еще более общим связям, совместным с КдФ: вместо (2) получаются так называемые **струнные** уравнения

$$c_0 g_{n+1} + c_1 g_n + \dots + c_n g_1 + h_{m+1} + C_1 h_m + \dots + C_m h_1 = 0.$$

Они изучаются с 90-х, но общей теории до сих пор нет. Это уравнения типа Пенлеве, то есть, у них есть некоторые хорошие аналитические свойства, но в квадратурах они не интегрируются даже при $m = 0$, то есть, если добавлен лишь один простейший член $h_1 = 6tu_x - 1$.

1-зонное решение

При $n = 1$ имеем уравнение

$$u_{xxx} - 6uu_x + cu_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t + cu_x = 0.$$

Очевидно, это решения в виде бегущей волны $u(x, t) = u(x - ct)$ — тот пример, с которого мы начали первую лекцию (с точностью до того, что позже мы поменяли знак u). Однако, тогда мы требовали, чтобы решение было быстроубывающим, что фиксировало нулевые значения первых интегралов. Теперь проанализируем, что будет, если не делать этого. Двукратное интегрирование даёт

$$u_{xxx} = 6uu_x - cu_x \Rightarrow u_x^2 = 2u^3 - cu^2 + c_1u + c_2 = P(u).$$

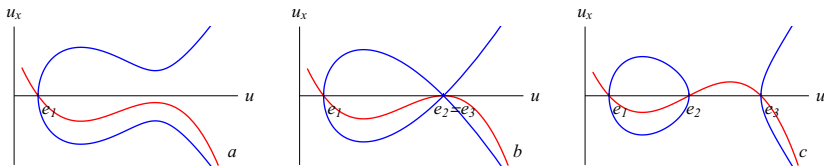
Отсюда u находится в неявном виде при помощи квадратуры:

$$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = x - ct + \delta.$$

Выясним, как нужно выбирать многочлен P и начальное условие, чтобы решение было ограниченным на вещественной оси.

Уравнение $u_x^2 = P(u)$ имеет простую механическую интерпретацию — движение частицы в поле с потенциалом $-\frac{1}{2}P(u)$, на нулевом уровне энергии (x играет роль времени).

Нарисуем в фазовой плоскости (u, u_x) график многочлена $-\frac{1}{2}P(u)$ (красный) и кривую $u_x^2 = P(u)$ (синяя). В зависимости от расположения корней возможны три случая (точнее, пять, так как овал и петля могут вырождаться в точку).



- Движению по овалу отвечает случай частицы в потенциальной яме, это ограниченное периодическое движение.
- Неограниченным ветвям отвечают, в плоскости (x, u) , полюсные решения — частица за конечное время уходит на бесконечность.
- Петля на среднем рисунке получается, если край ямы находится точно на нулевом уровне энергии. Ей отвечает сепаратрисное решение, предельный случай периодического движения с бесконечно большим периодом. Это и есть солитон.

Рассмотрим движение по овалу в случае, когда все корни вещественны и различны. Уравнение для u совпадает, с точностью до линейной замены, с уравнением для $\wp$ -функции Вейерштрасса

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

но, так как эта функция имеет полюс в нуле, то удобнее выразить ответ через эллиптические функции Якоби.

Функции Якоби

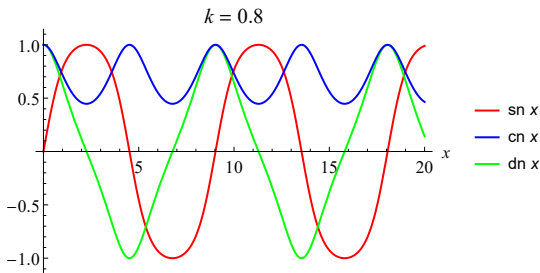
Это решения системы ОДУ с начальными условиями

$$\begin{aligned}(\operatorname{sn} x)' &= \operatorname{dn} x \operatorname{cn} x, & (\operatorname{cn} x)' &= -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, & (\operatorname{dn} x)' &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x, \\ \operatorname{sn} 0 &= 0, & \operatorname{cn} 0 &= 1, & \operatorname{dn} 0 &= 1.\end{aligned}$$

Параметр k принимает значения $0 \leq k \leq 1$.

Первые интегралы:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1.$$



Нетрудно проверить, что если положить

$$u = K_1 + K_2 \operatorname{cn}^2(bx; k),$$

то u_x^2 будет равно многочлену третьей степени от cn^2 , то есть, от самого u .

Подставляя в уравнение $u_x^2 = P(u) = 2u^3 - cu^2 + c_1u + c_2$ и сравнивая коэффициенты при u^3 и u^2 , выражаем K_1 , K_2 через b , и k :

$$u(x, t) = \frac{4b^2(2k - 1) + c}{6} - 2b^2k \operatorname{cn}^2(b(x - ct) + d, k).$$

Это так называемая **кноидальная** волна.

Коэффициенты c_1 и c_2 также выражаются через b , и k , но эти формулы особо не нужны.

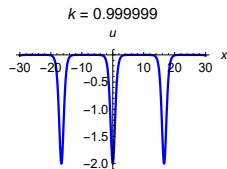
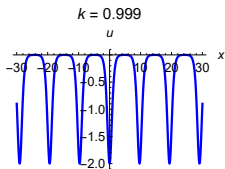
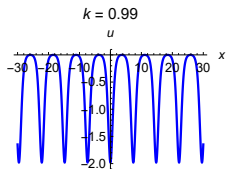
За счёт растяжения можно положить $b = 1$. Преобразование Галилея позволяет уничтожить свободный член (что отвечает $c = 4 - 8k$), тогда график будет касаться оси x . Наконец, d уничтожается сдвигом x или t и решение приводится к виду

$$u = -2k \operatorname{cn}^2(x + 8kt).$$

Здесь остаётся лишь один существенный параметр k .

В пределе $k \rightarrow 0$ функции Якоби переходят в обычную тригонометрию, но при этом амплитуда u стремится к 0.

Предел $k \rightarrow 1$ отвечает солитону. Пики в кноидальной волне разъезжаются друг от друга и в пределе остается солитонное решение.



Пример численного решения при $n = 2$

Уравнение (3) эквивалентно $2n$ -мерной динамической системе по x , относительно переменных $u, u_1, \dots, u_{2n-1}$. Само уравнение КдФ тоже можно переписать как динамическую систему по t для этих переменных. На этом языке совместность означает, что соответствующие векторные поля коммутируют.

При $n = 2$ имеем такие две совместные системы (см. вывод в программе)

$$\begin{cases} u_x = u_1, \\ u_{1,x} = u_2, \\ u_{2,x} = u_3, \\ u_{3,x} = 10uu_2 + 5u_1^2 - 10u^3 - c_1(u_2 - 3u^2) - c_2u - c_3, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_t = u_3 - 6uu_1, \\ u_{1,t} = (4u - c_1)u_2 - u_1^2 - 10u^3 + 3c_1u^2 - c_2u - c_3, \\ u_{2,t} = (4u - c_1)u_3 + 2u_1u_2 - (30u^2 - 6c_1u + c_2)u_1, \\ u_{3,t} = 6u_1u_3 + 2u_2^2 + (10u^2 - 8c_1u - c_2 + c_1^2)u_2 - (40u - c_1)u_1^2 \\ \quad - 40u^4 + 22c_1u^3 - (4c_2 + 3c_1^2)u^2 + (c_1c_2 - 4c_3)u + c_1c_3. \end{cases} \quad (5)$$

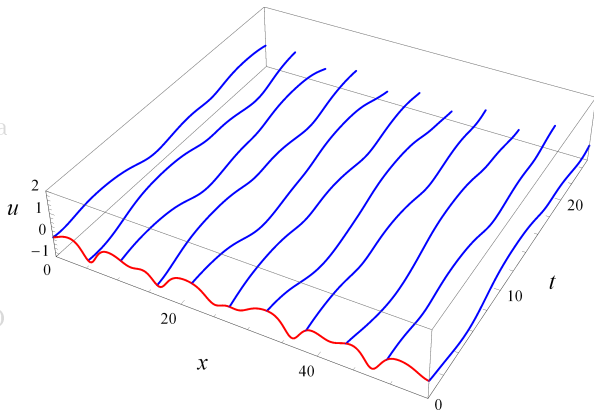
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (4) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (5) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (4) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (5) по t до некоторого t_1 .

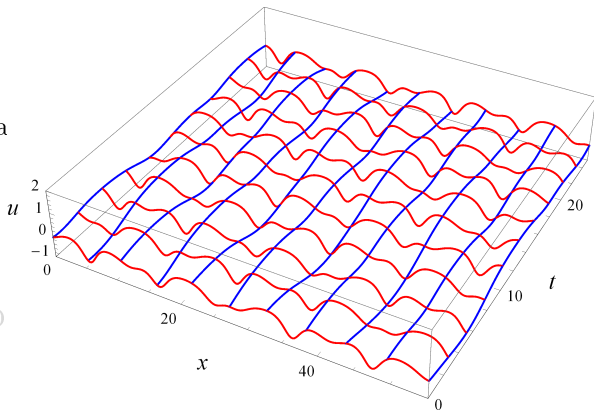
Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,

получим сечения,

параллельные оси x .

Коммутативность гарантирует, что оба набора кривых пересекаются в точках сетки, так что получается некоторая поверхность. Если взять шаги достаточно маленькими, получается 3D график решения.



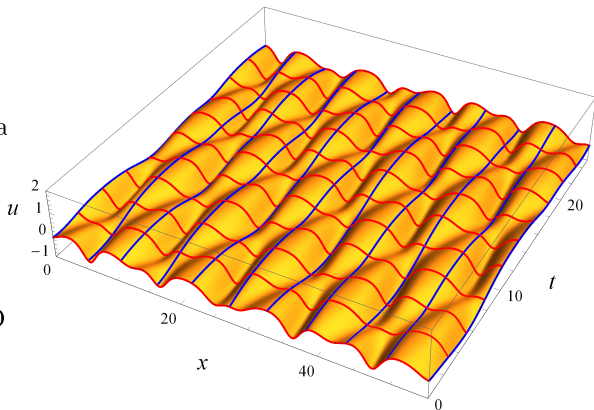
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (4) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (5) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



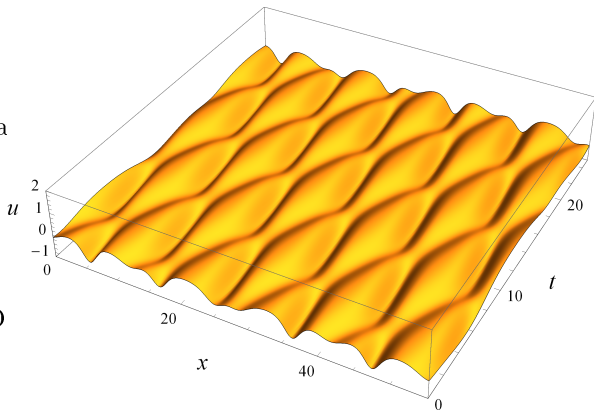
Зададим параметры и начальные условия u , u_1 , u_2 , u_3 при $(x, t) = (0, 0)$.

Решим численно задачу Коши для системы (4) по x до некоторого x_1 .

Полученное решение в точках $x + j\Delta x$ используем в качестве начальных условий для системы (5) по t до некоторого t_1 .

Получим набор кривых, представляющих сечения графика решения, параллельные оси t . Шаг Δx влияет не на точность вычисления, а лишь на то, насколько плотно расположены кривые.

Меняя ролями x и t ,
получим сечения,
параллельные оси x .
Коммутативность
гарантирует, что оба набора
кривых пересекаются в
точках сетки, так что
получается некоторая
поверхность. Если взять
шаги достаточно
маленькими, получается 3D
график решения.



Как и в однозонном случае, важное значение имеет выбор параметров и начальных условий. Если выбрать неудачно, то решение будет иметь полюсы: при численном счёте решение станет неограниченно расти и произойдет ошибка.

С другой стороны, если выбрать *очень* удачно, то можно получить и двухсолитонные решения — как и предыдущем примере, они являются специальными сепаратрисными решениями.

Уравнения Дубровина

Перейдем к произвольному n . Ясно, что в переменных u_j работать трудно. Необходимо выбрать некоторые новые координаты, что было сделано в статье

Б.А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. *Функц. анализ* **9:3** (1975) [41–51](#).

Как и для солитонов, оказывается полезным ввести в игру спектральный параметр λ (будем обозначать $\zeta = -4\lambda$). Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. Уравнение Новикова (3) эквивалентно уравнению

$$\zeta Q^2 = 2QQ_{xx} - Q_x^2 - 4uQ^2 + P, \quad (6)$$

с полиномиальными $Q(\zeta)$ и $P(\zeta) = \text{const}$,

$$Q = \zeta^n + q_1(x, t)\zeta^{n-1} + \cdots + q_n(x, t), \quad P = \zeta^{2n+1} + \gamma_1\zeta^{2n} + \cdots + \gamma_{2n+1}.$$

Доказательство. Напомним, что величины a_j из (3) служат коэффициентами производящей функции

$$A = -a_0 - a_1/\zeta - a_2/\zeta^2 - \dots - a_n/\zeta^n - \dots, \quad a_0 = -1/2, \quad \zeta = -4\lambda,$$

удовлетворяющей уравнению

$$\zeta A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_xA. \quad (7)$$

Уравнение Новикова (3)

$$A = a_{n+1} + \dots + c_n a_1 + c_{n+1} a_0 = 0$$

означает, что существует ряд с постоянными коэффициентами

$$C = \zeta^n (1 + c_1/\zeta + c_2/\zeta^2 + \dots),$$

такой, что $Q = CA$ — многочлен. Он также удовлетворяет (7):

$$\zeta Q_x = Q_{xxx} - 4uQ_x - 2u_xQ.$$

Это уравнение один раз интегрируется, после умножения на $2Q$ (раньше мы использовали это для доказательства локальности a_j), что и дает (6) с постоянной интегрирования P . Так как A — многочлен, то и P — многочлен, причем уравнение (6) по прежнему совместно с КдФ, если P не зависит от t . 

Замечание. При построении n -солитонных решений (потенциалов Баргманна) мы требовали существования решения уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$$

полиномиального по $z = \sqrt{-\lambda}$, с точностью до множителя e^{zx+4z^3t} .

(ДЗ) Легко проверить, что произведение любых двух ψ -функций удовлетворяет уравнению (7).

Поэтому в качестве Q можно взять $Q = \psi(z)\psi(-z)$. Для n -солитонного решения это будет, очевидно, многочлен по ζ степени n . Следовательно, n -солитонные решения удовлетворяют уравнению Новикова (6).

Обратное неверно — не все решения (6) являются n -солитонными. Это лишь подкласс специальных, сепаратрисных решений, выделенных условием быстроубывания. Для общего конечнозонного решения условие полиномиальности ψ -функций не выполняется.

Нужная замена переменных — переход к нулям многочленов Q, P . Пусть

$$Q(\zeta) = (\zeta - y_1) \cdots (\zeta - y_n), \quad P(\zeta) = (\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_{2n+1}).$$

Если в (6) положить $\zeta = y_j$, слагаемые с Q^2 и QQ_{xx} исчезнут и останется

$$Q_x^2|_{\zeta=y_j} = P(y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как

$$Q_x|_{\zeta=y_j} = -y_{j,x} \prod_{i \neq j} (y_j - y_i),$$

то получается система ОДУ на переменные y_j — уравнения Дубровина

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}. \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

Фактически, понижение порядка происходит при переходе от уравнения Новикова (3) к проинтегрированному уравнению (6).

Исходное уравнение (3) имело порядок $2n$ и содержало $n + 1$ постоянную $c_1, \dots, c_{n+1}$. Мы свели её к системе порядка n , содержащей $2n + 1$ постоянную $e_1, \dots, e_{2n+1}$. При замене ничего не потерялось.

Потенциал u восстанавливается по e_j, y_j согласно формуле

$$4u = -e_1 - \dots - e_{2n+1} - 2y_1 - \dots - 2y_n, \quad (9)$$

что следует прямо из (6).

Кроме системы (8) по $x = t_1$, можно выписать системы, определяющие динамику по другим временам. Если ∂_{t_k} отвечает многочлену $A^{(k)} = a_0 \zeta^k + \dots + a_k$ в линейной задаче, то для Q имеется уравнение

$$Q_{t_k} = 2(A^{(k)}Q_x - A_x^{(k)}Q). \quad (10)$$

Подставляя $\zeta = y_j$, получаем $Q_{t_k}|_{\zeta=y_j} = 2A^{(k)}Q_x|_{\zeta=y_j}$, то есть

$$\frac{y_{j,t_k}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{2A^{(k)}(y_j)}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

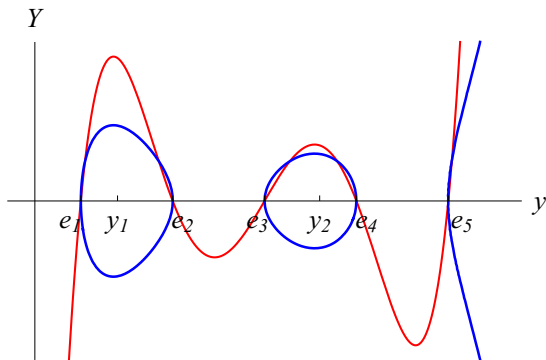
Так как $Q = CA$, то a_j — это линейные комбинации q_j . В свою очередь, q_j выражаются через симметрические многочлены от корней y_j , что даёт замкнутую систему. Например, дифференцированию ∂_t в силу КдФ отвечает $A^{(2)} = -2\lambda - u$, поэтому

$$\frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{y_j - 2u}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим качественное поведение решения, в предположении, что все корни e_k различны и вещественны; для определённости, пусть

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{2n+1}.$$

Тогда, для того чтобы решение системы было вещественным, нужно, чтобы все переменные y_j лежали в тех интервалах, где $P(y) \geq 0$, то есть, $[e_{2k-1}, e_{2k}]$, $k = 1, \dots, n$, или $[e_{2n+1}, \infty)$.



На рисунке синей линией показана кривая $Y^2 = P(y)$, а красной — сам многочлен $Y = P(y)$.

Если начальные условия для y_i и y_j попадут в один интервал, в решении возникнет особенность из-за знаменателя $y_i - y_j$ в правой части (8).

Также, решение будет неограниченным, если какая-то переменная лежит в интервале $[e_{2n+1}, \infty)$. Таким образом, для вещественности и ограниченности решения следует задавать начальные условия для y_j так:

$$e_1 \leq y_1 \leq e_2 < e_3 \leq y_2 \leq e_4 < \dots < e_{2n-1} \leq y_n \leq e_{2n} < e_{2n+1}.$$

В этом случае переменные y_j отделены друг от друга и никаких особенностей в системе (8) возникнуть не может.

Переменные y_j крутятся каждая в своем овале, поэтому из формулы (9) ясно, что решение представляет собой ограниченную, квазипериодическую функцию по x и t .

Случай, когда все пары корней e_{2k} и e_{2k+1} сливаются, отвечает n -солитонному вырождению (конечно, возможны случаи, когда сливаются не все пары, тогда получается солитонное решение на конечнозонном фоне).

Замечание. Возвращаясь к ψ -функциям, можно доказать (ДЗ), что они строятся по формуле

$$\psi(x, \lambda) = Q^{1/2} \exp \left(\pm \sqrt{P(\zeta)} \int_{x_0}^x \frac{ds}{Q} \right), \quad \zeta = -4\lambda. \quad (11)$$

Рассмотрим последовательность интервалов, на которых P меняет знак.

При тех ζ , для которых $P(\zeta) < 0$ имеем экспоненту с мнимым показателем и регулярным подынтегральным выражением (поскольку нули A лежат там, где $P \geq 0$). Следовательно, для таких ζ существует пара ограниченных, осциллирующих ψ -функций. Такие интервалы, следовательно, относятся к непрерывному спектру, они называются *разрешенными (стабильными) зонами*.

Дополнительные интервалы (в которых лежат нули y_j) называются *запрещенными зонами*, отвечающие им ψ -функции растут на одной или другой бесконечности.

Для ограниченного потенциала общего вида число чередующихся стабильных и нестабильных зон бесконечно. Решения уравнения Новикова характеризуются тем, что это число конечно, что и объясняет название.

В элементарных функциях уравнения Дубровина не решаются, но они интегрируются в квадратурах. При $n = 1$, ответ записывается неявно через неполный эллиптический интеграл, обращение которого — эллиптическая функция.

При $n = 2$ имеем ($2E = e_1 + \dots + e_5$)

$$\begin{cases} \frac{y_{1,x}}{\sqrt{P(y_1)}} = \frac{1}{y_1 - y_2}, \\ \frac{y_{2,x}}{\sqrt{P(y_2)}} = \frac{1}{y_2 - y_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y_{1,t}}{\sqrt{P(y_1)}} = \frac{E + y_2}{y_1 - y_2}, \\ \frac{y_{2,t}}{\sqrt{P(y_2)}} = \frac{E + y_1}{y_2 - y_1}. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольную точку y_0 и определим функции

$$F_k(y_1, y_2) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y^k dy}{\sqrt{P(y)}} + \int_{y_0}^{y_2} \frac{y^k dy}{\sqrt{P(y)}}, \quad k = 0, 1.$$

Несложно проверить, что

$$F_{0,x} = 0, \quad F_{1,x} = 1, \quad F_{0,t} = 4, \quad F_{1,t} = 4E, \quad \Rightarrow$$

$$F_0(y_1, y_2) = 4t + \delta_0, \quad F_1(y_1, y_2) = x + 4Et + \delta_1$$

— это дополнительные первые интегралы. Задача сводится к разрешению этих уравнений относительно y_1, y_2 .

В общем случае имеем ($E = e_1 + \dots + e_{2n+1}$, $Y = y_1 + \dots + y_n$)

$$\frac{y_{j,x}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{1}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)}, \quad \frac{y_{j,t}}{\sqrt{P(y_j)}} = \frac{E + Y - y_j}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)}.$$

Определим

$$F_k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n \int_{y_0}^{y_j} \frac{y^k dy}{\sqrt{P(y)}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Имеет место тождество (почти элементарное)

$$\sum_{j=1}^n \frac{y_j^k}{\prod_{s \neq j} (y_j - y_s)} = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, n-2, \\ 1 & k = n-1, \\ \sum y_j & k = n. \end{cases} \quad (12)$$

Используя его, можно показать, что

$$F_{0,x} = \dots = F_{n-2,x} = 0, \quad F_{n-1,x} = 1,$$

$$F_{0,t} = \dots = F_{n-3,t} = 0, \quad F_{n-2,t} = 4, \quad F_{n-1,t} = 4E.$$

Опять, задача сводится к разрешению уравнений

$$F_0(y_1, \dots, y_n) = \delta_0, \quad \dots, \quad F_{n-1}(y_1, \dots, y_n) = x + 4Et + \delta_n,$$

относительно $y_1, \dots, y_n$.

Замечание. Так как $\sqrt{P(y)}$ имеет точки ветвления, то значения интегралов F_k зависят от пути интегрирования, то есть, это многозначная функция. Правильно понимать их, как симметрические функции от n переменных на римановой поверхности гиперэллиптической кривой

$$\Gamma : Y^2 = P(y).$$

На этой поверхности есть $2n$ независимых циклов, при обходе вдоль которых значения функций меняются на некоторые периоды. В результате, вектор $(F_0, \dots, F_{n-1})$ лежит на $2n$ -мерном торе, который называется многообразием Якоби гиперэллиптической кривой.

Преобразование $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (F_0, \dots, F_{n-1})$ осуществляет отображение Абеля

$$\Gamma^n / S_n \rightarrow \mathbb{C}^{2n} / \Lambda,$$

где S_n — симметрическая группа, Λ — решетка периодов. Задача построения обратного отображения решается при помощи тета-функций на многообразии Якоби.

Домашнее задание

Задача 26. Проверьте, что если ψ , ϕ удовлетворяют уравнениям

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

то $Q = \psi\phi$ удовлетворяет (6). Как при этом выражается P через ψ и ϕ ? Используйте это для обоснования того, что P не зависит от x и t , а также того, что многосолитонным решениям отвечает случай, когда P имеет кратные корни.

Задача 27. В условиях предыдущей задачи, проверьте, что

$$Q_t = 2(aQ_x - a_xQ),$$

что подтверждает уравнение (10).

Задача 28. Докажите формулу (11).

Задача 29. Докажите тождество (12).