В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 8 · 28 марта 2022

# Высшие симметрии

# Симметрии эволюционных уравнений

Напомним некоторые определения (см. лекцию 2). Пусть дано уравнение

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_j = \partial_x^j(u).$$

Его симметрией называется уравнение

$$u_\tau = g(x, u, u_1, \dots, u_m)$$

такое, что $D_\tau(f) = D_t(g)$, где $D_t$ — дифференцирование в силу первого уравнения, $D_\tau$ — в силу второго. Для простоты, будем считать, что правые части не зависят явно от $t$ и $\tau$.

- $\mathcal{F}$ — множество гладких функций от $x$ и конечного числа динамических переменных $u_j$
- оператор полной производной по $x$

$$D = D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots$$

- оператор линеаризации

$$f_* = \partial_0(f) + \partial_1(f)D + \dots + \partial_n(f)D^n, \quad f = f(x, u, \dots, u_n) \in \mathcal{F}$$

- эволюционное дифференцирование

$$D_t = \nabla_f = \partial_t + f\partial_0 + D(f)\partial_1 + \dots + D^n(f)\partial_n + \dots, \quad f \in \mathcal{F}$$

  определяет дифференцирование в силу уравнения $u_t = f$ (если то, что дифференцируется, может явно зависеть от $t$, то определение нужно поменять на $D_t = \partial_t + \nabla_f$).
- выполняются тождества, для любых $f, g \in \mathcal{F}$

$$\nabla_f(g) = g_*(f), \quad [D, \nabla_f] = 0$$

- эквивалентные определения симметрии:

$$\nabla_f(g) = \nabla_g(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\nabla_f - f_*)(g) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[\nabla_f, \nabla_g] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\nabla_f - f_*, \nabla_g - g_*] = 0.$$

# Зачем нужны симметрии?

- Прежде всего, они помогают строить точные решения. Фактически, все точные решения получаются понижением размерности задачи, то есть, к заданному уравнению приписывается какое-нибудь ОДУ:

$$u_t = f, \quad g = 0, \quad f, g \in \mathcal{F}$$

и ищутся решения, удовлетворяющие обоим уравнениям. За счет ОДУ задача сводится к конечномерной системе. Однако, какое попало ОДУ приписывать нельзя, так как эта система, вообще говоря будет переопределенной. Нужно, чтобы второе уравнение было совместно с первым:

$$D_t(g)\Big|_{g=0} = 0.$$

Откуда брать $g$ с таким свойством? Годятся стационарные уравнения для симметрий: так как для симметрий

$$D_t(g) = f_*(g),$$

то $D_t(g) = 0$ если $g = 0$.

Оказывается, что многосолитонные решения КдФ вкладываются в эту схему: они удовлетворяют стационарным уравнениям для симметрий КдФ. При этом условие быстроубывания фиксирует нулевые значения первых интегралов для этих стационарных уравнений. Если же не требовать быстроубывания, то возникают более общие решения — так называемые конечнозонные.

Если вдобавок использовать симметрии с явной зависимостью от $t$, то это приводит к решениям, выражающимся через трансценденты Пенлеве или их высшие аналоги.

Конечнозонными решениями мы займемся на следующей лекции, уравнениями Пенлеве еще позже, а на этой лекции научимся выводить сами симметрии.

- Ещё одно приложение симметрий — классификационное.

У произвольного уравнения симметрий порядка выше 1 (отвечающих классическим или групповым симметриям), как правило, нет. Наличие симметрий старшего порядка является исключительным свойством и, по-видимому, характеризует интегрируемые уравнения.

Гипотеза Фокаса (1980) утверждает, что если уравнение имеет хотя бы одну высшую симметрию, то их бесконечно много. Есть некоторые контрпримеры, но, по существу, эта гипотеза, вероятно, верна с какими-то оговорками.

Для заданного уравнения, вычисление симметрий заданного порядка — алгоритмическая процедура. Поиск всех уравнений, допускающих симметрии — существенно сложнее, но для некоторых отдельных классов эта задача решена (результаты Шабата и др., 1980–90), например, для уравнений вида

$$u_t = a(x, u, u_1, u_2),$$
$$u_t = a(x, u, u_1, u_2)u_3 + b(x, u, u_1, u_2),$$
$$u_t = u_5 + b(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$

а также для систем

$$u_t = u_2 + a(x, u, v, u_1, v_1), \quad v_t = -v_2 + b(x, u, v, u_1, v_1).$$

# Классические симметрии

Очень часто уравнение (интегрируемое или нет) допускает некоторую непрерывную группу симметрий, то есть преобразований зависимых и независимых переменных, переводящих решения в решения. В физике часто встречаются группы переносов, преобразований Галилея, Лоренца, растяжения, вращения...

Такие симметрии называются классическими. Переходя от группы к ее алгебре Ли (то есть, к инфинитезимальным преобразованиям), получаем запись симметрии в виде эволюционного уравнения (уравнение Ли).

Изучение классических симметрий очень важно, но мы ограничимся парой примеров. Подробнее можно почитать в книгах


- Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.
- Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

**Пример 1.** Уравнение магнетика Гайзенберга

$$s_t = [s, s_{xx}], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad |s| = 1, \tag{1}$$

где $[,]$ обозначает векторное произведение. Очевидно, это уравнение инвариантно относительно группы 3-мерных вращений $\tilde{s} = As$, где $A \in \mathrm{SO}(3)$, то есть $AA^t = 1$, $\det A = 1$.

Однопараметрическая подгруппа вращений задается матрицами $A = \exp(\tau a)$, $a = -a^t$, то есть $a \in \mathrm{so}(3)$. Можно определить

$$s(x, t, \tau) = \exp(\tau a) s(x, t, 0).$$

Инфинитезимальное преобразование определяется при дифференцировании по $\tau$

$$s_\tau = as, \quad a = -a^t.$$

Легко проверить, что это — симметрия (1), то есть $(s_t)_\tau = (s_\tau)_t$.

При этом сами такие векторные поля не коммутируют, а образуют алгебру изоморфную $so(3)$: если

$$s_T = bs, \quad b = -b^t,$$

то $(s_\tau)_T - (s_T)_\tau = [a, b]$.

Кроме того, к классическим симметриям относятся однопараметрические подгруппы сдвигов по $x$ и $t$ (вообще, это верно для любых автономных уравнений):

$$\tilde{s}(x,t) = \tilde{s}(x+\tau,t), \qquad \tilde{s}(x,t) = \tilde{s}(x,t+\tau).$$

Ясно, что им отвечают дифференцирования

$$s_\tau = s_x, \quad s_\tau = [s, s_{xx}],$$

то есть, $s_\tau$ отождествляется с самим уравнением.

У нас не будет времени на изучение уравнения (1), но отметим, что оно имеет приложения в теории ферромагнетизма и является $S$-интегрируемым (как и более общее уравнение Ландау–Лифшица $s_t = [s, s_{xx} + Js]$, где $J$ диагональная матрица). Соответственно, у него есть и высшие симметрии.

**Пример 2.** Все классические симметрии уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

исчерпываются следующими:

$$\begin{aligned}
&u_{t_1} = u_x, && \text{сдвиг по } x \\
&u_{t_2} = u_{xxx} - 6uu_x, && \text{сдвиг по } t \\
&u_{\tau_1} = 6tu_x - 1, && \text{преобразование Галилея} \\
&u_{\tau_2} = 3t(u_{xxx} - 6uu_x) + xu_1 + 2u && \text{растяжение}
\end{aligned}$$

На уровне группы, преобразование Галилея определяется заменой

$$\tilde{x} = x + 6\tau_1 t, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{u} = u + \tau_1.$$

Если $u(x,t)$ — решение КдФ, то $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ тоже, при любом $\tau_1$, причем при $\tau_1 = 0$ преобразование тождественно. Запишем это в виде

$$u(x,t,\tau_1) = \tilde{u}(x + 6\tau_1 t, t) - \tau_1,$$

тогда дифференцирование по $\tau_1$ (в точке $\tau_1 = 0$) даст симметрию в инфинитезимальной форме.

Аналогично, растяжение отвечает группе

$$\tilde{x} = e^{\tau_2} x, \quad \tilde{t} = e^{3\tau_2} t, \quad \tilde{u} = e^{-2\tau_2} u.$$

То есть, однопараметрическое семейство решений имеет вид

$$u(x, t, \tau_2) = e^{2\tau_2} \tilde{u}(e^{\tau_2} x, e^{3\tau_2} t).$$

Дифференцируем по $\tau_2$, полагаем $\tau_2 = 0$, получаем симметрию в инфинитезимальной форме

$$u_{\tau_2} = 3tu_t + xu_1 + 2u = 3t(u_{xxx} - 6uu_x) + xu_1 + 2u.$$

# Оператор рекурсии

Пусть дано некоторое эволюционное уравнение

$$u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_n). \tag{2}$$

**Определение 1.** Оператор $R$ (по $D$) называется оператором рекурсии для (2), если он переводит любую симметрию этого уравнения в симметрию (то есть, если $u_\tau = g$ — симметрия, то и $u_T = R(g)$ — симметрия).

**Утверждение 2.** Для того, чтобы $R$ был оператором рекурсии, достаточно, чтобы он удовлетворял соотношению

$$\nabla_f(R) = [f_*, R]. \tag{3}$$

Здесь $\nabla_f(R)$ обозначает оператор, получающийся из $R$ дифференцированием всех коэффициентов в силу (2). Этот оператор можно записать также, как

$$\nabla_f(R) = [\nabla_f, R].$$

Действительно, так как $\nabla_f$ коммутирует с $D$, то для любого оператора $R$ и функции $h$ имеем

$$\nabla_f(R)(h) = \nabla_f(R(h)) - R(\nabla_f(h)) = [\nabla_f, R](h).$$

***Доказательство.*** С учётом сделанного замечания, (3) эквивалентно

$$[\nabla_f - f_*, R] = 0.$$

По определению, симметрия $u_\tau = g$ характеризуется равенством

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0.$$

Применяя $R$, получаем

$$R((\nabla_f - f_*)(g)) = (\nabla_f - f_*)(R(g)) = 0,$$

что и означает, что $u_T = R(g)$ — тоже симметрия. ■

***Пример 3.*** Проверим, что $R = D + u_x$ — оператор рекурсии для потенциального уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + u_x^2. \tag{4}$$

Имеем

$$f = u_{xx} + u_x^2, \quad f_* = D^2 + 2u_x D = (D + u_x)(D + u_x) - u_{xx} - u_x^2 = R^2 - f,$$

тогда

$$\begin{aligned} &\nabla_f(R) = \nabla_f(u_x) = D(f), \\ &[f_*, R] = [R^2 - f, R] = [R, f] = [D + u_x, f] = [D, f] = D(f), \end{aligned}$$

результаты совпали.

Следовательно, (4) допускает симметрии

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= (D + u_x)(u_{xx} + u_x^2) = u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3, \\ u_{t_4} &= u_{xxxx} + 4u_x u_{xxx} + 3u_{xx}^2 + 6u_x^2 u_{xx} + u_x^4 \end{aligned}$$

и так далее.

# Высшие уравнения КдФ

Вспомним вывод КдФ (лекция 3) из условия совместности уравнений

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \qquad \psi_t = b\psi + 2a\psi_x. \tag{5}$$

В уравнении $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$ нужно исключить $\psi_{xx}$, $\psi_{xxx}$ и приравнять нулю коэффициенты при $\psi$ и $\psi_x$. Одно из уравнений даёт $b_x = -a_{xx}$ и можно принять $b = -a_x$, без потери общности. Второе уравнение даёт

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a.$$

Эквивалентно, (5) можно переписать в матрицах как

$$\Psi_x = U\Psi, \qquad \Psi_t = V\Psi,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \end{pmatrix}.$$

Тогда условие совместности имеет вид (представление нулевой кривизны)

$$(U\Psi)_t = (V\Psi)_x \quad \Leftrightarrow \quad (U_t + UV)\Psi = (V_x + VU)\Psi \quad \Leftrightarrow$$

$$U_t - V_x = [V, U].$$

Итак, условие совместности сводится к уравнению

$$- u_t - 4\lambda a_x = a_{xxx} - 4ua_x - 2u_x a. \tag{6}$$

Если взять $a = -2\lambda - u$, то оно превращается в КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

Но, это не единственная возможность. Пусть $a$ — многочлен по $\lambda$. Удобно его записывать в таком виде, из-за коэффициентов в левой части (6):

$$a = -a_0(-4\lambda)^n - a_1(-4\lambda)^{n-1} - \cdots - a_n. \tag{7}$$

Подставим это в (6) и соберем коэффициенты:

$$\begin{array}{lcl}
(-4\lambda)^{n+1} & : & a_{0,x} = 0 \\
(-4\lambda)^{n} & : & a_{1,x} = a_{0,xxx} - 4ua_{0,x} - 2u_x a_0 \\
(-4\lambda)^{n-1} & : & a_{2,x} = a_{1,xxx} - 4ua_{1,x} - 2u_x a_1 \\
\quad\dots & : & \qquad\qquad \dots \\
(-4\lambda)^{1} & : & a_{n,x} = a_{n-1,xxx} - 4ua_{n-1,x} - 2u_x a_{n-1} \\
\quad 1 & : & u_t = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n.
\end{array}$$

Получаются рекуррентные соотношения, из которых находятся $a_0, \dots, a_n$, а последнее уравнение превращается в эволюционное уравнение на $u$.

Отметим, что последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ строится по одним и тем же формулам при всех $n$. От $n$ зависит лишь, в каком месте она обрывается. Естественно, для разных $n$ будут получаться разные уравнения для $u$, будем обозначать соответствующее время через $t_n$:

$$u_{t_n} = g_n[u] = a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n.$$

Пусть

$$K = D^3 - 4uD - 2u_x,$$

тогда имеем

$$g_j = D(a_{j+1}) = K(a_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad a_0 = \mathrm{const}\,. \tag{8}$$

Положим $a_0 = -1/2$, будем пренебрегать константами интегрирования и обозначим $u_j = \partial_x^j(u)$, тогда

$$\begin{aligned}
&g_1 = D(a_1) = u_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = u;\\
&g_2 = D(a_2) = K(a_1) = u_3 - 6uu_1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = u_2 - 3u^2;\\
&g_3 = D(a_3) = K(a_2) = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1 \quad \Rightarrow\\
&\qquad\qquad\qquad a_3 = u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3
\end{aligned}$$

и так далее.

В результате вычислений по этой схеме возникает последовательность уравнений

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_1 \\
u_{t_2} &= u_3 - 6uu_1 \\
u_{t_3} &= D(u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3) \\
u_{t_4} &= D(u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4) \\
u_{t_5} &= D(u_8 - 18uu_6 - 54u_1u_5 - 114u_2u_4 - 69u_3^2 + 126u^2u_4 \\
&\qquad + 504uu_1u_3 + 378uu_2^2 + 462u_1^2u_2 - 420u^3u_2 - 630u^2u_1^2 + 126u^5) \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Первое уравнение — классическая симметрия сдвига по $x$, второе — само уравнение КдФ, следующие — высшие уравнения КдФ.

Если учесть константы интегрирования, то можно получить уравнение, отвечающее произвольной линейной комбинации конечного числа этих потоков, которые играют роль базиса в бесконечномерном линейном пространстве:

$$u_\tau = \alpha_1 u_{t_n} + \alpha_2 u_{t_{n-1}} + \cdots + \alpha_n u_{t_1}. \tag{9}$$

Это линейное пространство называется *иерархией* уравнения КдФ.

Возникает два вопроса:

- Переход от $a_j$ к $a_{j+1}$ включает в себя интегрирование. Как видим, на первых нескольких шагах $a_j$ (а следовательно и $g_j$) находятся в замкнутом виде, как многочлены от $u_n$, но возникает вопрос, всегда ли так будет.
- Являются ли высшие уравнения симметриями для КдФ?

Покажем, что ответы на оба вопроса положительны.

# Локальность высших уравнений КдФ

Оказывается, интегрирование можно провести сразу для всех $a_j$. Рассмотрим производящую функцию

$$A = -a_0 - a_1/(-4\lambda) - a_2/(-4\lambda)^2 - \dots - a_n/(-4\lambda)^n - \dots,$$

то есть, делим многочлен (7) на $(-4\lambda)^n$ и устремляем $n$ к бесконечности. В результате, в уравнении (6) пропадает свободный член $u_t$ и для $A$ получается уравнение

$$-4\lambda A_x = A_{xxx} - 4uA_x - 2u_xA \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda A_x = K(A). \tag{10}$$

Оно допускает интегрирующий множитель $2A$:

$$-8\lambda AA_x = 2AA_{xxx} - 8uAA_x - 4u_xA^2 \quad \Rightarrow$$

$$-4\lambda A^2 = 2AA_{xx} - A_x^2 - 4uA^2 + c, \tag{11}$$

где $c = -4a_0^2\lambda + c_0 + c_1/(-4\lambda) + c_2/(-4\lambda)^2 + \dots$ — постоянная интегрирования.

Если расписать уравнение (11) по степеням $-4\lambda$, то получится

$$\begin{aligned}-a_0a_{n+1}-\dots-a_{n+1}a_0=2(&a_0a_{n,xx}+\dots+a_{0,xx}a_n)\\&-(a_{0,x}a_{n,x}+\dots+a_{n,x}a_{0,x})\\&-4u(a_0a_n+\dots+a_na_0)+c_n.\end{aligned}$$

Так как $a_0=-1/2$, это даёт явное выражение для $a_{n+1}$ через все предыдущие $a_j$. Отсюда следует, что все $a_n$ действительно являются дифференциальными многочленами от $u$.

***Замечание.*** Есть и другой, «более научный» способ вывода соотношения (11). Он полезен для более сложных задач, где интегрирующий множитель неочевиден. Используем представление нулевой кривизны

$$U_t-V_x=[V,U],$$

где, как мы помним,

$$U=\begin{pmatrix}0&1\\u-\lambda&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}-a_x&2a\\-a_{xx}+2a(u-\lambda)&a_x\end{pmatrix}.$$

Разделим это уравнение на $(-4\lambda)^n$ и устремим $n$ к бесконечности.

Это даст уравнение Лакса

$$M_x = [U, M], \quad M = \begin{pmatrix} -A_x & 2A \\ -A_{xx} + 2A(u-\lambda) & A_x \end{pmatrix}.$$

Из формулы Лиувилля следует

$$(\log \det M)_x = \operatorname{tr} M_x M^{-1} = \operatorname{tr}[U, M]M^{-1} = \operatorname{tr} U - \operatorname{tr} MUM^{-1} = 0,$$

то есть,

$$\det M = 2AA_{xx} - A_x^2 - 4(u-\lambda)A^2 = -c = \mathrm{const}\,.$$

# Коммутативность высших уравнений КдФ

Можно переписать рекуррентную схему (8) непосредственно для $g_n$: так как $a_n = D^{-1}(g_{n-1})$, то

$$
\begin{aligned}
g_n &= KD^{-1}(g_{n-1}) = (D^3 - 4uD - 2u_x)D^{-1}(g_{n-1}) \\
&= (D^2 - 4u - 2u_x D^{-1})(g_{n-1}).
\end{aligned}
$$

**Утверждение 1.** Оператор

$$R = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$$

служит оператором рекурсии для уравнения КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ являются симметриями КдФ.

*Доказательство.* Вычислим коммутатор $f_* = D^3 - 6uD - 6u_1$ и $R$, разбивая $R$ на слагаемые.

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6(uD^3 + 2u_1D^2 + u_2D) + 6u_1D^2 + 12u_2D + 6u_3 \\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D \\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3 \\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D \\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3 \\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&= -4uD^3 - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 4uD^3 + 24u^2D + 24uu_1 - 24u^2D \\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3 \\
&= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&= -\cancel{4uD^3} - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2D} \\
&= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] = [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&\quad = -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1 \\
&\quad = -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3 \\
&\quad = 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] = [D^3 - 6uD, -4u] \\
&\quad = -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D \\
&\quad = -\cancel{4uD^3} - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2D} \\
&\quad = -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] = [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}] \\
&\quad = -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&\quad = -2u_1D^2 - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12uu_1 + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u \\
&\quad = -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] = [-6uD - 6u_1, D^2]$$
$$= -6uD^3 - 6u_1D^2 + 6D^2uD + 6D^2u_1$$
$$= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1D^2 + u_2D) + \cancel{6u_1D^2} + 12u_2D + 6u_3$$
$$= 12u_1D^2 + 18u_2D + 6u_3;$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] = [D^3 - 6uD, -4u]$$
$$= -4D^3u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2D$$
$$= -\cancel{4uD^3} - 12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2D}$$
$$= -12u_1D^2 - 12u_2D - 4u_3 + 24uu_1;$$

$$[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1D^{-1}] = [D^3 - 6Du, -2u_1D^{-1}]$$
$$= -2D^3u_1D^{-1} + 12Duu_1D^{-1} + 2u_1D^2 - 12u_1u$$
$$= -\cancel{2u_1D^2} - 6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + \cancel{12uu_1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + \cancel{2u_1D^2} - \cancel{12u_1u}$$
$$= -6u_2D - 6u_3 - 2u_4D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.$$

Всё складываем:

$$-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, D^2] &= [-6uD - 6u_1, D^2] \\
&= -6uD^3 - 6u_1 D^2 + 6D^2 uD + 6D^2 u_1 \\
&= -\cancel{6uD^3} - \cancel{6u_1 D^2} + 6(\cancel{uD^3} + 2u_1 D^2 + u_2 D) + \cancel{6u_1 D^2} + 12u_2 D + 6u_3 \\
&= \cancel{12u_1 D^2} + \cancel{18u_2 D} + \cancel{6u_3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -4u] &= [D^3 - 6uD, -4u] \\
&= -4D^3 u + 4uD^3 + 24uDu - 24u^2 D \\
&= -\cancel{4uD^3} - 12u_1 D^2 - 12u_2 D - 4u_3 + \cancel{4uD^3} + \cancel{24u^2 D} + 24uu_1 - \cancel{24u^2 D} \\
&= -\cancel{12u_1 D^2} - \cancel{12u_2 D} - 4u_3 + 24uu_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D^3 - 6uD - 6u_1, -2u_1 D^{-1}] &= [D^3 - 6Du, -2u_1 D^{-1}] \\
&= -2D^3 u_1 D^{-1} + 12Duu_1 D^{-1} + 2u_1 D^2 - 12u_1 u \\
&= -\cancel{2u_1 D^2} - 6u_2 D - 6u_3 - 2u_4 D^{-1} + \cancel{12uu_1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1} + \cancel{2u_1 D^2} - \cancel{12u_1 u} \\
&= -\cancel{6u_2 D} - \cancel{6u_3} - 2u_4 D^{-1} + 12(uu_2 + u_1^2)D^{-1}.
\end{aligned}
$$

Всё складываем:

$$
-4u_3 + 24uu_1 - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}.
$$

С другой стороны, имеем

$$\nabla_f(R) = -4u_t - 2u_{xt}D^{-1} = -4(u_3 - 6uu_1) - 2(u_4 - 6uu_2 - 6u_1^2)D^{-1}$$

— тот же самый результат, то есть $\nabla_f(R) = [f_*, R]$, что и требуется. ∎

Из доказанного утверждения следует, что все уравнения

$$u_{t_n} = R^{n-1}(u_x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

являются симметриями КдФ.

*Замечание.* Высшие уравнения КдФ служат симметриями также друг для друга, то есть в данном случае высшие симметрии образуют коммутативную алгебру Ли. Это можно доказать разными способами. Идея простого доказательства, которое годится для любых уравнений, симметрии которых имеют вид

$$u_{t_n} = u_n + \text{полиномиальные младшие члены.}$$

Во-первых, можно доказать, следя за старшими производными, что любая симметрия такого уравнения имеет вид

$$u_\tau = \mathrm{const}(u_k + \text{младшие члены}).$$

Во-вторых, легко доказать, что коммутатор любых двух симметрий есть симметрия (это общий факт, следует из тождества Якоби).
В-третьих, доказывается, что коммутатор для $u_{t_n}$ и $u_{t_n}$ не содержит линейного члена. Но, тогда из первого утверждения следует, что коммутатор равен 0.

***Замечание.*** Как мы видели, высшие уравнения КдФ получаются применением $R$ к простейшей классические симметрии $u_{t_1} = u_x$. Но, у КдФ есть и другие классические симметрии — преобразование Галилея и растяжение

$$u_{\tau_1} = 6tu_x - 1, \quad u_{\tau_2} = 3t(u_{xxx} - 6uu_x) + xu_1 + 2u.$$

Нетрудно проверить, что $R(u_{\tau_1}) = 2u_{\tau_2}$.

Дальнейшее применение приводит, на этот раз, к *нелокальным* симметриям, то есть, интегрирование в замкнутом виде не получается и приходится вводить дополнительные переменные.

Кроме того, эти симметрии друг с другом не коммутируют (образуют алгебру Вирасоро).

Тем не менее, эта дополнительная иерархия КдФ — очень интересный и важный объект, связанный с уравнениями типа Пенлеве, так называемыми струнными уравнениями.

# В чем смысл?

В чем смысл высших уравнений КдФ? Любое из них ничуть не хуже КдФ по свойствам. В частности, можно для них повторить все вычисления многосолитонных решений (потенциалы Баргманна). Различие будет только в показателях экспонент: если в случае КдФ фазы имели вид

$$k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j,$$

то фазы для решения, удовлетворяющего всей иерархии равны

$$k_j x + 4k_j^3 t_2 + 16k_j^5 t_3 + 64k^7 t_4 + \cdots + \delta_j.$$

Если здесь считать $t_n = 0$ начиная с какого-то номера, то решение будет функцией от переменных $x, t_2, \ldots, t_{n-1}$, удовлетворяющей каждому из уравнений $u_{t_j} = g_j$, $j = 2, \ldots, n-1$.

Аналогично, и в МОЗР по существу ничего не меняется. Для прямой и обратной задач зависимость от $t$ вообще не нужна, а зависимость спектральных данных от $t$ определяется ведущим членом по $\lambda$ в линейных задачах. Для потока $u_{t_n}$ имеем

$$b(k, t_n) = e^{-2i(2k)^{2n-1} t_n} b(k, 0), \quad c_j(t) = e^{-2(2\kappa_j)^{2n-1} t_n} c_j(0).$$

Однако, это не кажется особенно ценным свойством. Если нас интересуют только решения КдФ, то зачем нам знать, как меняется решение по каким-то дополнительным параметрам, которых изначально в КдФ не было. Это просто переопределение фаз в уже известных семействах решений...

Более важно другое применение симметрий, о котором говорилось в начале лекции. Стационарные уравнения для высших уравнений КдФ (точнее, для их линейных комбинаций (9)) действительно приводят к новым точным решениям — так называемым конечнозонным. Об этом — в следующий раз.

# Домашнее задание

**Задача 22.** Проверьте, что (1) допускает в качестве симметрии уравнение

$$s_\tau = s_{xxx} + \frac{3}{2}(\langle s_x, s_x\rangle s)_x, \quad |s| = 1.$$

Убедитесь, что оба уравнения согласованы со связью $|s| = 1$, и что $(s_t)_\tau = (s_\tau)_t$.
(Нужно будет использовать следствия из связи и некоторые тождества для смешанного произведения.)

**Задача 23.** Найдите однопараметрические группы растяжения и преобразования Галилея для нелинейного уравнения Шрёдингера

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad v_t = -v_{xx} - 2uv^2,$$

а также соответствующие симметрии в инфинитезимальной форме.

(Под растяжением имеются в виду преобразование, при котором $x, t, u, v$ умножаются на подходящие множители так, чтобы уравнение не менялось. В этом примере есть два независимых растяжения, найдите оба.

Преобразование Галилея менее очевидно, чем в случае КдФ. Применим замену $u = e^{at+bx}\tilde{u}$, $v = e^{-at-bx}\tilde{u}$, это добавит в уравнения линейные члены $u, u_x$ и $v, v_x$. Члены $u, v$ убираются за счет согласования $a, b$, а члены с производными за счет перехода в движущуюся систему координат, то есть, при дополнительной замене $\tilde{x} = x + ct$.)

**Задача 24.** Пусть уравнение

$$u_t = f[u] \in \mathcal{F}$$

обладает оператором рекурсии $R$. Как он преобразуется при замене вида $u = a(\tilde{u})$? В частности, покажите, что оператор $R = D + u_x$ для уравнения (4) $u_t = u_{xx} + u_x^2$ связан с очевидным оператором $R = D$ для линейного уравнения $u_t = u_{xx}$.

**Задача 25.** Проверьте непосредственно, что $R = D + v + v_1 D^{-1}$ является оператором рекурсии для уравнения Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x.$$

Свяжите этот результат с предыдущим, используя подстановку $v = u_x$.