В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 7 · 21 марта 2022

Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Обратная задача

План

На прошлой лекции:

- Прямая задача: функции Йоста, данные рассеяния

На этой лекции:

- Зависимость данных рассеяния от t
- Определение $a(k)$ и $b(k)$ по коэффициенту отражения $r(k)$
- Обратная задача: восстановление потенциала по данным рассеяния (метод сингулярных интегральных уравнений)

Свойства данных рассеяния (повторение)

$$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi, \quad \lambda = k^2$$

Функции Йоста:

$x \to -\infty$	$x \to +\infty$	
$\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\psi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \geq 0$
$\varphi_2 = e^{ikx} + o(1)$	$\psi_1 = e^{-ikx} + o(1)$	$\operatorname{Im} k \leq 0$

Свойства симметрии:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,-k), && \psi_1(x,k) = \psi_2(x,-k),\\
&\varphi_1(x,k)^* = \varphi_2(x,k^*), && \psi_1(x,k)^* = \psi_2(x,k^*),\\
&\varphi_i(x,k)^* = \varphi_i(x,-k^*), && \psi_i(x,k)^* = \psi_i(x,-k^*).
\end{aligned}$$

На мнимой полуоси

$$\varphi_1(x,iz), \quad \psi_2(x,iz) \in \mathbb{R}, \quad z > 0.$$

Данные непрерывного спектра: функции $a(k)$ и $b(k)$ такие, что

$$\varphi_1 = a(k)\psi_1 + b(k)\psi_2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Данные дискретного спектра: сам дискретный спектр $\lambda_j = -\kappa_j^2$, где

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \cdots > \kappa_n > 0$$

и числа $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\varphi_1(x, i\kappa_j) = c_j \psi_2(x, i\kappa_j)$.

Свойства:

1) $a(k)^* = a(-k), \quad b(k)^* = b(-k), \quad k \in \mathbb{R};$

2) $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R};$

3) выражения для $a(k)$, $b(k)$ через вронскианы от функций Йоста:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_1, \psi_2)}{2ik}, \quad b(k) = -\frac{W(\varphi_1, \psi_1)}{2ik}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0;$$

4) $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, причем

$$a(k)^* = a(-k^*), \quad \operatorname{Im} k \geq 0;$$

5) интегральные выражения для $a(k)$, $b(k)$:

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} u(x) \varphi_1(x,k)\, dx,$$
$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} u(x) \varphi_1(x,k)\, dx;$$

6) асимптотика по k:

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geq 0,$$
$$b(k) = O(k^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad k \in \mathbb{R};$$

7) нули $a(k)$ в верхней полуплоскости совпадают с $i\kappa_j$, $j = 1, \ldots, n$;

8) $c_j \in \mathbb{R}$, причём

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 0, \quad \ldots, \quad \operatorname{sign} c_n = (-1)^{n+1}.$$

Зависимость данных рассеяния от t

До сих пор предполагалось, что потенциал $u = u(x)$ зависит лишь от x.

Если дано некоторое 1-параметрическое семейство потенциалов $u(x,t)$, то при каждом фиксированном t можно повторить вычисление функций Йоста и далее по ним определить данные рассеяния. Естественно, всё это теперь тоже будет зависеть от t:

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(x,t,k), \quad \psi_{1,2} = \psi_{1,2}(x,t,k),$$
$$a = a(k,t), \quad b = b(k,t), \quad \kappa_j = \kappa_j(t), \quad c_j = c_j(t).$$

Замечательное свойство уравнения КдФ: для его (быстроубывающих) решений $u(x,t)$ зависимость данных рассеяния от t очень простая. Пусть исходный потенциал определяет начальное данное для задачи Коши:

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad u(x,0) = u(x),$$

и пусть данные рассеяния при $t = 0$ известны. Покажем, что тогда при всех t они определяются явными формулами — *пересчёт функций Йоста не нужен.*

Пользуемся тем, что КдФ равносильно условию совместности для

$$\psi_{xx} = (u - k^2)\psi, \qquad \psi_t = u_x\psi - (4k^2 + 2u)\psi_x, \tag{1}$$

в результате, для этих уравнений определена общая фундаментальная система решений.

Напомним (см. лекцию 4 про потенциалы Баргманна, Лемма 1 и Утв. 2), что вронскиан любых двух решений постоянен:

$$w = W(\psi, \tilde{\psi}) = \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi} \quad \Rightarrow \quad w_x = w_t = 0, \tag{2}$$

как и отношение решений в нулях вронскиана:

$$c = \tilde{\psi}(k_0)/\psi(k_0), \;\; w(k_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_x = c_t = 0. \tag{3}$$

Однако, мы не можем сразу применить эти свойства к функциям Йоста, так как они *не удовлетворяют* паре (1). Действительно, для (1) любое решение при $|x| \to \infty$ представляется в виде

$$\psi \sim \alpha e^{i(kx - 4k^3 t)} + \beta e^{-i(kx - 4k^3 t)},$$

а у функций Йоста асимптотика, по определению, не зависит от t.

Функции Йоста нужно немного подправить. Напомним, что они фиксируются асимптотикой

$$\varphi_1 \sim e^{-ikx}, \quad \varphi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \to -\infty,$$
$$\psi_1 \sim e^{-ikx}, \quad \varphi_2 \sim e^{ikx}, \quad x \to +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1 = e^{-4ik^3t}\tilde{\varphi}_1, \qquad \varphi_2 = e^{4ik^3t}\tilde{\varphi}_2,$$
$$\psi_1 = e^{-4ik^3t}\tilde{\psi}_1, \qquad \psi_2 = e^{4ik^3t}\tilde{\psi}_2,$$

где функции с тильдой удовлетворяют паре (1).

Теорема 1. При эволюции потенциала в силу КдФ, данные рассеяния меняются так:

$$a(k,t) = a(k,0), \qquad b(k,t) = e^{-8ik^3t}b(k,0),$$
$$\kappa_j(t) = \kappa_j(0), \qquad c_j(t) = e^{-8\kappa_j^3t}c_j(0).$$

Доказательство. Используем представление для a через вронскианы от функций Йоста:

$$
\begin{aligned}
a(k,t) &= \frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \psi_2) \\
&= \frac{1}{2ik} W(\tilde{\varphi}_1(x,t,k), \tilde{\psi}_2(x,t,k)) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2ik} W(\tilde{\varphi}_1(x,0,k), \tilde{\psi}_2(x,0,k)) \\
&= a(k,0);
\end{aligned}
$$

аналогично для b, но теперь показатели экспонент складываются:

$$
\begin{aligned}
b(k,t) &= -\frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \psi_1) \\
&= -\frac{1}{2ik} e^{-8ik^3 t} W(\tilde{\varphi}_1(x,t,k), \tilde{\psi}_2(x,t,k)) \\
&\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2ik} e^{-8ik^3 t} W(\tilde{\varphi}_1(x,0,k), \tilde{\psi}_2(x,0,k)) \\
&= e^{-8ik^3 t} b(k,0).
\end{aligned}
$$

Так как $i\kappa_j$ совпадают с нулями $a(k)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, и эта функция от t не зависит, то и κ_j не зависят от t.

Наконец, c_j определяются, как отношения функций Йоста в точке $k = i\kappa_j$:

$$c_j(t) = \frac{\varphi_1(x,t,i\kappa_j)}{\psi_2(x,t,i\kappa_j)} = e^{-8i(i\kappa_j)^3 t}\frac{\tilde{\varphi}_1(x,t,i\kappa_j)}{\tilde{\psi}_2(x,t,i\kappa_j)}$$

$$\overset{(3)}{=} e^{-8\kappa_j^3 t}\frac{\tilde{\varphi}_1(x,0,i\kappa_j)}{\tilde{\psi}_2(x,0,i\kappa_j)} = e^{-8\kappa_j^3 t}c_j(0). \qquad \blacksquare$$

Итак, мы поставили в соответствие потенциалу $u(x)$ функции $a(k)$, $b(k)$ и числа κ_j и c_j, и установили, как они зависят от t, если u эволюционирует в силу КдФ.

Оказывается, эти данные содержат достаточно информации, чтобы восстановить по ним потенциал $u(x,t)$.

Однако, прежде чем перейти к этому, разберемся с вопросом о независимости спектральных данных.

Выражение $a(k)$, $b(k)$ через $r(k)$

Набор спектральных данных немного избыточен:

— дискретный спектр совпадает с нулями продолжения $a(k)$;

— функции a и b связаны соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Оказывается, что вместо a и b достаточно задать одну функцию, коэффициент отражения

$$r(k) = b(k)/a(k) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{R},$$

обе функции по ней восстанавливаются.

Чтобы показать это, нам понадобятся формулы Сохоцкого для интегралов типа Коши.

Напомним, что *интеграл Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

выражает значения функции $f(z)$, аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$ через ее значения на границе $C = \partial D$.

Интегралом типа Коши называется интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

где C — гладкая кривая (не обязательно замкнутая), а $f(\zeta)$ — непрерывная функция на ней (допускается конечное число точек с интегрируемым разрывом). При этом значение интеграла $F(z)$ есть аналитическая функция вне C.

Используем следующее утверждение (см. напр. [Лаврентьев-Шабат, Методы ТФКП], вместо $\mathbb{R}$ может быть и другой контур).

Формулы Сохоцкого. Для функции $f(s)$, непрерывной при $s \in \mathbb{R}$, предельные значения интегралов типа Коши при стремлении к вещественной оси сверху или снизу равны

$$F^{\pm}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\,ds}{s - (k \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\,ds}{s - k} \pm \frac{f(k)}{2}. \tag{4}$$

(Интеграл справа называется преобразованием Гильберта. Он понимается в смысле главного значения, то есть, как предел по отрезкам, симметричным относительно особой точки $s = k$).

В частности, из (4) следует тождество Крамерса–Кронига: пусть $f(k)$ аналитична при $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $f \to 0$ при $|k| \to \infty$. Тогда

$$f(k) = \frac{1}{\pi i} \, \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\, ds}{s - k}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. По формуле Коши, интеграл с $k + i0$ в левой части (4) равен $f(k)$. ■

В свою очередь, из (5) следует, что для функции $f = u + iv$, аналитической в верхней полуплоскости выполняются условия согласования на $\mathbb{R}$: мнимая часть $=$ интеграл типа Коши от вещественной и наоборот:

$$u(k) = \frac{1}{\pi} \, \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(s)\, ds}{s - k}, \quad v(k) = -\frac{1}{\pi} \, \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(s)\, ds}{s - k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Применим эти тождества к $\log a(k)$, только сначала нужно погасить нули в точках $k = i\kappa_j$, чтобы получить аналитическую функцию при $\operatorname{Im} k > 0$.

Утверждение 2. При $k \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{1-|r(k)|^2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j} \exp\left(\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1-|r(s)|^2)\,ds}{s-k}\right), \tag{6}$$

$$b(k) = r(k)a(k).$$

Доказательство. Имеем

$$|a|^2 - |b|^2 = |a|^2(1-|r|^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad |a| = \frac{1}{\sqrt{1-|r(k)|^2}}.$$

Модуль a нашли. Нужно восстановить аргумент. Как известно,

$$a = |a|e^{i\arg a} \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \log|a| + i\arg a,$$

то есть, логарифм модуля и аргумент — это вещественная и мнимая части $\log a$. Положим

$$f(k) = \log\left(a(k)\frac{(k+i\kappa_1)\cdots(k+i\kappa_n)}{(k-i\kappa_1)\cdots(k-i\kappa_n)}\right).$$

Это функция, аналитическая при $\operatorname{Im} k > 0$, причем рациональный множитель лежит на единичной окружности, то есть имеет вид $e^{i\alpha}$ и логарифм от него чисто мнимый. Применим тождество (5). Имеем

$$f(k) = \log|a(k)| + i\arg a(k) + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j}$$
$$= \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)\,ds}{s-k} = \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} f(s) + i\operatorname{Im} f(s)\,ds}{s-k}.$$

откуда следует

$$i\arg a(k) + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j} = \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|a|}{s-k}ds.$$

Тогда

$$a = |a|e^{i\arg a} = |a|\prod_{j=1}^{n} \log\frac{k - i\kappa_j}{k + i\kappa_j}\exp\left(\frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|a|}{s-k}ds\right)$$

и остается только заменить $|a| = (1-|r|^2)^{-1/2}$. ∎

Формула (6) определяет функцию $a(k)$, аналитическую при $\operatorname{Im} k > 0$, по комплекснозначной непрерывной функции $r(k)$, заданной на вещественной оси и числам $\kappa_j > 0$. При этом $r(k)$ должна удовлетворять свойствам

$$r(k)^* = r(-k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad |r| < 1, \quad r(k) = O(k^{-1}), \quad k \to \pm\infty.$$

Итак, независимые спектральные данные состоят из функции $r(k)$, удовлетворяющей перечисленным условиям, произвольных чисел $\kappa_1 > \cdots > \kappa_n > 0$ и c_j таких, что $\operatorname{sign} c_j = (-1)^{j+1}$.

Можно доказать, что других ограничений нет и что данные полные, то есть, по любому такому набору действительно однозначно восстанавливается некоторый быстроубывающий потенциал.

Покажем, как эта задача восстановления сводится к интегральным уравнениям (но не будем анализировать, все ли там корректно).

Про зависимость от t опять можно забыть, все вычисления делаются при каком-то фиксированном t.

Обратная задача

Восстановление $u(x)$ по данным рассеяния также сводится к интегральным уравнениям.

Есть два способа — уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко и система сингулярных ИУ. Мы используем второй, он немного проще (хотя система выглядит более громоздкой).

Используем наше основное соотношение

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_1(x,k)^*, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты $a(k)$, $b(k)$ считаются известными. Сделаем переобозначение:

$$\Phi(x,k) = \begin{cases} \Phi_+ = \dfrac{e^{ikx}}{a(k)}\varphi_1(x,k), & \operatorname{Im} k > 0, \\ \Phi_- = e^{ikx}\psi_1(x,k), & \operatorname{Im} k < 0. \end{cases}$$

Для функции Φ выполняются такие свойства:

- $\Phi \sim 1 + O(1/|k|)$, $|k| \to \infty$,
- $\Phi = \Phi_-$ аналитична при $\operatorname{Im} k < 0$,
- $\Phi = \Phi_+$ мероморфна при $\operatorname{Im} k > 0$, с полюсами в $k = i\kappa_j$,
- выполнено условие разрыва на вещественной оси

$$\Phi_+ = \Phi_- + r(k)e^{2ikx}\Phi_-^*, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Отсюда нужно определить Φ. Это разновидность задачи Римана–Гильберта. Допустим, мы это сделали, тогда $u(x)$ можно восстановить, например, из разложения

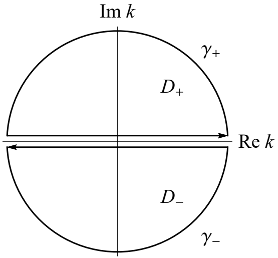
$$\Phi_- = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty u(y)\,dy + o(k^{-1})$$

(которое следует из уравнения Шрёдингера $\psi_{1,xx} = (u - k^2)\psi_1$ для $\psi_1 = e^{-ikx}\Phi_-$).

Случай без дискретного спектра

Разберем сначала случай, когда $a(k)$ не имеет нулей при $\mathrm{Im}(k) > 0$ (то есть, набор κ_j пуст и функция Φ аналитична в обеих полуплоскостях).

Рассмотрим контур $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$. Имеем, по формуле Коши



$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}ds = \begin{cases} \Phi(x,k), & k \in D_+ \cup D_-, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интегралы по дугам стремятся к 0, когда их радиус $R \to \infty$ (так как $\Phi(k) = 1 + O(1/|k|)$).

В пределе, получаем

$$\Phi(x,k) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi_+(x,s)-\Phi_-(x,s)}{s-k}ds \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k}ds.$$

Перейдем к пределу, устремив k к вещественной оси снизу:

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k+i0}ds. \tag{7}$$

В результате, задача свелась к замкнутому интегральному уравнению на функцию $\Phi_-(x,k)$, то есть, это уже можно считать ответом.

Для предельного значения можно применить уже знакомую формулу Сохоцкого и привести уравнение к виду

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k}ds + \frac{1}{2}r(k)e^{2ikx}\Phi_-^*(x,k). \tag{8}$$

Чтобы получить формулу для u, разложим (7) по $1/k$:

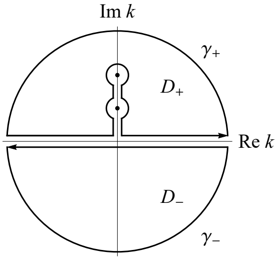
$$\begin{aligned}\Phi_-(x,k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty u(y)\,dy + o(k^{-1})\\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{-k}\left(1 + \frac{s}{k} + \frac{s^2}{k^2} + \dots\right)ds\end{aligned}$$

и дифференцируя по x коэффициент при k^{-1} получаем

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\partial_x \int_{\mathbb{R}} r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)\,ds.$$

Случай с дискретным спектром

Случай, когда есть дискретный спектр, немного более громоздкий. Нужно обойти полюса Φ_+.



Как и раньше, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}ds = \begin{cases} \Phi(x,k), & k \in D_+ \cup D_-, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интеграл вокруг полюса в точке $i\kappa$ (обходится в отрицательном направлении) равен

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(s)}{s-k}ds = -\operatorname*{res}_{s=i\kappa}\frac{f(s)}{s-k} = \frac{\operatorname*{res}_{k=i\kappa} f(k)}{k-i\kappa}.$$

При $\operatorname{Im} k < 0$ получаем, вместо (7)

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \sum_j \frac{\Gamma_j(x)}{k-i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s-k}ds, \tag{9}$$

где $\Gamma_j(x) = \operatorname*{res}_{k=i\kappa_j}\Phi(x,k)$ — дополнительные неизвестные.

После перехода к пределу по k, стремящемуся к вещественной оси снизу, это, как и раньше, даёт интегральное уравнение на $\Phi_-(x,k)$, но с лишними Γ_j. Чтобы получить замкнутую систему, их нужно связать с $\Phi_-(x,k)$. Это нетрудно:

$$\Gamma_j(x) = \operatorname*{res}_{k=i\kappa_j} \frac{e^{ikx}\varphi_1(x,k)}{a(k)} = \frac{e^{-\kappa_j x}\varphi_1(x,i\kappa_j)}{a'(i\kappa_j)};$$

так как

$$\varphi_1(x,i\kappa_j) = c_j\psi_2(x,i\kappa_j) = c_j\psi_1(x,-i\kappa_j),$$

то

$$\Gamma_j(x) = \frac{c_j e^{-2\kappa_j x}}{a'(i\kappa_j)}\Phi_-(x,-ik_j).$$

Подставляя в выражение для Γ_m вместо Φ_- выражение из (9), получаем дополнительную систему уравнений, при $m=1,\ldots,n$:

$$\Gamma_m(x) = \frac{c_m e^{-2\kappa_m x}}{a'(i\kappa_m)}\left(1 + i\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_j(x)}{\kappa_j+\kappa_m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{r(s)e^{2isx}\Phi_-^*(x,s)}{s+i\kappa_m}ds\right). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) образуют замкнутую систему смешанных уравнений — алгебраических и интегральных. Можно сначала решить (10) и выразить Γ_j через интегралы от Φ_-. Потом подставить их в (9) и получить ИУ на Φ_-, но с более сложным ядром.

Как и раньше, $u(x)$ восстанавливается из разложения уравнения (9) по $1/k$:

$$u(x) = \partial_x \left(-2i \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} r(s) e^{2isx} \Phi_-^*(x,s)\, ds \right).$$