В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 5 · 7 марта 2022

# Цепочка Тоды

# Двумерная цепочка Тоды

Двумерной цепочкой Тоды (2DTL) называется дифференциально-разностное уравнение

$$u_{j,xy} = e^{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Его часто записывают также для переменных $q_j = u_j - u_{j-1}$:

$$q_{j,xy} = e^{q_{j+1}-q_j} - e^{q_j - q_{j-1}}, \tag{2}$$

или для переменных $b_j = q_{j,x}$, $c_j = -e^{q_j - q_{j-1}}$:

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}), \tag{3}$$

и в других эквивалентных формах. С точностью до таких замен, 2DTL была введена Лапласом (1893) в контексте изучения преобразований, действующих на решениях линейных гиперболических уравнений вида

$$\psi_{xy} = a(x,y)\psi_x + b(x,y)\psi_y + c(x,y)\psi \tag{4}$$

(так называемый каскадный метод Лапласа).

Из 2DTL можно получить множество $1+1$-мерных уравнений, применяя различные редукции. На лекции мы рассмотрим некоторые из них.

В частности, одномерная версия цепочки получается, если рассматривать решения вида $q_j(x,y) = q_j(t)$, $t = x+y$:

$$q_j'' = e^{q_{j+1}-q_j} - e^{q_j - q_{j-1}}. \tag{5}$$

Она была введена Тодой (1967) как самостоятельная модель (и это действительно важный пример). Двумерная цепочка была переоткрыта Михайловым лишь в 1979.

# Замечание: $S$- и $C$-интегрируемость

Интегрирование уравнения КдФ тесно связано с тем, что оно служит условием совместности для пары вспомогательных линейных уравнений. Нелинейные уравнения такого типа иногда называют $S$-интегрируемыми (от слова *scattering*, то есть, интегрируемые при помощи метода обратной задачи рассеяния).

Пример более простой и непосредственной связи с линейными уравнениями даёт уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x, \tag{6}$$

которое линеаризуется подстановкой Коула–Хопфа:

$$u = \psi_x/\psi, \quad \psi_t = \psi_{xx}.$$

Уравнения такого типа называют $C$-интегрируемыми (от слова *change*, то есть, интегрируемые посредством замены переменных).

Для гиперболических уравнений простейшего вида

$$u_{xy} = f(u)$$

имеется такой классификационный результат (Ибрагимов, Шабат 1980): с точностью до комплексных линейных замен $u$ и $x, y$, $S$-интегрируемыми являются лишь уравнения sin-Гордона (1862)

$$u_{xy} = \sin u,$$

и Цицейки (1910, переоткрыто в 1976, 1979)

$$u_{xy} = e^u - e^{-2u},$$

а $C$-интегрируемыми являются лишь уравнение Лиувилля (1855)

$$u_{xy} = e^u,$$

и линейные

$$u_{xy} = \alpha u + \beta.$$

Классифицированы также все $C$- и $S$-интегрируемые уравнения (их очень много) более общего вида (Жибер, Соколов 2000)

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

# Вспомогательные линейные уравнения для 2DTL

Каскадный метод Лапласа заключается в определении последовательности преобразований вида

$$\tilde{\psi} = \psi_x + f\psi \quad \text{или} \quad \tilde{\psi} = \psi_y + g\psi,$$

при которых коэффициенты уравнения (4) меняются, а сам вид остаётся таким же.

В этих преобразованиях есть некоторый произвол, так как их можно комбинировать с калибровочным преобразованием

$$\psi = h(x, y)\hat{\psi},$$

также не меняющим вид уравнения. Чтобы отфакторизоваться от него, можно выписывать уравнения на инварианты группы таких преобразований (инварианты Лапласа), либо как-то зафиксировать калибровку.

Мы используем второй вариант и фиксируем калибровку, полагая $a = 0$. В результате возникают следующие линейные уравнения, в которые мы сразу введём индекс $j$ вместо тильды (то есть, $\widetilde{\psi_j} = \psi_{j+1}$).

Выведем условие совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{j,x} = \psi_{j+1} + b_j\psi_j, \tag{7}$$
$$\psi_{j,y} = c_j\psi_{j-1}. \tag{8}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\psi_{j,xy} = \psi_{j+1,y} + b_{j,y}\psi_j + b_j\psi_{j,y} = c_{j+1}\psi_j + b_{j,y}\psi_j + b_jc_j\psi_{j-1} = \\
&\psi_{j,yx} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j\psi_{j-1,x} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j(\psi_j + b_{j-1}\psi_{j-1}).
\end{aligned}$$

В результате, получаем цепочку (3)

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}),$$

описывающую, как меняются коэффициенты линейных уравнений

$$\psi_{j,xy} = b_j\psi_{j,y} + c_j\psi_j \tag{9}$$

под действием преобразований

$$\psi_j \mapsto \psi_{j+1} = \psi_{j,x} - b_j\psi_j, \qquad \psi_j \mapsto \psi_{j-1} = c_j^{-1}\psi_{j,y}.$$

Выведем условие совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{j,x} = \psi_{j+1} + b_j\psi_j, \tag{7}$$
$$\psi_{j,y} = c_j\psi_{j-1}. \tag{8}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\psi_{j,xy} &= \psi_{j+1,y} + b_{j,y}\psi_j + b_j\psi_{j,y} = c_{j+1}\psi_j + b_{j,y}\psi_j + b_jc_j\psi_{j-1} = \\ \psi_{j,yx} &= c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j\psi_{j-1,x} = c_{j,x}\psi_{j-1} + c_j(\psi_j + b_{j-1}\psi_{j-1}).\end{aligned}$$

В результате, получаем цепочку (3)

$$b_{j,y} = c_j - c_{j+1}, \quad c_{j,x} = c_j(b_j - b_{j-1}),$$

описывающую, как меняются коэффициенты линейных уравнений

$$\psi_{j,xy} = b_j\psi_{j,y} + c_j\psi_j \tag{9}$$

под действием преобразований

$$\psi_j \mapsto \psi_{j+1} = \psi_{j,x} - b_j\psi_j, \qquad \psi_j \mapsto \psi_{j-1} = c_j^{-1}\psi_{j,y}.$$

# Редукция 2DTL → sinh-Гордон

Условие периодичности $b_{j+2} = b_j$, $c_{j+2} = c_j$ превращает (3) в систему

$$\begin{aligned} b_{1,y} &= c_1 - c_2, \quad c_{1,x} = c_1(b_1 - b_2), \\ b_{2,y} &= c_2 - c_1, \quad c_{2,x} = c_2(b_2 - b_1). \end{aligned}$$

Можно положить (без потери общности)

$$b_1 = b, \quad b_2 = -b, \quad c_1 = c, \quad c_2 = 1/c,$$

что приводит к системе

$$b_y = c - c^{-1}, \quad c_x = 2cb.$$

Положив $b = u_x$, $c = e^{2u}$, получим уравнение sinh-Гордона

$$u_{xy} = 2\sinh 2u. \tag{10}$$

Периодичность коэффициентов не означает периодичность $\psi$-функций, для них это условие можно ослабить:

$$\psi_{j+2} = \lambda\psi_j.$$

Тогда уравнения (7), (8) превращаются в

$$\begin{aligned}
\psi_{1,x} &= \psi_2 + b\psi_1, \quad & \psi_{1,y} &= \lambda^{-1} c\psi_2,\\
\psi_{2,x} &= \lambda\psi_1 - b\psi_2, \quad & \psi_{2,y} &= c^{-1}\psi_1,
\end{aligned}$$

что можно переписать в виде матричного представления нулевой кривизны для (10):

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_y = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_y = V_x + [V, U],$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} b & 1 \\ \lambda & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & 1 \\ \lambda & -u_x \end{pmatrix},$$
$$V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} c \\ c^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} e^{2u} \\ e^{-2u} & 0 \end{pmatrix}.$$

# Редукция 2DTL $\to$ уравнение Цицейки

Условие периодичности $b_{j+3}=b_j$, $c_{j+3}=c_j$ превращает (3) в систему

$$\begin{aligned} b_{1,y}&=c_1-c_2, & c_{1,x}&=c_1(b_1-b_3),\\ b_{2,y}&=c_2-c_3, & c_{2,x}&=c_2(b_2-b_1),\\ b_{3,y}&=c_3-c_1, & c_{3,x}&=c_3(b_3-b_2). \end{aligned}$$

Как и раньше, здесь можно без потери общности положить

$$b_1+b_2+b_3=0,\quad c_1c_2c_3=1,$$

что приводит к системе

$$\begin{aligned} b_{1,y}&=c_1-c_2, & c_{1,x}&=c_1(2b_1+b_2),\\ b_{2,y}&=c_2-1/(c_1c_2), & c_{2,x}&=c_2(b_2-b_1). \end{aligned}$$

Здесь возможна дальнейшая редукция (уже с потерей общности)

$$b_1=0,\quad b_2=b=u_x,\quad c_1=c_2=c=e^u,$$

приводящая к уравнению Цицейки:

$$b_y=c-c^{-2},\quad c_x=cb\quad\Rightarrow\quad u_{xy}=e^u-e^{-2u}.$$

Условие квазипериодичности $\psi$-функций

$$\psi_{j+3} = \lambda\psi_j$$

даёт при такой редукции уравнения

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,x} = \psi_2, && \psi_{1,y} = \lambda^{-1}c\psi_3,\\
&\psi_{2,x} = \psi_3 + b\psi_2, && \psi_{2,y} = c\psi_1,\\
&\psi_{3,x} = \lambda\psi_1 - b\psi_3, && \psi_{3,y} = c^{-2}\psi_2,
\end{aligned}$$

то есть, в матричном виде, $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_y = V\Psi$, где

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & u_x & 1\\ \lambda & 0 & -u_x\end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda^{-1}e^u\\ e^u & 0 & 0\\ 0 & e^{-2u} & 0\end{pmatrix}.$$

Вообще, периодическое замыкание

$$b_{j+n} = b_j, \quad c_{j+n} = c_j, \quad \psi_{j+n} = \lambda\psi_j$$

приводит к некоторой $S$-интегрируемой системе (хотя при $n > 3$ она не сводится к уравнению на одно поле).

# Уравнение Лиувилля

Есть и другие способы замыкания 2DTL, приводящие к $C$-интегрируемым системам. При их описании было обнаружено некое соответствие с классификацией простых алгебр Ли. Мы рассмотрим лишь системы, отвечающие алгебрам Ли типа $A_n$. Они определяются граничными условиями с нулевым обрывом

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 0$$

на концах интервала по $j$. При $n = 1$ получаем уравнение $u_{1,xy} = e^{-2u_1}$.

Рассмотрим этом пример подробнее, немного меняя обозначения:

$$u_{xy} = e^u. \tag{11}$$

Это простейший, и в то же время типичный пример $C$-интегрируемого уравнения. Оно обладает следующими свойствами.

1) Линеаризуемость: если $\psi(x,y)$ — решение уравнения $\psi_{xy}=0$, то

$$u=\log\Big(2\frac{\psi_x\psi_y}{\psi^2}\Big)$$

— решение (11). Действительно,

$$u=\log 2+\log\psi_x+\log\psi_y-2\log\psi \quad \Rightarrow$$

$$u_{xy}=-2(\log\psi)_{xy}=-2\frac{\psi_{xy}\psi-\psi_x\psi_y}{\psi^2}=\frac{2\psi_x\psi_y}{\psi^2}=e^u.$$

2) Существование $x$-интеграла $I$ и $y$-интеграла $J$:

$$I=u_{yy}-\frac{1}{2}u_y^2,\quad D_x(I)=0;\qquad J=u_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2,\quad D_y(J)=0. \tag{12}$$

Напомним, что $D_x$ и $D_y$ следует понимать, как полные производные, с исключением всех смешанных производных в силу уравнения. Действительно,

$$D_x(I)=u_{xyy}-u_yu_{xy}=(e^u)_y-u_ye^u=0,$$

и аналогично для $J$. Очевидно, любая функция $f(y,I,D_y(I),\dots,D_y^n(I))$ — также $x$-интеграл (ДЗ-14: доказать, что других нет).

3) Конформная инвариантность: если $u(x,y)$ решение уравнения Лиувилля, и $f(x)$, $g(y)$ произвольные непостоянные, дифференцируемые функции, то

$$\tilde{u}(x,y) = u(f(x), g(y)) + \log(f'(x)g'(y)); \tag{13}$$

также является решением:

$$\tilde{u}_{xy} = f'(x)g'(y)u_{xy} = f'(x)g'(y)e^u = e^{\tilde{u}}.$$

4) Общее решение уравнения Лиувилля (11) находится по явной формуле:

$$e^u = \frac{2a'(x)b'(y)}{(a(x)+b(y))^2}, \tag{14}$$

где $a$ и $b$ произвольные функции. Этот же ответ можно записать и иначе, например,

$$e^u = -\frac{2a'(x)b'(y)}{(1+a(x)b(y))^2} \tag{15}$$

— это та же самая формула, с точностью до замены $a \to 1/a$.

То, что (14) — решение, сразу следует из свойства 1) и формулы Даламбера $\psi = a(x) + b(y)$.

Немного труднее доказать, что *любое* решение уравнения (11) может быть записано в таком виде. Согласно свойству 2), любое решение $u$ удовлетворяет также паре ОДУ

$$u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2 = I(y), \quad u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 = J(x).$$

Свойство 3) позволяет обратить $J$ и $I$ в 0 за счет выбора подходящих $f$ и $g$, соответственно. Действительно:

$$\tilde{u}_x = f' u_x + \frac{f''}{f'},$$

$$\tilde{u}_{xx} = (f')^2 u_{xx} + f'' u_x + \left(\frac{f''}{f'}\right)' \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{J} = \tilde{u}_{xx} - \frac{1}{2}\tilde{u}_x^2 = (f')^2 J + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

При заданном $J(x)$, уравнение $\tilde{J} = 0$ есть ОДУ относительно $f(x)$. Для замены достаточно взять любое частное решение (достаточно знать, что оно есть). Точно так же уничтожается функция $\tilde{I}$. Итак, заменой (13) любое решение уравнения Лиувилля сводится к решению системы

$$u_{xx} = \frac{1}{2}u_x^2, \quad u_{yy} = \frac{1}{2}u_y^2, \quad u_{xy} = e^u.$$

Эти уравнения легко решаются. Общее решение имеет вид

$$e^u = (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^{-2}, \quad 2\beta\gamma - 2\alpha\delta = 1,$$

с постоянными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Замены (13) с дробно-линейными $f(x), g(y)$ приводят его к виду

$$e^u = 2(x+y)^{-2}$$

(при этом $J$ и $I$ остаются равными 0). Применяя обратное преобразование (13) с произвольными функциями, получаем решение (14).

5) Уравнение Лиувилля допускает эволюционные симметрии, в частности, оно совместно с уравнением

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3. \tag{16}$$

Конечно, в силу симметрии $x \leftrightarrow y$, симметрией является также $u_\tau = u_{yyy} - \frac{1}{2}u_y^3$.

Как обычно, совместность означает равенство перекрестных производных:

$$\begin{aligned}
(u_{xy})_t &= e^u u_t = e^u(u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_x^3);\\
(u_t)_{xy} &= (u_{xxxy} - \tfrac{3}{2}u_x^2 u_{xy})_x = ((e^u)_{xx} - \tfrac{3}{2}e^u u_x^2)_x\\
&= (e^u(u_{xx} - \tfrac{1}{2}u_x^2))_x = e^u(u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_x^3).
\end{aligned}$$

Обратим внимание, что уравнение (16) эквивалентно мКдФ, при подстановке $v = u_x$, и это «честное» $S$-интегрируемое уравнение. Однако, это в некотором роде случайное совпадение (см. ДЗ-15).

# Цепочка Тоды на полупрямой

Покажем, что 2DTL с граничными условиями

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 0$$

является обобщением уравнения Лиувилля, в том смысле, что для её решений существует явная формула, аналогичная (14).

Сначала рассмотрим обрыв только с одного конца, то есть, полубесконечную цепочку

$$u_0 = 0, \quad u_{j,xy} = e^{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Удобно перейти к уравнениям в рациональной форме, сделав замену $u_j = \log w_j$, тогда имеем

$$w_0 = 1, \quad w_j w_{j,xy} = w_{j,x} w_{j,y} + w_{j-1} w_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{18}$$

Решение этих уравнений полностью определяется произвольной функцией $w_1 = f(x, y)$, так как остальные переменные находятся рекуррентно по формуле

$$w_{j+1} = \frac{w_j w_{j,xy} - w_{j,x} w_{j,y}}{w_{j-1}}$$

(в предположении, что $w_{j-1} \neq 0$). Имеем

$$w_0 = 1, \quad w_1 = f(x, y), \quad w_2 = f f_{xy} - f_x f_y = \det \begin{pmatrix} f & f_y \\ f_x & f_{xy} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \frac{w_2 w_{2,xy} - w_{2,x} w_{2,y}}{f}.$$

Если расписать последнее выражение, то оказывается, что $f$ сокращается и

$$w_3 = \det \begin{pmatrix} f & f_y & f_{yy} \\ f_x & f_{xy} & f_{xyy} \\ f_{xx} & f_{xxy} & f_{xxyy} \end{pmatrix}.$$

После этого можно угадать общий ответ.

Сначала докажем одно полезное тождество (вариант тождества Якоби) для вронскианов от произвольных гладких функций

$$W(f_0, \dots, f_j) = \det\big(\partial_x^k(f_i)\big)_{i,k=0}^{j}.$$

**Лемма 1.** Пусть $F$ — последовательность функций $f_0, \dots, f_j$ (возможно пустая, при этом полагаем $W(\varnothing) = 1$). Тогда выполняется тождество

$$W(F)W(F,g,h) = \begin{vmatrix} W(F,g) & W(F,h) \\ \partial_x(W(F,g)) & \partial_x(W(F,h)) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

***Доказательство.*** $W(F,g,h)$ и правая часть тождества являются дифференциальными операторами, действующими на $h$:

$$(a_0\partial_x^{j+2} + \dots + a_{j+2})(h) = (b_0\partial_x^{j+2} + \dots + b_{j+2})(h).$$

При этом ядра обоих операторов натянуты на $\{f_0, \dots, f_j, g\}$. Ядро определяет дифференциальный оператор с точностью до множителя. Сравнение коэффициентов при $\partial_x^{j+2}(h)$ показывает, что этот множитель равен $W(F)$. ■

**Утверждение 2.** Общее решение полубесконечной цепочки (18) имеет вид

$$w_n = W(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-1}(f)), \tag{20}$$

где $f(x,y)$ произвольная, достаточное число раз дифференцируемая функция.

*Доказательство.* Пусть $F$ последовательность $f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-2}(f)$ и

$$g = \partial_y^{j-1}(f), \quad h = \partial_y^{j}(f).$$

Тогда в тождестве (19) имеем

$$W(F) = w_{j-1}, \quad W(F,g) = w_j, \quad W(F,h) = \partial_y(w_j), \quad W(F,g,h) = w_{j+1}.$$

Следовательно, функции $w_j$ удовлетворяют уравнениям

$$w_0 = 1, \quad w_{j-1}w_{j+1} = \begin{vmatrix} w_j & w_{j,y} \\ w_{j,x} & w_{j,xy} \end{vmatrix} = w_j w_{j,xy} - w_{j,x}w_{j,y},$$

что и требуется. ■

# Цепочка Тоды на отрезке с закреплёнными концами

Теперь наложим условие обрыва с двух концов: $u_0 = u_{n+1} = 0$ или, что то же самое, $w_0 = w_{n+1} = 1$.

При $n = 1$ получаем уравнение Лиувилля

$$u_{1,xy} = e^{-2u_1},$$

решение которого, как мы знаем, определяется двумя функциями $a(x)$, $b(y)$ по формуле (14) (с точностью до растяжения).

При $n = 2$ имеем систему

$$u_{1,xy} = e^{u_2-2u_1}, \quad u_{2,xy} = e^{-2u_2+u_1},$$

в общем случае — цепочку Тоды типа $A_n$

$$\begin{aligned} u_{1,xy} &= e^{u_2-2u_1}, \\ u_{j,xy} &= e^{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ u_{n,xy} &= e^{-2u_n+u_{n-1}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для этой системы существует явная формула, аналогичная (14), выражающая общее решение через $2n$ произвольных функций $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $b_1(y), \ldots, b_n(y)$.

Идея вывода заключается в том, чтобы воспользоваться формулой (20), учитывающей одно граничное условие $w_0 = 1$, и уточнить вид функции $f(x, y)$ при помощи второго условия $w_{n+1} = 1$.

Фактически, формула (20) преобразует систему (21) в одно скалярное уравнение

$$w_{n+1} = W_x(f, \partial_y(f), \ldots, \partial^n y(f)) = 1$$

на функцию $f(x, y)$, то есть,

$$\begin{vmatrix} f & f^{(0,1)} & \ldots & f^{(0,n)} \\ f^{(1,0)} & f^{(1,1)} & \ldots & f^{(1,n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n,0)} & f^{(n,1)} & \ldots & f^{(n,n)} \end{vmatrix} = 1, \tag{22}$$

где $f^{(i,j)} = \partial_x^i \partial_y^j (f)$.

Воспользуемся тем, что для функций вида

$$f(x,y) = a_0(x)b_0(y) + \dots + a_n(x)b_n(y)$$

вронскиан факторизуется на множители, зависящие только от $x$ и от $y$.

Действительно, пусть $f = AB$, где $A$ и $B$ векторы

$$A = (a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)), \quad B = (b_0(y), b_1(y), \dots, b_n(y)).$$

Тогда

$$W_x(f, \dots, \partial_y^n(f)) = \det \begin{pmatrix} AB & AB^{(1)} & \dots & AB^{(n)} \\ A^{(1)}B & A^{(1)}B^{(1)} & \dots & A^{(1)}B^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(n)}B & A^{(n)}B^{(1)} & \dots & A^{(n)}B^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b_0 & b_0^{(1)} & \dots & b_0^{(n)} \\ b_1 & b_1^{(1)} & \dots & b_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n^{(1)} & \dots & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= W_x(a_0, \dots, a_n) W_y(b_0, \dots, b_n).$$

Далее, используем то, что при умножении всех $a_i(x)$ на общий множитель $p(x)$, он выносится из вронскиана:

$$W_x(pa_0,\dots,pa_n) = \det\begin{pmatrix} pa_0 & pa_1 & \dots & pa_n \\ (pa_0)' & (pa_1)' & \dots & (pa_n)' \\ \hdotsfor{4} \\ (pa_0)^{(n)} & (pa_1)^{(n)} & \dots & (pa_n)^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= p^{n+1} W_x(a_0,\dots,a_n),$$

и аналогично для $W_y$. За счет этого можно отнормировать вронскианы так, чтобы они были равны 1.

**Утверждение 3.** Система (21) имеет решение

$$u_j = \log W_x(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-1}(f)), \quad j = 1,\dots,n,$$

$$f = \left(W_x(a_1',\dots,a_n')W_y(b_1',\dots,b_n')\right)^{-\frac{1}{n+1}}(1 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n),$$

с произвольными линейно независимыми функциями $a_i(x), b_i(y)$.

При $n = 1$ это решение совпадает с формулой для уравнения Лиувилля (15), с точностью до замены $2u_1 = -u$.

# Домашнее задание

**Задача 12.** Используя преобразования для уравнения (9), покажите, что уравнение

$$\psi_{xy} = y\psi_y - n\psi$$

решается в квадратурах при любом целом $n$.

**Задача 13.** Решения цепочки (3), зависящие только от $t = x + y$, очевидно, описываются одномерной цепочкой Тоды

$$b_j' = c_j - c_{j+1}, \quad c_j' = c_j(b_j - b_{j-1}),$$

что эквивалентно (5). Получите для этой цепочки представление нулевой кривизны вида

$$\Phi_{j+1} = W_j \Phi_j, \quad \Phi_j' = U_j \Phi_j \quad \Rightarrow \quad W_j' = U_{j+1} W_j - W_j U_j,$$

с $2 \times 2$ матрицами $U_j$, $W_j$. Для этого, подставьте $\psi_j(x, y) = e^{\lambda x} \phi_j(t)$ в линейные уравнения (7), (8) для двумерной цепочки и перепишите их относительно вектора-столбца $\Phi_j = (\phi_j, \phi_{j+1})^T$.

**Задача 14.** Докажите, что любой $y$-интеграл уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ выражается через базисный интеграл $J = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$ и его производные по $x$:

$$D_y(F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = f(x, J, D_x(J), \ldots, D_x^n(J)).$$

(Естественно, аналогичное утверждение верно и для $x$-интегралов).

**Задача 15.** Докажите, что уравнение Лиувилля совместно с эволюционным уравнением

$$u_t = e^{-u} D_x(e^u F),$$

где $F$ — произвольный $y$-интеграл. В частности, уравнение (16)

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3$$

получается при выборе $F = J$.

**Задача 16.** Проверьте прямым вычислением, что уравнение sinh-Гордона

$$u_{xy} = e^u - e^{-u}$$

также совместно с уравнением (16).

*Замечание.* В отличие от предыдущего примера, эволюционных симметрий с произвольной функцией в правой части здесь нет. Все симметрии исчерпываются высшими симметриями для (16) (это доказывать не надо).