

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 4 · 28 февраля 2022

Многосолитонное решение КдФ

Функция Бейкера–Ахиезера

На прошлой лекции мы проверили, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \quad (1)$$

равносильно условию совместности $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ для линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x, \quad (2)$$

где $a = -2\lambda - u$.

Было показано, что уравнение Риккати для функции $f = \psi_x/\psi$

$$f_x + f^2 = u - \lambda$$

допускает решение в виде ряда

$$f(z) = -z/2 + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots, \quad \lambda = -z^2/4,$$

с локальными коэффициентами $F_j \in \mathcal{F}$, что даёт бесконечно много законов сохранения.

Теперь будем строить в виде ряда саму функцию ψ . На этот раз удобнее заменить $z \rightarrow 2z$.

Определение 1. Формальной функцией Бейкера–Ахиезера называется ряд вида

$$\psi(x, t, z) = e^{zx+4z^3t} \left(1 + \frac{\varphi_1(x, t)}{z} + \frac{\varphi_2(x, t)}{z^2} + \dots \right), \quad (3)$$

удовлетворяющий уравнениям (2) с $\lambda = -z^2$.

Множитель e^{zx+4z^3t} — это частное решение уравнений (2) при $u = 0$:

$$\psi_{xx} = z^2\psi, \quad \psi_t = 4z^2\psi_x.$$

Покажем, что Определение 1 корректно, в том смысле, что коэффициенты ряда рекуррентно определяются. Обозначим

$$\psi = e^X \Phi, \quad X = zx + 4z^3t, \quad \Phi = 1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} + \dots,$$

и перепишем уравнения для Φ .

Имеем

$$\begin{aligned}\psi_{xx} &= e^X(z^2\Phi + 2z\Phi_x + \Phi_{xx}) = e^X(u + z^2)\Phi, \\ \psi_t &= e^X(4z^3\Phi + \Phi_t) = e^X(u_x\Phi + (4z^2 - 2u)(z\Phi + \Phi_x)).\end{aligned}$$

Уравнение по x :

$$2z\Phi_x = -\Phi_{xx} + u\Phi.$$

Уравнение по t :

$$\begin{aligned}\Phi_t &= (4z^2 - 2u)\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi \\ &= 2z(-\Phi_{xx} + u\Phi) - 2u\Phi_x + (u_x - 2zu)\Phi \\ &= -2z\Phi_{xx} - 2u\Phi_x + u_x\Phi \\ &= (\Phi_{xx} - u\Phi)_x - 2u\Phi_x + u_x\Phi \\ &= \Phi_{xxx} - 3u\Phi_x.\end{aligned}$$

Расписываем по степеням z , получаем, при $j = 1, 2, \dots$,

$$2\varphi_{1,x} = u, \quad 2\varphi_{j+1,x} = -\varphi_{j,xx} + u\varphi_j, \quad (4)$$

$$\varphi_{j,t} = \varphi_{j,xxx} - 3u\varphi_{j,x}. \quad (5)$$

- Уравнение (4) — это рекуррентные соотношения, из которых φ_j находятся по заданному u . При этом используется интегрирование по x . Легко видеть, что φ_j не являются локальными (то есть, это не функции от динамических переменных $u, u_x, \dots$), в отличие от коэффициентов ряда $f(z)$.
- Из-за постоянных интегрирования ответ не единственный. Это ясно также из того, что функцию (3) можно умножать на произвольный постоянный ряд $1 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \dots$.
- По построению, (4) и (5) совместны, если u удовлетворяет КдФ. Поэтому, подстановка в (5) функций, найденных из (4), не приводит к противоречиям — просто уточняется зависимость постоянных интегрирования от t .

Замечательное свойство уравнений (4) и (5) — их можно оборвать на любом номере. Точнее, если выполняется свойство, что $\phi_{n+1} = 0$, то и $\psi_{n+2}, \psi_{n+3}, \dots$ можно выбрать равными 0. Это приводит к следующему определению.

Потенциалы Баргманна

Определение 2. Функция $u(x, t)$, вещественная, быстроубывающая и без особенностей, называется потенциалом Баргманна, если уравнения (2) с $\lambda = -z^2$ допускают решение в виде квазимногочлена

$$\psi(x, t, z) = e^{zx+4z^3t}(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n). \quad (6)$$

Замечание 1. Определение восходит к статье 1949 (уравнение Шрёдингера на полупрямой, $n = 1, 2$, без зависимости от t)

V. Bargmann. On the connection between phase shifts and scattering potential. *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) [488–493](#).

- Ясно, что условие обрыва накладывает какие-то ограничения на потенциал. Будет показано, что оно выделяет $2n$ -параметрическое семейство функций, удовлетворяющих КдФ.
- Эти решения явные — записываются, как рациональные выражения от экспонент. Для вывода потребуется только линейная алгебра.

- Наибольшую трудность представляет анализ условий вещественности, быстрого убывания и регулярности. Сегодня мы не будем за этим следить, требуем только обрыв.

Условие обрыва превращает уравнения (4) и (5) в совместную пару систем ОДУ порядка $2n$:

$$\begin{aligned}\varphi_{j,xx} &= -2\varphi_{j+1,x} + 2\varphi_{1,x}\varphi_j, & j &= 1, \dots, n, & \varphi_{n+1} &:= 0. \\ \varphi_{j,t} &= \varphi_{j,xxx} - 6\varphi_{1,x}\varphi_{j,x},\end{aligned}\tag{7}$$

Общее совместное решение этой пары зависит от $2n$ произвольных постоянных. Чтобы его построить, мы предъявим полный набор из первых интегралов. Для каждого решения, функция

$$u = 2\varphi_{1,x}\tag{8}$$

даст искомое решение КдФ.

Чтобы записать первые интегралы, нам понадобится одна лемма. Она верна для любых двух решений уравнений (2), не обязательно в виде рядов по z .

Лемма 1. Пусть функции ψ и $\tilde{\psi}$ удовлетворяют уравнениям (2)

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x\psi + 2a\psi_x,$$

тогда их вронскиан постоянен:

$$w := \psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi} = \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix}, \quad w_x = 0, \quad w_t = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$w_x = \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_{xx} & \tilde{\psi}_{xx} \end{vmatrix} = (u - \lambda) \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi & \tilde{\psi} \end{vmatrix} = 0.$$

Для дифференцирования по t надо ещё использовать следствие

$$\psi_{xt} = (-a_{xx} + 2a(u - \lambda))\psi + a_x\psi_x.$$

Тогда

$$w_t = \begin{vmatrix} \psi_t & \tilde{\psi}_t \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ \psi_{xt} & \tilde{\psi}_{xt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_x\psi & -a_x\tilde{\psi} \\ \psi_x & \tilde{\psi}_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \psi & \tilde{\psi} \\ a_x\psi_x & a_x\tilde{\psi}_x \end{vmatrix} = 0,$$

что и требуется. 

Замечание 2. В более общем виде: пусть $w = \det \Psi$, где Ψ — фундаментальная система решений для уравнений

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi,$$

таких, что $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$, тогда $w_x = w_t = 0$.

Доказательство следует из формулы Лиувилля для произвольной матрицы A , зависящей от параметра:

$$(\log \det A)' = \operatorname{tr}(A' A^{-1}).$$

Первые интегралы для системы (7)

Пусть (2) допускает решение в виде квазимногочлена

$$\psi = \psi(x, t, z) = e^{zx+4z^3t}(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n) = e^X \Phi(z).$$

Тогда решением является также

$$\tilde{\psi} = \psi(x, t, -z) = e^{-zx-4z^3t}((-z)^n + \varphi_1(-z)^{n-1} + \dots + \varphi_n) = e^{-X} \Phi(-z).$$

Вронскиан этих решений — нечетный многочлен по z степени $2n + 1$:

$$\begin{aligned} w = \psi \tilde{\psi}_x - \psi_x \tilde{\psi} &= -2z\Phi(z)\Phi(-z) + \Phi(z)\Phi_x(-z) - \Phi_x(z)\Phi(-z) \\ &= -2(-1)^n z(z^2 - k_1^2) \dots (z^2 - k_n^2). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $w(z)$ выражаются через динамические переменные φ_j , $\varphi_{j,x}$, $j = 1, \dots, n$.

Из Леммы 1 следует, что эти коэффициенты постоянны, что даёт n первых интегралов — половину от размерности системы (7).

Оказывается выгодным перейти от коэффициентов к корням k_j , так как тогда можно определить еще n дополнительных первых интегралов.

Утверждение 2. Нули w постоянны:

$$k_{j,x} = k_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отношения $\tilde{\psi}/\psi$ в точках $z = k_j$ также постоянны:

$$c_j \psi(k_j) = \tilde{\psi}(k_j), \quad c_{j,x} = c_{j,t} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Доказательство. То, что k_j постоянны, как уже сказано, следует из Леммы 1. Для отношений имеем

$$\left(\frac{\tilde{\psi}}{\psi}\right)_x = \frac{\psi \tilde{\psi}_x - \psi_x \tilde{\psi}}{\psi^2} = \frac{w}{\psi^2}; \quad \left(\frac{\tilde{\psi}}{\psi}\right)_t = \frac{\psi \tilde{\psi}_t - \psi_t \tilde{\psi}}{\psi^2} = \frac{2aw}{\psi^2},$$

(используем, что $\psi_t = -a_x \psi + 2a\psi_x$) и при подстановке $z = k_j$ производные c_j обращаются в 0. ■

Контрольный вопрос. Чем объясняется, что в системе размерности $2n$ нашлось $2n$ первых интегралов? Разве максимальное количество не должно быть на 1 меньше?

Может показаться, что найденными первыми интегралами трудно воспользоваться: мы ведь не можем найти корни заданного многочлена степени n . Но это и не надо — просто считаем, что корни k_j заданы, также, как и отношения c_j . Задача заключается, чтобы восстановить по этим данным функции φ_j .

Дополнительное предположение. Будем считать, что имеет место случай общего положения, а именно,

$$1) \ k_i^2 \neq k_j^2, \ i \neq j; \quad 2) \ k_j \neq 0; \quad 3) \ c_j \neq 0, \infty.$$

Условие 3), на самом деле, не является ограничением, так как если $c_j = 0$ или $c_j = \infty$, то это означает, что ψ делится на постоянный множитель $z - k_j$ или $z + k_j$. На такие множители можно сократить и придти к ψ — квазимногочлену более низкой степени.

Предположения 1) и 2) более существенны. Если они не выполнены, то система все равно решается в явном виде, но вычисления усложняются, а ответ «вырождается» — получаются рациональные решения или рациональные на солитонном фоне. Мы принимаем эти условия для простоты, при этом основное семейство решений не теряется.

Обозначения

Уравнения (9) — система линейных алгебраических уравнений относительно φ_j . Прежде чем решать её в общем виде, введём несколько обозначений, потом рассмотрим примеры с $n = 1$ и $n = 2$.

Положим

$$X_j = X|_{z=k_j} = k_j x + 4k_j^3 t, \quad y_j = c_j e^{X_j} - e^{-X_j}.$$

Производные по x временно будем обозначать штрихом или верхним индексом. В частности,

$$y'_j = k_j(c_j e^{X_j} + e^{-X_j}), \quad y''_j = k_j^2(c_j e^{X_j} - e^{-X_j}), \quad \dots$$

Вронскиан функций $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ будем обозначать

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Пример: $n = 1$

Система (9) состоит из одного уравнения

$$c_1 \psi(k_1) = \psi(-k_1),$$

где $\psi(z) = e^X(z + \varphi_1)$. Имеем

$$c_1 e^{X_1}(k_1 + \varphi_1) = e^{-X_1}(-k_1 + \varphi_1) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = -k_1 \frac{c_1 e^{X_1} + e^{-X_1}}{c_1 e^{X_1} - e^{-X_1}} = -\frac{y'_1}{y_1}.$$

Согласно (8), $u = 2\varphi_{1,x}$ (при любом n), то есть

$$u = -2(\log y_1)_{xx}.$$

Отметим, что если $k_1, c_1 \in \mathbb{R}$, то и решение вещественно, а его регулярность зависит от знака c_1 :

$$\text{при } c_1 = -e^{2\delta_1} < 0 : \quad \varphi_1 = -k_1 \tanh(X_1 + \delta), \quad u = -\frac{2k_1^2}{\cosh^2(X_1 + \delta_1)},$$

$$\text{при } c_1 = e^{2\delta_1} > 0 : \quad \varphi_1 = -k_1 \coth(X_1 + \delta), \quad u = \frac{2k_1^2}{\sinh^2(X_1 + \delta_1)}.$$

Вещественное решение получается также, если $k_1 = i\kappa_1$ мнимое, а $c_1 = e^{2i\delta_1}$ лежит на единичной окружности:

$$\varphi_1 = \kappa_1 \tan(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1), \quad u = \frac{2\kappa_1^2}{\cos^2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \delta_1)}.$$

Однако, в этом случае в решении всегда есть полюсы.

Пример: $n = 2$

Система (9):

$$c_1\psi(k_1) = \psi(-k_1), \quad c_2\psi(k_2) = \psi(-k_2), \quad \psi = e^X(z^2 + \varphi_1 z + \varphi_2).$$

Это даёт такие уравнения:

$$c_1 e^{X_1} (k_1^2 + \varphi_1 k_1 + \varphi_2) = e^{-X_1} (k_1^2 - \varphi_1 k_1 + \varphi_2),$$

$$c_2 e^{X_2} (k_2^2 + \varphi_1 k_2 + \varphi_2) = e^{-X_2} (k_2^2 - \varphi_1 k_2 + \varphi_2),$$

то есть

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{X_1} - e^{-X_1} & k_1 (c_1 e^{X_1} + e^{-X_1}) \\ c_2 e^{X_2} - e^{-X_2} & k_2 (c_2 e^{X_2} + e^{-X_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1^2 (c_1 e^{X_1} - e^{-X_1}) \\ k_2^2 (c_2 e^{X_2} - e^{-X_2}) \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_1'' \\ y_2 & y_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{\Delta'}{\Delta}, \quad u = -2(\log \Delta)_{xx}, \quad \Delta = W(y_1, y_2).$$

Отметим, что $\Delta \neq 0$, так как $k_1^2 \neq k_2^2$. Можно найти также φ_2 (хотя для вычисления u это не нужно):

$$\varphi_2 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' \\ y_2'' & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{W(y_1', y_2')}{\Delta}.$$

Заметим, что

$$W(y_1, y_2, e^X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & e^X \\ y_1' & y_2' & ze^X \\ y_1'' & y_2'' & z^2 e^X \end{vmatrix} = e^X(z^2 \Delta - z \Delta' + W(y_1', y_2')),$$

откуда следует формула для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\psi(x, t, z) = \frac{W(y_1, y_2, e^X)}{W(y_1, y_2)}.$$

Вронскианная формула

Система (9) при произвольном n :

$$c_j \psi(k_j) = \psi(-k_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

или, подробнее,

$$c_j e^{X_j} (k_j^n + \varphi_1 k_j^{n-1} + \dots + \varphi_n) = e^{-X_j} ((-k_j)^n + \varphi_1 (-k_j)^{n-1} + \dots + \varphi_n).$$

Теорема 3. Пусть $y_j := c_j e^{X_j} - e^{-X_j}$, $X_j := k_j x + 4k_j^3 t$, тогда функция

$$u = -2(\log W(y_1, \dots, y_n))_{xx} \quad (10)$$

удовлетворяет уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ при произвольных параметрах k_j , c_j таких, что k_j^2 попарно различны и не равны 0.

Соответствующее уравнение Шрёдингера $\psi_{xx} = (u + z^2)\psi$ допускает точное решение

$$\psi(x, t, z) = \frac{W(y_1, \dots, y_n, e^{zx+4z^3t})}{W(y_1, \dots, y_n)}. \quad (11)$$

Доказательство. Запишем систему (9) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \dots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Определитель $\Delta = W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ в силу предположения, что все k_j^2 различны. Тогда $\varphi_1 = -\Delta'/\Delta$ и по формуле (8) находим u .

Чтобы получить функцию Бейкера–Ахиезера

$$\psi = e^X(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n),$$

рассмотрим расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y'_n & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \\ e^X & ze^X & \dots & z^{n-1}e^X & z^n e^X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \\ \dots \\ \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}.$$

По правилу Крамера, имеем $1 = \psi W(y_1, \dots, y_n)/W(y_1, \dots, y_n, e^X)$, что и требуется. 

Итак, чисто алгебраическим путём, мы получили огромный запас точных решений КдФ, зависящий от $2n$ произвольных параметров k_j, c_j . Попутно, мы получили явное решение уравнения Шрёдингера с соответствующим потенциалом Баргманна, то есть, это пример точно решаемой квантово-механической задачи.

Отметим, что параметры могут быть комплексными, вещественность в построениях не использовалась. Если параметры вещественны, то функции Y_j можно записать (переобозначая c_j) в виде

$$Y_j = \sinh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad Y_j = \cosh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j).$$

Решение u вещественно также, если некоторые параметры чисто мнимые, $k_j = i\kappa_j$, и соответствующие c_j лежат на единичной окружности, тогда

$$Y_j = \sin(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad Y_j = \cos(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t + \delta_j).$$

Вещественность не портится также, если брать пары комплексно-сопряженных параметров, например, $k_2 = k_1^*$ и $c_2 = c_1^*$ (во вронскиане при комплексном сопряжении только переставятся два столбца).

Оказывается, что решения без полюсов возможны только при вещественных k_j и c_j , и при этом ещё нужно соблюдать некоторые правила выбора c_j . Пока сформулируем окончательный ответ без доказательства.

Теорема 4. Решение (10) вещественно и не имеет особенностей при $x, t \in \mathbb{R}$, если и только если $k_j, c_j \in \mathbb{R}$, все k_j^2 попарно различны и не равны 0, и c_j удовлетворяют правилу чередования знаков

$$c_n \geq 0, \quad -c_{n-1} \geq 0, \quad \dots, \quad (-1)^{n-j} c_j \geq 0, \quad \dots, \quad (-1)^{n-1} c_1 \geq 0,$$

при выборе нумерации по убыванию k_j^2 :

$$k_1^2 > k_2^2 > \dots > k_n^2 > 0.$$

Такая нумерация обусловлена тем, что $\lambda_j = -k_j^2$ — собственные значения для оператора Шрёдингера и их всегда принято нумеровать по возрастанию (λ_1 — основное состояние).

С учетом этого правила и делая переобозначение $X_j = k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j$, формулу для n -солитонного решения можно записать так:

$$u = -2\partial_x^2 \log W \left(\cosh X_n, \sinh X_{n-1}, \dots, \frac{\sinh X_1}{\cosh X_1} \right) \quad \begin{array}{l} \text{при чётном } n, \\ \text{при нечётном } n. \end{array}$$

Также напомним, что мы не рассматривали случай, когда имеются кратные нули k_j или $k_j = 0$. Система (9) становится тогда вырожденной, но это не означает, что исходная система (7) не решается, просто теперь указанных первых интегралов недостаточно и нужно искать дополнительные. Мы пропустим этот класс решений, хотя он достаточно интересен (рациональные и рациональные на солитонном/тригонометрическом фоне). В этом классе все вещественные решения обязательно имеют полюс.

Иллюстрация при $n = 4$

Возьмем конкретные числовые значения (ничем не примечательные)

$$k_1 = 0.95, \quad k_2 = 0.75, \quad k_3 = 0.6, \quad k_4 = 0.35,$$
$$c_j = (-1)^{n-j} e^{2\delta_j}, \quad \delta_1 = -0.5, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 0.3, \quad \delta_4 = -0.2.$$

Чередование знаков c_j обеспечивает регулярность потенциала и волновых функций.

- Одна из функций $\psi(z)$ и $\psi(-z)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$, другая при $x \rightarrow -\infty$.
- В точках $\lambda_j = -k_j^2$ эти функции становятся линейно зависимыми (что и написано в (9)) и определяют собственную (ненормированную) функцию оператора Шрёдингера.
- Для наглядности, все волновые функции выводятся с одним и тем же общим множителем 0.3 — он подобран для данного конкретного примера так, чтобы амплитуда была примерно того же порядка, что и у потенциала.

Волновые функции при фиксированном t

Нули $\psi(x, z)$ и $\psi(x, -z)$

Обратим внимание на нули $\psi(x, z)$:

- при $z \geq k_1$ функция $\psi(x, z)$ не имеет нулей на оси x ;
- при уменьшении z до 0, нули «заходят» в $\psi(x, z)$ через $x = +\infty$, при прохождении z через k_j . При каждом $z \in [k_{j+1}, k_j)$, $\psi(x, z)$ имеет j нулей (n при $z \in [0, k_n)$);
- при дальнейшем уменьшении z нули «выходят» через $x = -\infty$, когда z проходит $-k_j$;
- у функции $\psi(x, -z)$ естественно, все наоборот.

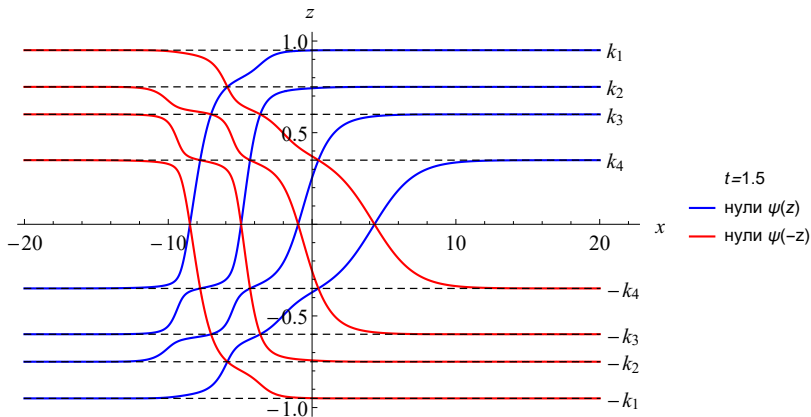
Те же самые нули, как функции от x :

- При каждом фиксированном x функция $\psi(z)$ имеет ровно n нулей по z :

$$\psi(z) = e^X (z - r_1(x)) \dots (z - r_n(x)). \quad (12)$$

- При $x \rightarrow +\infty$ эти нули расположены по одному в каждом из интервалов (k_{j+1}, k_j) , $j = 1, \dots, n - 1$.

- При уменьшении x функции r_j монотонно убывают и при $x \rightarrow -\infty$ перемещаются в интервалы $(-k_j, -k_{j+1})$, обмениваясь местами с нулями $\psi(-z)$.
- Точки x , в которых происходит обмен — это нули собственных функций $\psi(k_j)$.
- За исключением этих точек, в каждом из $2n$ интервалов по z находится один нуль — либо функции $\psi(z)$, либо функции $\psi(-z)$.



Зависимость от t

Ограничимся собственными функциями $\psi(k_j, x, t)$. Они изображены на следующем графике в разные моменты t . Их поведение вполне ожидаемо: когда солитоны расходятся достаточно далеко друг от друга, собственная функция, отвечающая $\lambda = -k_j^2$ локализована вблизи соответствующего солитона. При этом она имеет $j - 1$ нулей по x в любой момент t .

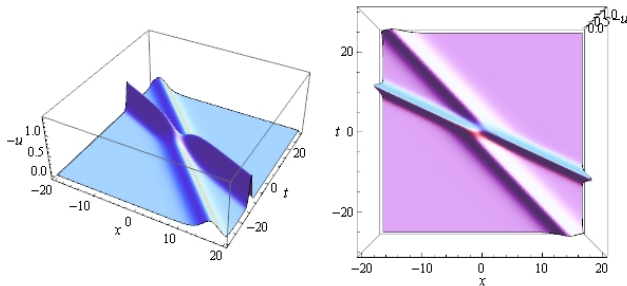
Фазовый сдвиг

При $n = 1$ формула (10) даёт солитон КдФ

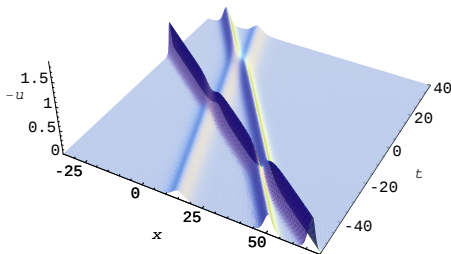
$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2 X}, \quad X = kx + 4k^3t + d.$$

Двух-солитонное решение описывается формулой

$$u = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)(k_1^2 - k_2^2 + k_2^2 \cosh 2X_1 + k_1^2 \cosh 2X_2)}{(k_1 \cosh X_1 \cosh X_2 - k_2 \sinh X_1 \sinh X_2)^2}, \quad k_1 > k_2 > 0.$$



Можно видеть, что после прохождения друг через друга солитоны восстанавливают форму, подобно решениям линейного волнового уравнения. Однако, кое-что во взаимодействии солитонов происходит не так, как подсказывает линейная интуиция.



Во-первых, в момент столкновения амплитуды солитонов не складываются, как в линейном случае, а скорее усредняются. При всех x, t верна оценка

$$0 < u(x, t) < 2k_1^2,$$

то есть, решения не превосходит амплитуды самого большого солитона.

Это можно доказать для произвольного n , используя формулу (она легко выводится из формул (6) и (12))

$$u = 2 \sum_{j=1}^n (k_j^2 - r_j^2),$$

где r_j — нули многочлена $\Phi(z)$; как было отмечено, в каждом из интервалов $[k_{j+1}^2, k_j^2)$ содержится одно из значений r_s^2 .

Во-вторых, после взаимодействия траектории солитонов слегка смещаются, происходит *фазовый сдвиг* (хорошо заметно при виде сверху). Вычислим его для $n = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} W &= 4 \begin{vmatrix} \cosh X_2 & \sinh X_1 \\ k_2 \sinh X_2 & k_1 \cosh X_1 \end{vmatrix} \\ &= (k_1 - k_2)(e^{X_1+X_2} + e^{-X_1-X_2}) + (k_1 + k_2)(e^{X_2-X_1} + e^{X_1-X_2}). \end{aligned}$$

В окрестности прямой $X_1 = k_1 x + 4k_1^2 t + d_1 = 0$ имеем оценки (помним, что $k_1 > k_2 > 0$, эквивалентность $\sim$ понимается с точностью до множителя):

$$e^{X_1} \sim 1, \quad e^{X_2} \sim e^{4k_2(k_2^2 - k_1^2)t} = \begin{cases} \infty & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ 0 & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Отбрасывая убывающие экспоненты, получаем

$$\begin{aligned} \text{при } t \rightarrow -\infty : \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{X_1+X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_2-X_1} \\ &\sim e^{X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} e^{-X_1} \right) \sim e^{X_2} \cosh(X_1 - \delta_{12}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } t \rightarrow +\infty : \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{-X_1-X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_1-X_2} \\ &\sim e^{-X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-X_1} \right) \sim e^{-X_2} \cosh(X_1 + \delta_{12}), \end{aligned}$$

где

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Точно так же, рассматривая решение в окрестности прямой $X_2 = 0$ можно получить сдвиг фазы второго солитона $\delta_{21} = -\delta_{12}$.

При $t = -\infty$ большой солитон движется позади прямой $X_1 = 0$ со сдвигом $-\delta_{12}/k_1$ вдоль оси x , а малый солитон впереди прямой $X_2 = 0$ со сдвигом δ_{12}/k_2 ; при $t = +\infty$ знаки сдвигов меняются, большой солитон забегает вперёд своей прямой, а малый отстаёт от своей.

Аналогично можно найти фазовые сдвиги и в общем случае — рассматривая решение в полосе вдоль прямой $X_j = 0$, отбрасывая убывающие экспоненты и упрощая вронскиан. Приведем только ответ. Пусть

$$\delta_{ij} = -\delta_{ji} = \frac{1}{2} \log \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j}, \quad i < j.$$

Теорема 5. Асимптотически, n -солитонное решение представляет собой сумму солитонов

$$u = \sum_{j=1}^n \frac{2k_j^2}{\cosh^2(k_j x + 4k_j^3 t + d_j \pm \delta_j)}, \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

где фазовый сдвиг равен

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \delta_{ji} = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \log \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} + \frac{1}{2} \sum_{i > j} \log \frac{k_i + k_j}{k_j - k_i}.$$

Итак, при $t \rightarrow -\infty$, решение представляет собой сумму солитонов, упорядоченных слева направо по возрастанию амплитуды и путешествующих со скоростями пропорциональными амплитуде.

После взаимодействия порядок солитонов меняется и при $t \rightarrow +\infty$ солитоны располагаются в обратном порядке.

При этом они восстанавливают форму и единственным результатом взаимодействия является фазовый сдвиг.

Общий сдвиг δ_j , который испытывает один солитон, равен сумме сдвигов δ_{ji} при попарном взаимодействии. Эффекты от тройного взаимодействия отсутствуют.