В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 3 · 21 февраля 2022

Представление Лакса для КдФ

Вспомогательные линейные уравнения

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) основан на представлении нелинейных уравнений в виде условия совместности для линейных уравнений. Поля, входящие в нелинейное уравнение — просто переменные коэффициенты в линейных уравнениях.

Покажем, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{1}$$

выводится из условия совместности стационарного одномерного уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi \tag{2}$$

и уравнения вида

$$\psi_t = b\psi + 2a\psi_x \tag{3}$$

(коэффициенты a и b подберём позже).

Замечание 1. По сравнению с предыдущей лекцией, мы изменили знак $u \to -u$ (то есть, солитон для (1) это ямка, а не горбик). Это сделано потому, что в (2) принято писать именно такой знак, при этом u интерпретируется как потенциальная яма для квантовой частицы, а спектральный параметр λ играет роль энергии.

Проверка совместности в данном случае заключается в вычислении смешанной производной ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (3) по x и заменяем ψ_{xx} из (2):

$$\begin{aligned} \psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx} \\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b + 2a_x)\psi_x. \end{aligned} \tag{4}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (2) по t:

$$\begin{aligned} \psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_x a + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x \\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b + 2a_x)(u-\lambda)\psi \\ &= (b_{xx} + 2u_x a + (u-\lambda)(b + 4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + (u-\lambda)a)\psi_x \\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(b\psi + 2a\psi_x). \end{aligned} \tag{5}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что это действительно есть КдФ, если выбрать

$$b = u_x, \quad a = -2\lambda - u. \tag{7}$$

Проверка совместности в данном случае заключается в вычислении смешанной производной ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt}. Для этого дифференцируем (3) по x и заменяем ψ_{xx} из (2):

$$\begin{aligned}\psi_{xt} &= b_x\psi + b\psi_x + 2a_x\psi_x + 2a\psi_{xx} \\ &= (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi + (b + 2a_x)\psi_x.\end{aligned} \tag{4}$$

Опять дифференцируем это по x, заменяем ψ_{xx} и сравниваем с тем, что получается при дифференцировании (2) по t:

$$\begin{aligned}\psi_{xxt} &= (b_{xx} + 2u_xa + 2(u-\lambda)a_x)\psi + (b_x + 2(u-\lambda)a)\psi_x \\ &\qquad + (b_x + 2a_{xx})\psi_x + (b + 2a_x)(u-\lambda)\psi \\ &= (b_{xx} + 2u_xa + (u-\lambda)(\cancel{b} + 4a_x))\psi + 2(b_x + a_{xx} + (u-\lambda)\cancel{a})\psi_x \\ &= u_t\psi + (u-\lambda)(\cancel{b}\psi + 2\cancel{a}\psi_x).\end{aligned} \tag{5}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ и ψ_x дают

$$a_{xx} + b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_xa. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что это действительно есть КдФ, если выбрать

$$b = u_x, \quad a = -2\lambda - u. \tag{7}$$

Замечание 2. Сравним проделанное вычисление с определением симметрии для ОДУ с предыдущей лекции. Уравнение (2) легко записать в виде динамической системы на переменные ψ и ψ_x, в результате получаем векторное поле

$$D_x = \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} + (u - \lambda)\psi \frac{\partial}{\partial \psi_x}.$$

Аналогично, уравнению (3) отвечает векторное поле

$$D_t = (b\psi + 2a\psi_x)\frac{\partial}{\partial \psi} + c\frac{\partial}{\partial \psi_x},$$

у которого первая компонента задана, а вторая неизвестна. Мы ее находим из условия совместности

$$[D_x, D_t] = 0,$$

которое эквивалентно двум уравнениям. Из одного уравнения определяется c — это правая часть в (4), а второе уравнение даёт (6).

Подчеркнем, что в этом контексте u не является динамической переменной, это просто коэффициент, зависящий от x и t, такой же, как a и b. Динамическими являются ψ и ψ_x. Они независимы, поэтому в (5) требуется занулить коэффициент при каждой из них.

Замечание 3. Выбор коэффициентов (7) — не единственно возможный. Заметим, что (6) можно свести к одному уравнению, исключив b:

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a. \tag{8}$$

В качестве a можно было бы принять произвольную функцию от $u, u_1, u_2, \dots, u_n = \partial_x^n(u)$, что превращает (8) в эволюционное уравнение довольно общего вида.

Однако, здесь выдвигается важное дополнительное требование: это уравнение не должно содержать параметра λ, то есть, он должен тождественно сокращаться в правой части.

Это делает конструкцию жёсткой — коэффициент a должен быть многочленом по λ, и все его коэффициенты (почти) однозначно определяются. Возникает последовательность «высших» уравнений КдФ. Мы вернёмся к этому позже, а пока ограничимся одним примером, следующим по простоте за КдФ:

$$\begin{aligned}
a &= -2\lambda - u && \Rightarrow \quad u_t = u_3 - 6uu_1,\\
a &= 8\lambda^2 + 4u\lambda - u_2 + 3u^2 && \Rightarrow \quad u_t = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1.
\end{aligned}$$

Представление нулевой кривизны

Рассмотрим линейные уравнения общего вида

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \tag{9}$$

где Ψ — n-мерный вектор, U и V матрицы $n \times n$. Это конечномерные системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Условие их совместности записывается совершенно прозрачно:

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= U_t\Psi + U\Psi_t = (U_t + UV)\Psi \\ &= V_x\Psi + V\Psi_x = (V_x + VU)\Psi. \end{aligned}$$

Так как Ψ — вектор из независимых переменных, то это равенство равносильно тому, что коэффициент при Ψ тождественно равен 0:

$$U_t - V_x = [V, U]. \tag{10}$$

Определение 1. Нелинейное уравнение в частных производных допускает *представление нулевой кривизны*, если оно эквивалентно уравнению (10), где U и V матрицы подходящей размерности > 1, зависящие от динамических переменных (полей) для данного уравнения и спектрального параметра λ.

Уравнение КдФ прекрасно подходит под это определение. Уравнения (2), (3) и (4) для ψ записываются в матричном виде (9), если положить

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2(u-\lambda)a & a_x \end{pmatrix} \tag{11}$$

(здесь, без потери общности, взяли $b = -a_x$). В частности, самому уравнению КдФ отвечает матрица V с $a = -2\lambda - u$, то есть

$$V = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda - 2u \\ u_{xx} + 2(\lambda - u)(2\lambda + u) & -u_x \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Наши вычисления можно переформулировать так:

Утверждение 1. Уравнение КдФ допускает представление нулевой кривизны (10) с указанными матрицами U и V.

- Требование, чтобы матрицы зависели от λ важно. Нужно, чтобы решение уравнений (9) на ψ-функции имело нетривиальную зависимость от λ, как параметра. В частности, мы будем строить ψ-функции в виде ряда по λ, а МОЗР основан на изучении спектральных свойств уравнений (9) (при каких λ имеются локализованные или ограниченные решения, данные рассеяния и их зависимость от t).

- Следует учитывать *калибровочные преобразования*

$$\Psi = K\tilde{\Psi}, \quad U = K\tilde{U}K^{-1} + D_x(K)K^{-1}, \quad V = K\tilde{V}K^{-1} + D_t(K)K^{-1}, \quad (13)$$

где $K = K[u, \lambda]$ произвольная невырожденная матрица. Матрицы, связанные такой заменой, считаются калибровочно эквивалентными. Требуется, чтобы они не получались из каких-то тривиальных (например, диагональных или без λ).

- Существование нетривиального представления является сильным свойством, которое можно принять за определение интегрируемости. В принципе, есть некоторые алгоритмы, позволяющие для заданного уравнения найти матрицы U, V или доказать, что их не существует. Однако, они довольно сложны и не универсальны, и мы не будем на этом останавливаться.

Пример 1. Пусть $f = f(x, u, u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{F}$ произвольная функция и

$$U = \begin{pmatrix} u & \lambda(u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} f & \lambda(f+1) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что уравнение (10) для таких матриц эквивалентно уравнению $u_t = D_x(f)$. Получается, что представление нулевой кривизны есть у произвольного уравнения такого вида? Увы, это обман — то, что называют ‘fake representation’. Матрицы U и V получаются заменой (13) из диагональных матриц:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что от такого представления никакой пользы нет.

Распознать фальшивые представления по виду матриц может быть не так-то просто.

Другие примеры

Конечно, кроме КдФ есть и другие нетривиальные примеры.

Пример 2. Рассмотрим матрицы вида

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda & -v \\ u & \lambda \end{pmatrix}, \quad V = 2\lambda U + U_1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix}, \tag{14}$$

тогда уравнение (10) оказывается эквивалентным 2-компонентной эволюционной системе

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2. \tag{15}$$

Это нелинейное уравнение Шрёдингера (система Захарова–Шабата или система Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура). Заметим, что здесь можно выделить несколько вещественных форм. Во-первых, можно считать $u, v \in \mathbb{R}$. Во-вторых, можно сделать замену $t \to it$, после чего появляются редукции $v = \pm u^*$, приводящие к уравнениям

$$-iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2 u. \tag{NLS$^\pm$}$$

Как и в случае КдФ, увеличивая степень V по λ, получим системы более высокого порядка. Например, выбор

$$V = 4\lambda^2 U + 2\lambda U_1 + U_2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & -v_{xx} - 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & u_x v - uv_x \end{pmatrix}, \tag{16}$$

приводит к системе

$$u_t = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_t = v_{xxx} + 6uvv_x. \tag{17}$$

Здесь возможны редукции $v = \pm u$, приводящие к мКдФ$^{\pm}$

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2 u_x.$$

Также можно положить $v = 1$, в результате опять получится КдФ.

Пример 3. Пусть

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda & -u_x\\ u_x & -\lambda\end{pmatrix},\quad V=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & \sin u\\ \sin u & -\cos u\end{pmatrix},$$

тогда уравнение (10) эквивалентно уравнению sin-Гордон

$$u_{xt}=\sin u. \tag{18}$$

Если же взять

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda & u_x\\ u_x & -\lambda\end{pmatrix},\quad V=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}\cosh u & -\sinh u\\ \sinh u & -\cosh u\end{pmatrix},$$

то получится уравнение sinh-Гордон

$$u_{xt}=\sinh u. \tag{19}$$

Отметим, что матрица U здесь фактически та же, что и в (14), с точностью до замены $u\to u_x$, $v\to \pm u_x$ и несущественных переобозначений. Как и в случае уравнений мКдФ$^{\pm}$, НШ$^{\pm}$, уравнения (18) и (19) эквивалентны, если считать переменную u комплексной, но вещественные решения этих уравнений друг к другу не сводятся.

Представление Лакса

В случае КдФ, линейные уравнения для ψ можно переписать в операторном виде, это даёт ещё один способ записи условия совместности. Заметим, что уравнение для ψ_t не содержит производных ψ по x выше первого порядка, поскольку они исключены в силу уравнения Шрёдингера (2). Но, вместо исключения производных можно избавляться от параметра λ. Продифференцируем (2) по x и сократим в (3) член с $\lambda\psi_x$, тогда наши линейные уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi.$$

Это можно записать как

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = A\psi, \tag{20}$$

где L это оператор Шрёдингера, а A оператор третьего порядка:

$$L = -D_x^2 + u, \quad A = 4D_x^3 - 6uD_x - 3u_x. \tag{21}$$

Условие совместности в этом случае выглядит следующим образом:

$$(L_t + LA)\psi = \lambda A\psi = AL\psi \quad \Rightarrow \quad L_t = [A, L].$$

Определение 2. Нелинейное уравнение в частных производных допускает представление Лакса, если оно эквивалентно уравнению

$$L_t = [A, L], \tag{22}$$

где $A, L \in \mathcal{F}[D_x]$ дифференциальные операторы (ДО) с коэффициентами, зависящими от динамических переменных для данного уравнения.

Поясним, что ДО состоят не только из дифференцирований, но и из умножений на элементы $\mathcal{F}$ (это тоже операторы!), а их произведение определяется правилом композиции:

$$(AB)(f) = A(B(f)).$$

Отсюда, в частности, следует правило Лейбница для перестановки $D = D_x$ и $a \in \mathcal{F}$:

$$(Da)(b) = D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad \Rightarrow \quad Da = aD + D(a).$$

По индукции можно доказать также формулу

$$D^n a = aD^n + \binom{n}{1} D(a) D^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} D^{n-1}(a) D + D^n(a),$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (ясно, что это просто формула для $D^n(ab)$).

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\quad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(uD^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4uD^3 \\
&\quad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\quad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\quad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6uD^3 - 6(uD^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(uD + u_x) + 6u^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3u_xD^2 - 3(u_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3u_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2u_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{u}D^3 + 3\cancel{u}_xD^2 + 3u_{xx}D + u_{xxx}) - 4\cancel{u}D^3 \\
&\qquad + 6\cancel{u}D^3 - 6(\cancel{u}D^2 + 2\cancel{u}_xD + u_{xx})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{u}D + u_x) + 6\cancel{u}^2D \\
&\qquad + 3\cancel{u}_xD^2 - 3(\cancel{u}_xD^2 + 2u_{xx}D + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы уметь перемножать любые ДО, важно только не забывать, что и свободный член в операторе — это не функция, а оператор умножения на функцию.

Для тренировки, проверим, что для операторов

$$L = -D^2 + u, \quad A = 4D^3 - 6uD - 3u_x$$

уравнение Лакса действительно дает КдФ. Оператор L_t получается просто дифференцированием коэффициентов по t (согласно правилу Лейбница, можно определить его также, как $[D_t, L]$). Имеем:

$$\begin{aligned}
L_t = u_t &= [4D^3 - 6uD - 3u_x, -D^2 + u] \\
&= 4D^3u - 4uD^3 + 6uD^3 - 6D^2uD \\
&\qquad - 6uDu + 6u^2D + 3u_xD^2 - 3D^2u_x \\
&= 4(\cancel{uD^3} + 3\cancel{u_xD^2} + 3\cancel{u_{xx}D} + u_{xxx}) - 4\cancel{uD^3} \\
&\qquad + 6\cancel{uD^3} - 6(\cancel{uD^2} + 2\cancel{u_xD} + \cancel{u_{xx}})D \\
&\qquad - 6u(\cancel{uD} + u_x) + 6\cancel{u^2D} \\
&\qquad + 3\cancel{u_xD^2} - 3(\cancel{u_xD^2} + 2\cancel{u_{xx}D} + u_{xxx}) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Замечание 4. Представлением Лакса называют любые уравнения вида (22), не обязательно для дифференциальных операторов; например, A и L могут быть элементами некоторой алгебры Ли.

Исторически, введённые выше понятия появились в такой последовательности: в 1967 было показано, что уравнение КдФ служит условием совместности пары линейных уравнений (Гарднер, Грин, Краскал, Миура); в 1968 было введено представление Лакса для КдФ; общее определение представления нулевой кривизны появилось в 1971 (Захаров, Шабат).

Преобразование Миуры

Мы проверили, что уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x \tag{23}$$

служит условием совместности для пары линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - 2(2\lambda + u)\psi_x. \tag{24}$$

Сделаем замену $\psi_x/\psi = f$. Тогда первое уравнение превратится в уравнение Риккати

$$f_x + f^2 = u - \lambda. \tag{25}$$

Второе уравнение даст

$$\begin{aligned}\psi_t/\psi = u_x - 2(2\lambda + u)f &= f_{xx} + 2ff_x - 2(3\lambda + f_x + f^2)f \\ &= f_{xx} - 2(3\lambda + f^2)f.\end{aligned}$$

Дифференцируем по x и получаем модифицированное уравнение КдФ (со знаком $-$)

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda)f_x. \tag{26}$$

Итак, если u удовлетворяет КдФ, то уравнения на ψ-функции (24) имеют совместное решение, и по нему строится функция $f = \psi_x/\psi$, удовлетворяющая мКдФ. Подстановка в обратную сторону еще проще.

Утверждение 2. (Миура, 1968) Пусть f удовлетворяет мКдФ (26), тогда $u = f_x + f^2 + \lambda$ удовлетворяет КдФ (23).

Прямая проверка:

$$\begin{aligned}
u &= f_x + f^2 + \lambda, \\
u_x &= f_{xx} + 2ff_x, \\
u_{xx} &= f_{xxx} + 2ff_{xx} + 2f_x^2, \\
u_{xxx} &= f_{xxxx} + 2ff_{xxx} + 6f_xf_{xx}, \\
u_t &= f_{xt} + 2ff_t \\
&= f_{xxxx} - 6(f^2+\lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 + 2f(f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x) \\
&= u_{xxx} - 6f_xf_{xx} - 6(f^2+\lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 - 12f(f^2+\lambda)f_x \\
&= u_{xxx} - 6(f_x + f^2 + \lambda)(f_{xx} + 2ff_x) \\
&= u_{xxx} - 6uu_x.
\end{aligned}$$

Определение 3. Дифференциальной подстановкой называется явное преобразование $u = a[v]$, переводящее произвольное решение уравнения $E_1[v] = 0$ в решение уравнения $E_2[u] = 0$.

Заметим, что уравнение мКдФ не меняется при замене $f \to -f$. Отсюда следует, что на самом деле есть два преобразования Миуры из мКдФ в Кдф:

$$
\begin{tikzcd}
 & f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda) f_x \arrow[dl, "u=f_x+f^2+\lambda"'] \arrow[dr, "\tilde{u}=-f_x+f^2+\lambda"] & \\
u_t = u_{xxx} - 6 u u_x & & \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx} - 6 \tilde{u} \tilde{u}_x
\end{tikzcd}
$$

Это определяет неявное преобразование между переменными u и $\tilde{u}$, удовлетворяющими одному и тому же уравнению. Такие преобразования называются преобразованиями Бэклунда. Позже мы покажем, как их использовать для размножения решений.

Обращение преобразования Миуры

Используем преобразование Миуры для построения бесконечной последовательности законов сохранения КдФ.

Для этого, обозначим $z^2 = -4\lambda$ и построим *формальное* решение уравнения Риккати

$$f_x + f^2 = u + z^2/4 \tag{27}$$

в виде ряда

$$f(z) = -z/2 + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \cdots . \tag{28}$$

При подстановке в (27) члены с z^2 сокращаются, коэффициент при z^1 даёт $F_0 = 0$, а из остальных коэффициентов следуют рекуррентные соотношения

$$F_1 = -u, \qquad F_{n+1} = D_x(F_n) + \sum_{s=1}^{n-1} F_s F_{n-s}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Отсюда все F_n однозначно находятся в виде дифференциальных многочленов от u.

Вот несколько первых коэффициентов (скобки просто группируют члены одинаковой степени):

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -u, \\
F_2 &= -u_1, \\
F_3 &= -u_2 + u^2, \\
F_4 &= -u_3 + 4uu_1, \\
F_5 &= -u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) - 2u^3, \\
F_6 &= -u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) - 16u^2u_1, \\
F_7 &= -u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) - (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4.
\end{aligned}
$$

Рекуррентные соотношения (29) порождают последовательность плотностей для уравнения КдФ (ясно, что их можно немного упростить по модулю $\operatorname{Im} D_x$, в частности, можно выкинуть старшие производные). Точнее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. 1) Все коэффициенты в разложении (28) являются плотностями законов сохранения для КдФ; 2) все плотности с чётными номерами тривиальны; 3) все плотности с нечётными номерами нетривиальны и друг другу не эквивалентны.

Доказательство. 1) Заметим, что f является плотностью простейшего закона сохранения для уравнения мКдФ (так как правая часть мКдФ есть полная производная по x). При подстановке ряда (28) в мКдФ, равенство выполняется тождественно по параметру z, следовательно все коэффициенты этого ряда являются плотностями законов сохранения, но уже для уравнения КдФ, поскольку они выражены через переменную u.

2) Заметим, что ряд $\tilde{f} = f(-z)$ удовлетворяет тому же уравнению Риккати:

$$f_x + f^2 = u + z^2/4, \quad \tilde{f}_x + \tilde{f}^2 = u + z^2/4.$$

Отсюда следует

$$f_x - \tilde{f}_x = \tilde{f}^2 - f^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} + f = \frac{2F_2}{z^2} + \frac{2F_4}{z^4} + \cdots = -D_x(\log(f - \tilde{f})).$$

Раскладывая $\log(f - \tilde{f})$ по z, получаем, что все F_{2k} — полные производные.

3) Каждую плотность можно разбить на группы мономов по степеням. Проследим только за членами вида u^k, полагая $u_n = 0$ при $n > 0$. Это превращает (29) в алгебраическое рекуррентное соотношение

$$F_1 = -u, \quad F_{n+1} = \sum_{s=1}^{n-1} F_s F_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

решение которого имеет вид $F_{2k} = 0$, $F_{2k-1} = c_k(-u)^k$, где c_k — числа $1, 1, 2, 5, 14, 24, \dots$. Поменяв знак u, легко видеть, что это возрастающая последовательность (на самом деле, это числа Каталана $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$). Следовательно, все F_{2k-1} содержат член u^k с ненулевым коэффициентом, а в чётных номерах такого члена нет. Отсюда следует, что $F_{2k-1} \notin \operatorname{Im} D_x$, так как член u^k не может возникнуть при дифференцировании. Так как степени разные, это доказывает и неэквивалентность разных плотностей.

Домашнее задание

Задача 6. Покажите, что уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x = 3u_{yy} \tag{30}$$

служит условием совместности $\psi_{yt} = \psi_{ty}$ для линейных уравнений вида

$$\psi_y = \psi_{xx} - u\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x + v\psi. \tag{31}$$

(Получите систему на коэффициенты u, v и исключите в ней v.)

Замечание. Обратите внимание на отличия уравнений (31) от примеров на лекции. Во-первых, параметра λ нет. Во-вторых, относительно ψ это не ОДУ, а эволюционные уравнения, поэтому ψ, ψ_x, $\psi_{xx}, \ldots$ являются динамическими переменными. Их бесконечно много, поэтому они и заменяют степени λ в одномерных спектральных задачах.

Задача 7. Решения уравнения (30), не зависящие от y, удовлетворяют продифференцированному КдФ

$$(u_t - u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x + a(t).$$

Покажите, что это уравнение сводится к обычному КдФ с $a(t) = 0$, при помощи замены вида $\tilde{u}(x,t) = u(x + b(t), t) + c(t)$ с подходящими b и c. Для таких решений зависимость ψ от y можно отделить, положив $\psi(x,y,t) = e^{-\lambda y}\psi(x,t)$. Покажите, что при этом уравнения (31) сводятся к уже известным нам линейным задачам для КдФ.

Задача 8. Аналогично, решения уравнения (30), не зависящие от t, удовлетворяют уравнению Буссинеска

$$3u_{yy} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 0.$$

Введите спектральный параметр, полагая $\psi(x,y,t) = e^{\lambda t}\psi(x,y)$ и выведите из (31) представление нулевой кривизны для этого уравнения (в матрицах 3×3, в отличие от КдФ).

Задача 9. Для КдФ мы получили два представления нулевой кривизны: одно с матрицами (11), (12), другое с матрицами (14), (16), в которых нужно подставить $v = -1$. Покажите, что эти представления калибровочно эквивалентны (возможно, кроме подбора матрицы K нужно ещё преобразовать λ).

Задача 10. Проверьте, что уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

получается подстановкой $u = v_x/v$ из линейного уравнения $v_t = v_{xx}$.

Задача 11. Проверьте, что уравнение

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x}$$

допускает подстановку $v = \sqrt{u_x}$ в линейное уравнение $v_t = v_{xxx}$.