В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 2 · 14 февраля 2022

Подготовительные сведения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть дана система ОДУ (динамическая система) в некоторой области в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(u_1, \dots, u_n), \\ \qquad \dots\dots\dots \\ u_n' = f_n(u_1, \dots, u_n). \end{cases} \tag{1}$$

Она определяет правило дифференцирования функций от динамических переменных:

$$\frac{d}{dt} a(u_1, \dots, u_n) = f_1 \partial_1(a) + \dots + f_n \partial_n(a),$$

где для краткости обозначено $\partial_j = \partial / \partial u_j$.

Таким образом, ***векторное поле***, определяемое системой (1), можно отождествить с дифференциальным оператором вида

$$F = f_1 \partial_1 + \dots + f_n \partial_n.$$

Первые интегралы

Функция $I(u_1, \ldots, u_n)$ называется ***первым интегралом*** для (1), если

$$\frac{dI}{dt} = F(I) = 0.$$

Уравнение $I = \mathrm{const}$ определяет инвариантное подмногообразие для (1), то есть, любая интегральная кривая, начинающаяся на этом многообразии, на нем и остается. Зная первый интеграл, можно понизить порядок системы.

Произвольная функция от первых интегралов сама есть первый интеграл.

В окрестности неособой точки существует замена переменных, выпрямляющая векторное поле, то есть, приводящая (1) к тривиальному виду

$$v_1' = 1, \quad v_2' = \cdots = v_n' = 0.$$

Для этой системы, очевидно, $v_2, \ldots, v_n$ — первые интегралы. Итак, локально у (1) n-го порядка есть $n-1$ функционально независимый первый интеграл. В явном виде, их, конечно, редко можно найти, так как выпрямление векторного поля эквивалентно решению исходной системы.

Замечание. Бывают задачи, в которых координаты u_j избыточны и не являются независимыми. Например, рассматривается ОДУ на сфере

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1.$$

В этом случае векторные поля рассматриваются в касательном расслоении сферы, то есть, f_j определяются только на сфере и удовлетворяют условию $u_1 f_1 + \cdots + u_n f_n = 0$. Аналогично и для других многообразий.

В частности, такие системы могут возникать понижении порядка при помощи первого интеграла, когда мы ограничиваем динамику на его поверхность уровня.

В таких, случаях, чтобы получить независимые переменные, нужно вводить какие-то новые локальные координаты, например, в случае сферы можно сделать стереографическую проекцию. Естественно, при этом размерность понижается до $\mathbb{R}^{n-1}$.

Метод характеристик

Полезно отметить, что задача о нахождении первых интегралов для (1) эквивалентна решению линейного однородного УЧП первого порядка для функции I:

$$f_1(u_1, \ldots, u_n)\partial_1(I) + \cdots + f_n(u_1, \ldots, u_n)\partial_n(I) = 0. \tag{2}$$

Система (1) называется *характеристической* для этого уравнения (а ее интегральные кривые называются характеристиками).

Если удаётся найти для (1) $n-1$ функционально независимых первых интегралов $I_1, \ldots, I_{n-1}$, то общее решение (2) записывается в виде

$$I = A(I_1, \ldots, I_{n-1}),$$

где A — произвольная дифференцируемая функция от $n-1$ переменных.

Этот метод легко обобщить и для квазилинейных уравнений

$$f_1(u_1,\dots,u_n,I)\partial_1(I)+\dots+f_n(u_1,\dots,u_n,I)\partial_n(I)=f(u_1,\dots,u_n,I) \quad (3)$$

(обобщение возможно и для уравнений, нелинейных по производным, но оно немного сложнее). Для (3), под характеристической системой понимается система порядка $n+1$

$$u_1'=f_1(u_1,\dots,u_n,I),\ \dots,\ u_n'=f_n(u_1,\dots,u_n,I),\quad I'=f(u_1,\dots,u_n,I).$$

Пусть $J(u_1,\dots,u_n,I)$ её первый интеграл, то есть

$$f_1\partial_1(J)+\dots+f_n\partial_n(J)+f\partial_I(J)=0. \quad (4)$$

Тогда равенство $J=\mathrm{const}$ неявно определяет I как функцию от $u_1,\dots,u_n$, удовлетворяющую (3). Действительно, отсюда следует

$$\partial_1(J)+\partial_I(J)\partial_1(I)=0,\quad \dots,\quad \partial_n(J)+\partial_I(J)\partial_n(I)=0$$

и подстановка в (4) приводит к (3). Следовательно, общее решение (3) определяется уравнением

$$J_n=A(J_1,\dots,J_{n-1}),$$

где $J_1,\dots,J_n$ — первые интегралы характеристической системы, A — произвольная функция.

Пример. Уравнение Хопфа

Решим уравнение

$$u_t = uu_x. \tag{5}$$

По сравнению с предыдущим, здесь просто изменены обозначения: t это u_1, x это u_2, u это I (а индексы обозначают частные производные). Характеристическая система (штрих обозначает производную по какой-то вспомогательной переменной) имеет вид:

$$t' = 1, \quad x' = -u, \quad u' = 0.$$

Первые интегралы:

$$J_1 = u, \quad J_2 = x + ut.$$

Следовательно, $u(x,t)$ определяется неявно, как решение уравнения

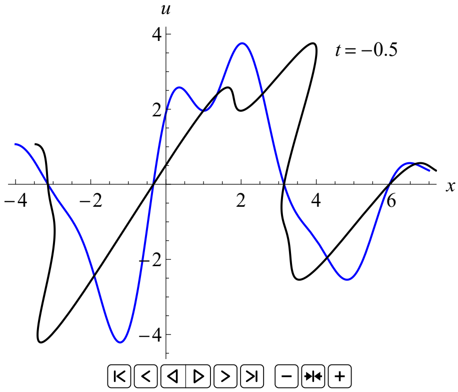
$$u = a(x + ut) \tag{6}$$

с произвольной функцией a (рекомендуется проверить, вычисляя u_x, u_t как производные неявной функции и подставляя в (5)).

Ответ (6) кажется идиотским (как решить такое уравнение при произвольной функции a?), но у него имеется вполне наглядный геометрический смысл.

При $t = 0$ имеем $u(x, 0) = a(x)$, то есть, функция a определяется профилем u в начальный момент времени $t = 0$.

Рассмотрим точки графика u, лежащие на фиксированной высоте $u = u_0$. При любом t, эти точки определяются уравнением $a(x + u_0 t) = u_0$, то есть, получаются из начальных точек параллельным переносом вдоль оси Ox на расстояние $-u_0 t$. Более высокие точки едут быстрее. В результате, график просто испытывает преобразование косого сдвига.



Алгебра Ли векторных полей

Коммутатор двух векторных полей (заданных в одной и той же области $\mathbb{R}^n$) определяется, как коммутатор любых двух операторов:

$$\begin{aligned}
[F,G](a) &= F(G(a)) - G(F(a)) \\
&= \sum_{i,j} \Big(f_i \partial_i (g_j \partial_j (a)) - g_j \partial_j (f_i \partial_i (a)) \Big) \\
&= \sum_{i,j} \Big(f_i \partial_i (g_j) \partial_j (a) - g_j \partial_j (f_i) \partial_i (a) \Big) \\
&= \sum_{i,j} \big(f_i \partial_i (g_j) - g_i \partial_i (f_j) \big) \partial_j (a).
\end{aligned}$$

Вторые производные от a сокращаются и в результате $[F,G]$ также оказывается векторным полем. Для его вычисления сначала F применяем покомпонентно к G, потом наоборот, и вычитаем:

$$[F,G] = \sum_j (F(g_j) - G(f_j)) \partial_j. \tag{7}$$

Также очевидно, что векторные поля можно складывать и умножать на число, то есть, они образуют линейное пространство (бесконечномерное, даже при $n = 1$). Операция коммутатора превращает его в алгебру Ли, то есть, выполняются свойства

$$[F, G] = -[G, F], \quad \text{(кососимметричность)}$$
$$[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0, \quad \text{(тождество Якоби)}.$$

Эти свойства легко доказываются в общем виде для коммутатора $[F, G] = FG - GF$ любых операторов, формула (7) для этого не нужна, она лишь показывает, что множество векторных полей замкнуто относительно этой операции.

Симметрии

Пусть даны два векторных поля. Рассмотрим отвечающие им динамические системы, обозначив независимые переменные по разному, например, x и t:

$$\frac{du_j}{dx} = f_j(u_1, \ldots, u_n), \quad \frac{du_j}{dt} = g_j(u_1, \ldots, u_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Существует ли, для любого начального условия при $x = t = 0$, совместное решение $u_j(x,t)$ удовлетворяющее обеим системам? Так как частные производные ∂_x и ∂_t коммутируют, то на совместном решении должно выполняться равенство $[F, G] = 0$. Из произвольности начального условия следует, что оно должно выполняться тождественно. Верно и обратное: если $[F, G] = 0$, то совместное решение определено, по крайней мере локально.

Динамические системы с коммутирующими векторными полями называются ***симметриями*** друг для друга.

Пояснение: симметрия — это преобразование, сохраняющее какой-то объект. В данном случае, сдвиг по интегральным траекториям одной системы сохраняет множество интегральных траекторий другой системы, то есть, решение $u(x, t_0)$ переводится в решение $u(x, t_1)$.

Без подробностей, отметим, что симметрии, как и первые интегралы, позволяют понижать порядок системы. Имеет место такое утверждение.

Утверждение 1. Пусть для векторного поля F_1 порядка n известны первые интегралы $I_1, \ldots, I_r$ и симметрии $F_1, \ldots, F_{n-r}$, причем I_j служат первыми интегралами и для них, и симметрии попарно коммутируют:

$$[F_i, F_j] = 0, \quad F_i(I_k) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n-r, \quad k = 1, \ldots, r,$$

тогда динамическая система, соответствующая F_1, интегрируется в квадратурах.

Гамильтоновость

Скобка Пуассона — это бинарная операция $\{,\}$ на функциях от динамических переменных, удовлетворяющая свойствам

$$
\begin{aligned}
\{\alpha f + \beta g, h\} &= \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\} && \text{(линейность)},\\
\{fg, h\} &= f\{g,h\} + g\{f,h\} && \text{(правило Лейбница)},\\
\{f,g\} &= -\{g,f\} && \text{(антисимметричность)},\\
\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} &= 0 && \text{(тождество Якоби)}.
\end{aligned}
$$

Благодаря правилу Лейбница и линейности, скобку достаточно задать на координатах:

$$\{u_i, u_j\} = J_{ij}(u_1, \ldots, u_n),$$

тогда

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} J_{ij} \partial_i(f) \partial_j(g).$$

При этом должно быть $J_{ij} = -J_{ji}$ и

$$\{u_i, J_{jk}\} + \{u_j, J_{ki}\} + \{u_k, J_{ij}\} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_s \big(J_{is}\partial_s(J_{jk}) + J_{js}\partial_s(J_{ki}) + J_{ks}\partial_s(J_{ij})\big) = 0.$$

Классический пример — скобка Дарбу, отвечающая матрице $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Функции c такие, что $\{c, f\} = 0$ для всех f называются аннуляторами скобки Пуассона или функциями Казимира (их может и не быть, это показатель вырожденности скобки).

Система ОДУ вида
$$u_j' = \{u_j, h\} = \sum_s J_{js} \partial_s(h)$$
называется гамильтоновой с гамильтонианом h, соответствующее векторное поле X_h называется гамильтоновым. Для любой функции имеем
$$X_h(f) = \{f, h\}.$$
В частности, $X_h(h) = 0$, то есть, h — первый интеграл для соответствующего векторного поля. Кроме того, имеем
$$\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = X_f(\{h, g\}) - X_g(\{h, f\}) \\
&= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} = \{\{h, g\}, f\} + \{\{f, h\}, g\} \\
&= \{\{g, f\}, h\} = \{h, \{f, g\}\} = X_{\{f,g\}}(g),
\end{aligned}$$
то есть
$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

Таким образом, коммутатор гамильтоновых векторных полей сам является гамильтоновым векторным полем, откуда следует, что такие поля образуют алгебру Ли.

В вычислениях гамильтоновость удобна тем, что она позволяет заменять операции над векторными полями (n-компонентный объект) на операции над гамильтонианами (скаляры). В частности, Утверждение 1 заменяется на такое:

Утверждение 2. Пусть на $2n + r$-мерном многообразии задана скобка Пуассона с r функциями Казимира и функционально независимые с ними и друг с другом гамильтонианы $h_1, \dots, h_n$ в инволюции, то есть, $\{h_i, h_j\} = 0$. Тогда гамильтонова система, отвечающая h_1, интегрируется в квадратурах.

Уравнения в частных производных

Квазилинейные уравнения второго порядка по производным делятся на эллиптические, гиперболические и параболические, в зависимости от сигнатуры квадратичной формы, отвечающей главной части уравнения. В принципе, уравнения из этих классов встречаются и у нас.

- Гиперболические уравнения: Лиувилля $u_{xy} = e^u$ и sin-Гордона $u_{xy} = \sin u$.
- Их (более сложные) эллиптические версии: $u_{xx} + u_{yy} = e^u$, $u_{xx} + u_{yy} = \sin u$.
- Параболические: уравнение Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$.

Однако, в основном мы работаем с ***эволюционными*** уравнениями или системами. Они первого порядка по ∂_t, а по ∂_x порядок может быть любой. Например, КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x,$$

или нелинейное уравнение Шредингера

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2.$$

Динамические переменные

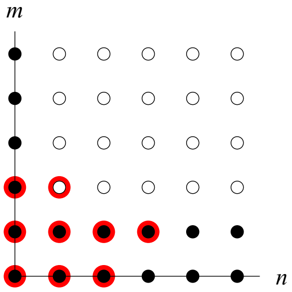
Пусть дано УЧП относительно функции $u(x_1, \ldots, x_n)$. Чтобы обобщить для него такие понятия, как первые интегралы и симметрии, необходимо понять, как в этом случае устроено дифференцирование в силу уравнения. Для начала нужно понять, на чем оно действует, то есть, обобщить понятие динамических переменных.

Определение. Динамическими переменными называется такой минимальный набор частных производных от u, что все остальные выражаются через них из самого уравнения и всех его дифференциальных следствий.

В отличие от случая ОДУ, набор динамических переменных бесконечен. Грубо говоря, это набор таких производных, которые можно задавать произвольно в качестве начальных данных. Понятно, что решение УЧП имеет функциональный произвол (например, решение задачи Коши определяется произвольным начальным профилем), поэтому даже локально, в одной точке, в ряде Тейлора для решения имеется бесконечно много свободных коэффициентов.

Например, пусть в уравнении на $u(x,y)$ содержатся такие производные:

$$u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xxy},\ u_{xxxy},\ u_{yy},\ u_{xyy}.$$



Отметим их красным на плоскости, где точка (n,m) отвечает $\partial_x^n\partial_y^m(u)$. Сместим координатный квадрант в одну из точек этого набора, так чтобы других красных точек в него не попадало. В этом примере есть два варианта выбора такой точки, показан один из них. Все что остаётся за пределами квадранта — это и есть динамические переменные (черные точки). Все производные, отмеченные белым, через них выражаются.

В дальнейшем, пусть $\mathcal{F}$ обозначает множество гладких функций от независимых переменных и *произвольного, но конечного* числа динамических переменных (иногда для краткости будем использовать обозначения типа $f[u]$). Такие функции подчиняются определённым правилам дифференцирования, которые следуют из правила вычисления производных от сложной функции и исключения производных в силу уравнения.

Эволюционные уравнения

В наиболее важном для нас случае эволюционных уравнений

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^n(u))$$

естественный выбор динамических переменных — все производные по x

$$u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_{xxx},\ \dots$$

Здесь u может быть и вектором, то есть, определение применимо и к системам. Сюда относятся и уравнения типа

$$u_{tt} = f(x, t, u, u_x, \dots, \partial_x^n(u), u_t, u_{xt}, \dots, \partial_x^n(u_t))$$

(например, уравнение Буссинеска), что можно записать как систему

$$u_t = v, \quad v_t = f(x, t, u, u_x, \dots, \partial_x^n(u), v, v_x, \dots, \partial_x^n(v)).$$

Далее, для простоты, рассмотрим скалярные уравнения (одно поле), хотя все легко обобщается на системы. Удобно принять обозначения

$$u_j = \partial_x^j(u), \quad \partial_j = \partial/\partial u_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Операторы полных производных

Определение. Оператор полной производной по x — это формальное векторное поле

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots + u_{j+1}\partial_j + \dots$$

Хотя векторное поле D_x бесконечномерно, его действие на функции из $\mathcal{F}$ корректно определено. Очевидно, это действие есть просто вычисление производной от сложной функции:

$$D_x(a(x, u_0, \dots, u_k)) = \partial_x(a) + u_1\partial_0(a) + \dots + u_{k+1}\partial_k(a).$$

Отметим, что оператор D_x не связан с выбором эволюционного уравнения, для всех уравнений он один и тот же.
От уравнения зависит лишь правило дифференцирования по t.

Пусть дано уравнение

$$u_t = f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n). \tag{8}$$

Определение. Эволюционной производной в силу (8), или оператором полной производной по t, называется формальное векторное поле

$$\nabla_f = D_t = \partial_t + f\partial_0 + D_x(f)\partial_1 + \cdots + D_x^j(f)\partial_j + \ldots$$

Опять, действие D_t на $\mathcal{F}$ корректно определено. Здесь мы сначала продолжаем уравнение на все динамические переменные, используя уже введенный оператор D_x:

$$u_{1,t} = D_x(u_t) = D_x(f), \quad u_{2,t} = D_x(u_{1,t}) = D_x^2(f), \quad \ldots,$$

а потом распространяем правило дифференцирования на функции. По построению, имеем

$$[D_x, D_t] = 0.$$

Также, несложно показать, что коммутатор двух эволюционных дифференцирований имеет такой же вид, а именно,

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f,g]}, \quad \text{где} \quad [f, g] := \nabla_f(g) - \nabla_g(f).$$

Следовательно, эволюционные векторные поля образуют алгебру Ли.

Симметрии

Это определение по существу не меняется. Уравнения $u_t = f[u]$ и $u_T = g[u]$ называются симметриями друг для друга, если коммутируют соответствующие эволюционные векторные поля:

$$[\nabla_f, \nabla_g] = 0,$$

что фактически сводится к условию $[f, g] = 0$ для функций.

Отметим, что из тождества Якоби

$$[[\nabla_f, \nabla_g], \nabla_h] + [[\nabla_g, \nabla_h], \nabla_f] + [[\nabla_h, \nabla_f], \nabla_g] = 0,$$

следует, что если ∇_g и ∇_h коммутируют с ∇_f, то это же верно и для $[\nabla_g, \nabla_h]$. Следовательно, симметрии фиксированного уравнения образуют алгебру Ли.

Оператор линеаризации

Отметим, что результат применения оператора ∇_f к функции $g \in \mathcal{F}$ можно записать и наоборот, как результат применения некоторого оператора к f:

$$\nabla_f(g) =: g_*(f).$$

Это просто определение g_*. Пока нам этот оператор не нужен, но в дальнейшем пригодится. Выпишем его более явно:

$$\begin{aligned}\nabla_f(g(x, u_0, \dots, u_k) &= f\partial_0(g) + D_x(f)\partial_1(g) + \dots + D_x^k(f)\partial_k(g)\\ &= \Big(\partial_0(g) + \partial_1(g)D_x(f) + \dots + \partial_k(g)D_x^k\Big)(f)\\ &= g_*(f) = \frac{d}{d\varepsilon} g[u + \varepsilon f]\Big|_{\varepsilon=0}.\end{aligned}$$

Определение. Оператором линеаризации, или производной Фреше, называется дифференциальный оператор

$$g_* = \partial_0(g) + \partial_1(g)D_x(f) + \dots + \partial_k(g)D_x^k.$$

Законы сохранения

По аналогии с ОДУ, можно было бы принять определение первых интегралов, как таких функций $I[u]$, что $D_t(I) = 0$. Но, легко видеть, что для эволюционных уравнений таких функций не бывает, так как если u_k — старшая переменная, от которой зависит I, то в $D_t(I) = \nabla_f(I)$ имеется член $\partial_k(I)D^k(f)$, в который входит переменная u_{n+k} (n — порядок f) и она ни с чем не сокращается. Поэтому приходится рассматривать немного более сложное понятие.

Определение. Законом сохранения называется пара функций $\rho, \sigma \in \mathcal{F}$ такая, что

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma).$$

Функция ρ называется плотностью, σ — током.

По произвольной функции $r \in \mathcal{F}$ можно построить закон сохранения с $\rho = D_x(r)$ и $\sigma = D_t(r)$, но это неинтересно и такие законы сохранения считаются тривиальными. Плотности, отличающиеся на полную производную от x называются эквивалентными:

$$\rho \sim \tilde{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \rho - \tilde{\rho} \in \operatorname{Im} D_x.$$

Функционалы

Это отношение эквивалентности приводит к фактор-пространству $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} / \operatorname{Im} D_x$. Фактически, его элементы, то есть, классы эквивалентности по модулю $\operatorname{Im} D_x$, можно отождествить с функционалами:

$$\rho[u] + \operatorname{Im} D_x \quad \longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho[u]\, dx,$$

поскольку интеграл от $D_x(r)$ равен разности граничных членов, которыми можно пренебречь.

Если ρ — плотность закона сохранения, и граничные условия обеспечивают сокращение (например, благодаря быстроубыванию), то такой функционал сохраняется:

$$\partial_t \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_t(\rho)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_x(\sigma)\, dx = \sigma\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Это аналог первого интеграла для ОДУ, но, отличие в том, что это не функция от динамических переменных, а функционал, то есть нелокальный объект.

Здесь возникает несколько важных вопросов, на которые мы ответим в следующих лекциях.

- Как определить, тривиальна плотность или нет? То есть, как охарактеризовать $\operatorname{Im} D_x$?
- К чему сводится поиск законов сохранения для заданного уравнения?
- Можно ли определить гамильтонову структуру для функционалов?

Пока только отметим, что, вообще говоря, эволюционное уравнение не обязано иметь нетривиальные законы сохранения, или их может быть конечное число. В отличие от ОДУ, где число первых интегралов равно порядку системы -1, здесь связи с порядком уравнения нет.

Некоторые уравнения обладают бесконечным набором законов сохранения. Это считается достаточным (но не необходимым) признаком интегрируемости.

Примеры

Пример 1. Линейное уравнение

$$u_t = u_{xxx} = u_3$$

имеет плотность u, а также бесконечно много плотностей вида u_n^2, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно,

$$D_t(u) = D_x(u_2),$$
$$D_t(u_n^2) = 2u_n u_{n+3} = 2D_x(u_n u_{n+2}) - u_{n+1}u_{n+2} = D_x(2u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2).$$

Легко понять, что эти плотности нетривиальны, то есть, не существует такой $r \in \mathcal{F}$, что $D_x(r) = u_n^2$. Действительно, любая полная производная $D_x(r)$ *линейна* по старшей переменной.

Эти же плотности годятся и для других уравнений вида

$$u_t = u_{2k+1}$$

(естественно, токи будут другими).

Пример 2. Однако, уравнения

$$u_t = u_{xx} \quad \text{или} \quad u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

имеют только одну плотность u. Вообще, можно показать, что для скалярных уравнений четного порядка порядок плотностей не превосходит порядка уравнения.

Пример 3. Уравнение КдФ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$:

$$\begin{aligned}
&D_t(u) = D_x(u_2 + 3u^2),\\
&D_t(u^2) = D_x(2uu_2 - u_1^2 + 4u^3),\\
&D_t(u_1^2 - 2u^3) = D_x(2u_1u_3 - u_2^2 - 6u^2u_2 + 12uu_1^2 - 9u^4),\\
&D_t(u_2^2 - 10uu_1^2 + 5u^4) = D_x(2u_2u_4 - u_3^2 - 20uu_1u_3 + 16uu_2^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 10u_1^2u_2 + 20u^3u_2 - 90u^2u_1^2 + 24u^5),\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

На следующей лекции разработаем метод, позволяющий доказать, что у этого уравнения бесконечно много законов сохранения.

Гиперболические уравнения

- Для уравнений вида

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad \text{или} \quad u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

в качестве динамических переменных годятся

$$u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_{xxx}, \dots, u_y,\ u_{xy},\ u_{xxy},\ u_{xxxy} \dots,$$

то есть, все производные, не выше первого порядка по y. Понятно, что вместо него можно выбрать и другой набор, с заменой $x \leftrightarrow y$. Формально, это такие же переменные, как для эволюционной системы типа Буссинеска.

- Для гиперболического уравнения в координатах светового конуса

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{9}$$

в качестве динамических переменных удобно принять

$$u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_{xxx}, \dots,\ u_y,\ u_{yy},\ u_{yyy},\ \dots .$$

Все смешанные производные можно заменить в силу уравнения, например

$$u_{xxy} = \partial_x(f) + \partial_u(f)u_x + \partial_{u_x}(f)u_{xx} + \partial_{u_y}(f)f.$$

Операторы полных производных

Для (9) все немного хитрее. Оба оператора полных производных D_x и D_y зависят от уравнения, и, более того, их приходится определять друг через друга. Пусть

$$u = u_{00}, \quad u_{j,0} = \partial_x^j(u), \quad u_{0,j} = \partial_y^j(u), \quad j = 1, 2, \ldots$$

— динамический набор и пусть $\partial_{ij} = \partial/\partial u_{ij}$.

Определение. Операторы полных производных для (9) имеют вид

$$D_x = \partial_x + \sum_{j=0}^{\infty} u_{j+1,0}\partial_{j,0} + \sum_{j=1}^{\infty} D_y^{j-1}(f)\partial_{0,j},$$

$$D_y = \partial_y + \sum_{j=1}^{\infty} D_x^{j-1}(f)\partial_{j,0} + \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j+1}\partial_{0,j}.$$

На «свои» производные эти операторы действуют просто сдвигом индекса, а для «чужих» применяется исключение смешанных производных при помощи второго оператора. Зацикливания не происходит, так как исключаются младшие, уже определенные смешанные производные.

Первые интегралы

В целом, основные определения для гиперболических уравнений остаются такими же. Под симметрией понимается эволюционное дифференцирование, коммутирующее с D_x и D_y, закон сохранения — соотношение вида $D_x(\rho) + D_y(\sigma) = 0$.

Но, по сравнению с эволюционными уравнениями есть одна особенность: могут быть первые интегралы в обычном смысле. Правда, они еще более редки, чем законы сохранения, и их наличие обычно означает, что уравнение линеаризуемо и, более того, для его решения можно написать явную формулу.

Определение. Функция $I[u]$ называется первым интегралом по направлению x, если $D_x(I) = 0$. Аналогично определяются первые интегралы по направлению y.

- Очевидный пример: волновое уравнение

$$u_{xy} = 0,$$

что можно записать в виде

$$D_x(u_y) = 0 \quad \text{или} \quad D_y(u_x) = 0.$$

Ясно, что это сразу позволяет проинтегрировать: $u(x, y) = a(x) + b(y)$.

- Для уравнения Лиувилля

$$u_{xy} = e^u$$

имеем

$$D_x(2u_{yy} - u_y^2) = 0, \quad D_y(2u_{xx} - u_x^2) = 0.$$

Действительно,

$$D_x(2u_{yy} - u_y^2) = 2u_{xyy} - 2u_y u_{xy} = 2D_y(e^u) - 2u_y e^u = 0,$$

и аналогично для y-интеграла. Позже мы разберем этот пример подробно и выведем формулу для общего решения.

Домашнее задание

Задача 3. Найдите первые интегралы для системы ОДУ

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_1(-u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n),\\
u_2' &= u_2(\ \ u_1 - u_2 + u_3 + \cdots + u_n),\\
u_3' &= u_3(\ \ u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
u_n' &= u_n(\ \ u_1 + u_2 + u_3 + \cdots - u_n).
\end{aligned}$$

Покажите, что ее интегрирование сводится к одной квадратуре и ответ записывается через гиперэллиптическую функцию.

[*Подсказка:* обозначьте сумму отдельной буквой и воспользуйтесь свойствами уравнения Риккати.]

Замечание. Этот пример восходит к Ковалевской. Он довольно искусственный, но чуть более сложные системы с похожей «коллективной» структурой взаимодействия (и сходной схемой решения) встречаются в приложениях, см. напр.

S. Watanabe, S.H. Strogatz. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D* **74** (1994) 197–253.

Задача 4. Решите методом характеристик 2D уравнение Хопфа

$$u_t = p(u)u_x + q(u)u_y,$$

где $p(u)$ и $q(u)$ любые функции.

Задача 5. Покажите, что первые три закона сохранения для КдФ (см. пример 3) обобщаются для уравнения вида

$$u_t = u_{xxx} + f(u)u_x$$

с произвольной гладкой функцией $f(u)$. Точнее, найдите функции $g(u)$ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{F}$ такие, что выполняются равенства

$$\begin{aligned}
D_t(u) &= D_x(\sigma_1),\\
D_t(u^2) &= D_x(\sigma_2),\\
D_t(u_1^2 + g(u)) &= D_x(\sigma_3).
\end{aligned}$$

[*Подсказка:* при вычислении σ_j приходится использовать первообразные от $f(u)$, поэтому удобно обозначить $f(u) = F''(u)$.]

Замечание. Можно показать, что уже на следующей плотности возникают ограничения на f. Она и последующие плотности существуют, только если f многочлен не выше второй степени (КдФ или мКдФ).