

В.Э. Адлер · Классические интегрируемые системы

Лекция 1 · 7 февраля 2022

Введение

Исторический обзор

- (1834) Дж.С. Рассел. Solitary wave of translation (гидродинамика)
- (1855) Лиувиль. Уравнение $u_{xy} = e^u$ (ДУ)
- (1862) Боур. Уравнение синус-Гордона $u_{xy} = \sin u$ (геометрия)
- (1872) Буссинеск. Уравнение $u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0$ (гидродинамика)
- (1882) Дарбу. Преобразование Дарбу для линейных уравнений (ДУ)
- (1883) Бэклунд. Преобразование Бэклунда для сГ (геометрия)
- (1888) Ковалевская. Третий случай интегрируемости вращающегося твердого тела с закрепленной точкой (ДУ)
- (1892) Бьянки. Свойство перестановочности ПБ (геометрия)
- (1893) Лаплас. 2D цепочка Тоды $u_{n,xy} = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}}$ (ДУ)
- (1895) Кортевег, де Фриз. Уравнение $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ (гидродинамика)
- (1905) Пенлеве, Гамбье и др.. Классификация уравнений без критических подвижных точек (ДУ)

- (1928) Бёрчнэл, Чонди. Теория коммутирующих дифф. операторов (ДУ)
- (1940) Шрёдингер. Метод факторизации (квантовая механика)
- (1948) Бюргерс, Хопф, Коул. Уравнение $u_t = u_{xx} + 2uu_x$
(гидродинамика)
- (1949) Баргманн. Безотражательные потенциалы (квантовая механика)
- (1951) Гельфанд, Левитан, Марченко. Обратная задача рассеяния
(квантовая механика)
- (1955) Ферми, Паста, Улам, Тсингоу. Явление возвращаемости в
нелинейных моделях (теория эргодичности)
- (1965) Забуски, Краскал. Концепция солитона
- (1967) Гарднер, Грин, Краскал, Миура. Решение КдФ методом обратной
задачи рассеяния
- (1967) Тода. Цепочка $u_n'' = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}}$
- (1968) Лакс. Представление КдФ на языке дифф. операторов

(1970) Кадомцев, Петвиашвили, Дрюма. Уравнение

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \pm 3D_x^{-1}(u_{yy})$$

(1971) Захаров, Шабат, Абловиц, Кауп, Ньюэлл, Сигур. Решение НУШ

$$iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2u \text{ и родственных уравнений}$$

(1973) Гуревич, Питаевский. Задачи о распаде решений с нестандартными гран. условиями

(1974) Манаков, Кац, ван Мёрбеке. Цепочка Вольтерры

$$u'_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

(1974) Новиков, Дубровин. Конечнотонные (квазипериодические) решения

(1979) Фаддеев, Складнин, Тахтаджян. Квантовый метод обратной задачи

... и так далее. Больше уравнений, решений, методов и приложений

Примерный план лекций

- 1 Введение. Солитон КдФ. Разностная схема Забуски–Краскала. Многосолитонные решения численно.
- 2 Некоторые определения. Векторные поля, дифференциальные и разностные операторы, первые интегралы, законы сохранения, вариационная производная, скобки Пуассона, классические и обобщенные симметрии.
- 3 Представление Лакса для КдФ. Стационарное уравнение Шрёдингера и КдФ как его деформация. Преобразование Миуры, мКдФ. Бесконечная серия законов сохранения.
- 4 Линеаризуемые уравнения. Уравнения Бюргерса и Лиувилля, цепочки Вольтерры и Тоды с открытыми концами. Представления решений через определители.
- 5 Другие примеры. Представления нулевой кривизны. НУШ, синус-Гордон, цепочки Тоды и Вольтерры, разностные уравнения.
- 6 Потенциалы Баргманна. Обрыв ряда для функции Бейкера–Ахиезера. Вывод многосолитонного решения КдФ, вронскианная формула. Фазовый сдвиг.

- 7 Метод обратной задачи рассеяния для КдФ. Прямая задача. Спектральные свойства уравнения Шрёдингера с быстроубывающим потенциалом. Данные рассеяния, их эволюция.
- 8 Обратная задача рассеяния для КдФ. Ее сведение к системе сингулярных интегральных уравнений.
- 9 Обобщённые симметрии, оператор рекурсии, иерархия КдФ. Локальность и коммутативность потоков.
- 10 Конечнозонные решения КдФ. Выражение 1-зонного решения через функции Якоби. Уравнения Дубровина.
- 11 Преобразования Бэклунда, одевающая цепочка. Принцип суперпозиции ПБ. Второй способ вывода многосолитонного решения КдФ.
- 12 Метод факторизации в квантовой механике. Некоторые примеры одномерных операторов Шрёдингера с точным спектром.
- 13 Автомодельные решения и уравнения Пенлеве

Организационные вопросы

- как зовут лектора: Всеволод Эдуардович Адлер, место работы — ИТФ
- куда отправлять решения задач: adler@itp.ac.ru
- дедлайн: 2 недели
- дополнительные материалы (конспекты, видео):
<http://matphys.itp.ac.ru/lectures/lectures.html>
- чем все это кончится: дифференцированный зачет в районе 20 мая

Основные учебники

- В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
- М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

Солитон КдФ

Уравнение КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

описывает отклонение u поверхности воды от нулевого уровня в одномерном канале постоянной глубины h . Предполагается, что $u \ll h$, а длины волн $L \gg h$. Вывод из уравнений гидродинамики можно посмотреть в [Ньюэлл]. Все коэффициенты в (1) обезразмерены, число 6 введено для удобства (можно расставить любые коэффициенты, растягивая u , x или t).

Полезно помнить, что член uu_x описывает нелинейное взаимодействие волн. В уравнении Хопфа $u_t = uu_x$ он приводит к опрокидыванию. В уравнении Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$ опрокидывание подавляется членом u_{xx} , отвечающим диссипации волн (затухание). А в (1) добавляется u_{xxx} , отвечающий дисперсии (расползание).

Солитон КдФ определяется, как быстроубывающее решение в виде бегущей волны:

$$u(x, t) = y(x - ct), \quad y, y', y'', \dots \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Найдем его.

Подстановка в (1) дает ОДУ на $y = y(z)$:

$$-cy' = y''' + 6yy'.$$

Интегрируем, получаем

$$y'' + 3y^2 + cy + c_1 = 0.$$

Умножаем на $2y'$ и интегрируем еще раз:

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 + 2c_1y + c_2 = 0.$$

В принципе, это уравнение вида $y' = F(y)$, интегрирующееся в квадратурах:

$$z = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{-2y^3 - cy^2 - 2c_1y - c_2}}.$$

При произвольных постоянных это так называемый эллиптический интеграл, в элементарных функциях не берется. Кроме того, эту формулу нужно обращать, чтобы выразить y как функцию от z . Это приводит к эллиптическим функциям (Якоби или Вейерштрасса). Мы к этому вернемся, когда будем изучать периодические решения КдФ.

А пока заметим, что мы забыли про условие быстроубывания. Оно тут же фиксирует константы $c_1 = c_2 = 0$ и получаем более простое уравнение

$$(y')^2 + 2y^3 + cy^2 = 0.$$

В этом случае выписанный выше интеграл берется в элементарных функциях (интегрируемый случай дифференциального бинома, подстановки Эйлера). Проще всего сделать такие манипуляции:

$$y = 2v^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = -4v^{-3}v' \quad \Rightarrow \quad 16v^{-6}(v')^2 + 16v^{-6} + 4cv^{-4} = 0 \quad \Rightarrow \\ 4(v')^2 + cv^2 = -4.$$

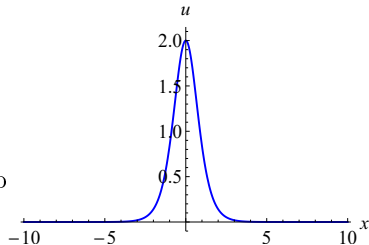
Отсюда видим, что должно быть $c < 0$. Положим $c = -4k^2$, тогда имеем

$$k^2v^2 - (v')^2 = 1.$$

Очевидно, этому уравнению удовлетворяют гиперболические функции $v = k^{-1} \cosh(kz + \delta)$. Собирая все вместе, получаем пресловутый солитон:

$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(kx + 4k^3t + \delta)}. \quad (2)$$

Это решение было известно еще Расселлу (хотя он не знал уравнения КдФ). Все что мы пока видим, из формулы (2), это что скорость солитона с параметром k равна $4k^2$ и совпадает с удвоенной амплитудой. То есть, чем выше солитон, тем быстрее он бежит.



Интересные решения в виде бегущей волны есть у многих уравнений (хотя они не всегда бывают быстроубывающими, например, кинки выходят на разные постоянные при $x \rightarrow \pm\infty$).

Более продвинутое свойство, указывающее на интегрируемость, заключается в существовании у КдФ многосолитонных решений. Их вывод будет одной из наших целей на последующих лекциях.

А пока обратимся к численному счету, который позволит посмотреть, как эти решения устроены.

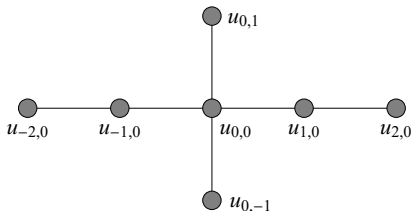
Разностная схема Забуски–Краскала

Рассмотрим дискретизацию уравнения КдФ (1) предложенную в работе

[ZK] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.* **15:6** (1965) 240–243.

(В этой статье и был введён термин *солитон*, как сокращение от *solitary wave pulse* — импульс в виде уединённой волны, или от *solitary wave of translation* — уединённая волна переноса.)

Эта дискретизация имеет вид разностного уравнения на функцию $u_{n,m}$ с таким шаблоном (для краткости, n и m в индексах пропущены):



А именно,

$$\begin{aligned} u_{0,1} - u_{0,-1} = & a(u_{2,0} - 2u_{1,0} + 2u_{-1,0} - u_{-2,0}) \\ & + 2ah^2(u_{1,0} + u_{0,0} + u_{-1,0})(u_{1,0} - u_{-1,0}). \end{aligned} \quad (3)$$

Утверждение 1

Уравнение (3) аппроксимирует КдФ с шагом h по x и ah^3 по t :

$$u_{n,m} \sim u(x, t), \quad x = nh, \quad t = amh^3.$$

Доказательство. Подставляем в (3) разложения в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} u_{n+j,m} & \sim u(x + jh, t) = u + jhu_x + \frac{1}{2}j^2h^2u_{xx} + \frac{1}{6}j^3h^3u_{xxx} + O(h^4), \\ u_{n,m+j} & \sim u(x, t + ajh^3) = u + ajh^3u_t + O(h^6). \end{aligned}$$

Члены с h^0 , h^1 , h^2 сокращаются, а при h^3 получается равенство

$$2ah^3(u_t - u_{xxx} - 6uu_x) + O(h^5) = 0.$$



Возьмём в качестве начального условия $u(x, 0)$ сумму трех солитонов вида (2) с разными k и δ (нужны два слоя решётки при $t = 0$ и $t = ah^3$).

Выберем δ так, чтобы солитоны были далеко друг от друга, тогда это начальное условие мало отличается от точного 3-солитонного решения и дальше оно эволюционирует почти как 3-солитонное решение. Но, в моменты столкновения это уже вовсе не сумма трех солитонов!

Ещё одно упрощение — периодическая сетка: $u_{n+N,m} = u_{n,m}$, где $N = (x_{\max} - x_{\min})/h$. Этот распространённый трюк позволяет избежать граничных эффектов. Правда, настоящие солитоны не периодические, но на большом интервале отличия почти нет.

$k = 0.7, 0.85$ и 1 ; параметры сетки: $h = 0.1, a = 0.1$

Параметр h должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить хорошее приближение начального профиля по x . Параметр a отвечает за устойчивость разностной схемы и также не может быть большим, иначе решение пойдёт вразнос. Это зависит от крутизны начальных условий, так что параметр приходится подбирать опытным путём.

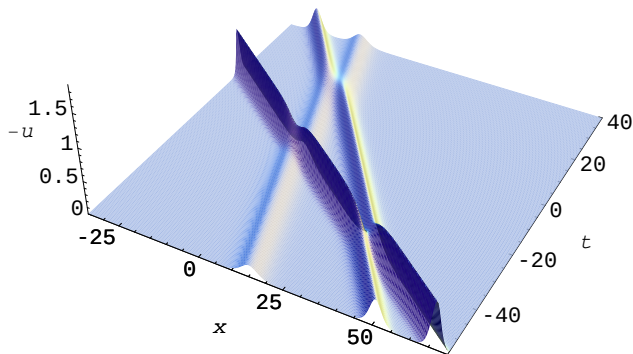


График 3-солитонного решения, как функции от x и t

Воспроизведем решение из [ZK]. Там рассматривался распад синусоидальной волны на 8 отдельных пиков. Поскольку решение периодическое, они не могут разойтись и вынуждены вечно проходить друг через друга. Тем не менее, индивидуальность пиков неплохо прослеживается и Забуски и Крaskалу этого было достаточно, чтобы говорить о солитонах.

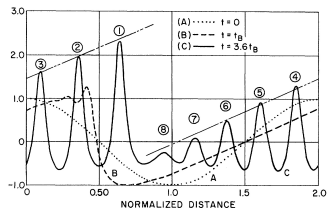
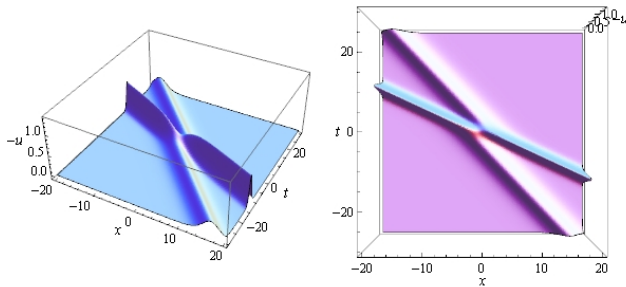


FIG. 1. The temporal development of the wave form $u(x)$.

Начальное условие $u = \cos 0.15x$; $N = 400$, $a = 0.005$. Справа — график из [ZK], на нем ось x перевёрнута и масштабирована. Он примерно отвечает моменту $t = 3.6$ на анимации слева.

Как устроено многосолитонное решение КдФ

- При $t \rightarrow -\infty$ это сумма изолированных солитонов, расположенных слева направо по возрастанию. Амплитуды у всех разные.
- Все они бегут налево, причем чем больше амплитуда, тем больше скорость.
- При конечных t происходят столкновения. При этом, в отличие от линейных волн, амплитуды не складываются. Наоборот, солитоны слегка расползаются и как бы приседают. В любой момент времени максимум решения не превосходит амплитуды наибольшего солитона.
- Площадь под графиком (масса) сохраняется в любой момент времени. Есть и другие сохраняющиеся величины.
- После столкновения солитоны полностью восстанавливают форму, размер и скорость (упругое столкновение).
- Однако, они немного смещаются (фазовый сдвиг). Более быстрый солитон проскакивает вперед, медленный — притормаживает. Величина сдвига есть функция от амплитуд двух сталкивающихся солитонов.



- При $t \rightarrow +\infty$ опять имеем сумму изолированных солитонов, расположенных слева направо по убыванию.
- Итоговый фазовый сдвиг для каждого солитона равен сумме фазовых сдвигов при попарных столкновениях. Он не зависит от порядка столкновений. Даже если в какой-то момент несколько солитонов попадают в одну точку, сдвиги будут такими же, как если бы они сталкивались по очереди.
- Решение задачи Коши с общими быстроубывающими начальными данными представляет собой многосолитонное решение с мелкой рябью на его фоне.

Эти свойства характерны для многих интегрируемых уравнений, но могут быть усложнения. Например, в системах с большим числом полей солитоны могут характеризоваться не двумя параметрами k, δ , а большим числом, и при столкновениях эти параметры могут как-то преобразовываться. Может даже происходить распад и слияние солитонов.

В некоторых уравнениях запас решений разнообразней — кинки (разные пределы при $x \rightarrow \pm\infty$), солитоны огибающей (то есть, солитоны в виде осциллирующих волновых пакетов), бризеры (пульсирующие солитоны) и еще более экзотические решения.

Интегрируемые уравнения допускают точные решения, составленные из произвольного числа таких элементарных решений.

В неинтегрируемых этого нет (хотя бывают уравнения, у которых есть 2-солитонные решения).

Домашнее задание

Задача 1. Как уже было сказано, и скорость, и амплитуда солитона (2) определяются параметром k . А чему равна характерная ширина этого солитона? Вычислите площадь под графиком (= масса солитона) и найдите ширину, заменив солитон равновеликим равнобедренным треугольником с такой же высотой.

Задача 2. (Четыре в одной) Найдите бегущие волны в виде солитонов или кинков для модифицированного уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2u_x \quad (\text{mKdV}^\pm)$$

и уравнения Буссинеска

$$u_{tt} \pm (u_{xx} + 3u^2)_{xx} = 0. \quad (\text{Bs}^\pm)$$

В этих уравнениях, как и в КдФ, коэффициенты можно растягивать, но если работать только с вещественными переменными, то знак поменять невозможно. Это приводит к тому, что решения устроены по разному (хотя многие формально-алгебраические свойства уравнений от знака не зависят). Нужно аккуратно разбирать каждый случай по отдельности.