Лекция 1 . Введение

1 февраля 2021 г. 17:33

Адлер, Всеволод Эдуардович
adler@itp.ac.ru

http://matphys.itp.ac.ru/lectures/lectures.html

Уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

гидродинамика

разностные модели
- ФПУ
- Забуски и Краскала
- цепочка Вольтерра

квантовая механика
ур Шредингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$$

представление Лакса
- метод обратной задачи рассеяния
- преобразование Миуры, Бэклунда
- законы сохранения
- высшие симметрии
- семейства точных решений (многосолитонные, рациональные, конечнозонные, типа Пенлеве)

\+ другие уравнения

представление нулевой кривизны

1 февраля 2021 г. 17:50

$$\begin{cases} \psi_{xx} = (u-\lambda)\psi \\ \psi_t = u_x\psi - (4\lambda + 2u)\psi_x \end{cases}$$

$$\psi_{xt} = \psi_{tx} = u_{xx}\psi + u_x\psi_x - 2u_x\psi_x - (4\lambda+2u)(u-\lambda)\psi$$

$$= (u_{xx} - (4\lambda+2u)(u-\lambda))\psi - u_x\psi_x$$

$$\psi_{xxt} = u_t\psi + (u-\lambda)(u_x\psi \cancel{-(4\lambda+2u)\psi_x})$$

$$= \psi_{xtx}$$

$$= (u_{xxx} - 2u_x(u-\lambda) - (4\lambda+2u)u_x)\psi$$

$$+ (\cancel{u_{xx}} - (4\cancel{\lambda+2u})(u-\lambda))\psi_x$$

$$- \cancel{u_{xx}}\psi_x - u_x(u-\lambda)\psi$$

$$u_t + 4(u-\cancel{\lambda})u_x + (4\cancel{\lambda}+2u)u_x = u_{xxx}$$

$$\boxed{u_t = u_{xxx} - 6uu_x}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Psi_x = U\Psi \\ \Psi_t = V\Psi \end{cases} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda - 2u \\ u_{xx} - (4\lambda+2u)(u-\lambda) & -u_x \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{xt} = U_t\Psi + UV\Psi$$

$$= V_x\Psi + VU\Psi$$

Утверждение 1. Уравнение КдФ эквивалентно уравнению

$$(1) \qquad U_t = V_x + [V, U]$$

с указанными матрицами.

Определение 2. Уравнение вида (1) называется представлением нулевой кривизны.

Решение в виде бегущей волны

1 февраля 2021 г. 18:10

$$u(x,t) = y(x - ct) = y(X), \quad c = \mathrm{const} \qquad {}' = \frac{d}{dX}$$

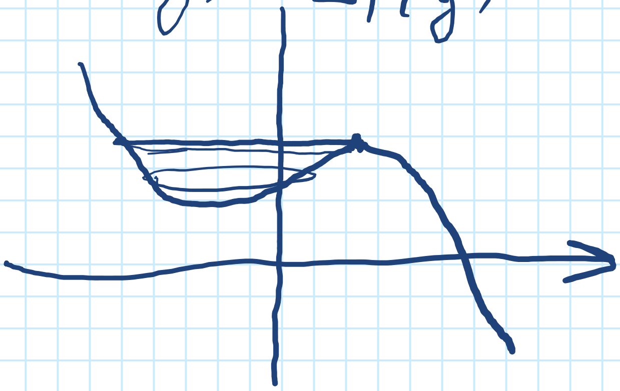
$$u_x = y' \qquad u_t = -cy'$$

$$-cy' = y''' - 6yy' \iff$$

$$y'' = 3y^2 - cy + C_1 \quad \xRightarrow{*2y'}$$

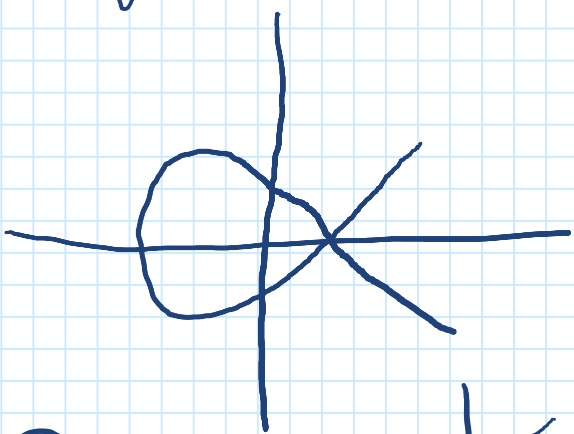
$$(y')^2 = 2y^3 - cy^2 + 2C_1 y + C_2 = P(y)$$

$-P(y)$

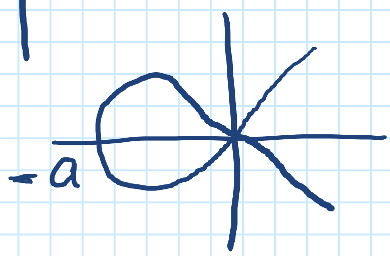


$u \to 0,\ x \to \infty$
$u_x \to 0,$
$u_{xx} \to 0$
...

$$\int \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} = X + \delta$$



$$y'^2 = 2y^3 - cy^2$$



$$y = -\frac{a^2}{v^2}, \quad a > 0$$

$$y' = 2\frac{a^2 v'}{v^3}$$

$$\frac{4a^4 v'^2}{v^6} = -\frac{a^4}{v^4}\left(\frac{2a^2}{v^2} + c\right)$$

$$4v'^2 = -2a^2 - cv^2$$

$$\cancel{8}v'v'' = -cvv'$$

$$v'' = -\frac{c}{4}v \qquad y = -\frac{a^2}{v^2}$$

$$v = \alpha\cosh\beta(X+\delta)$$

$$v' = \alpha\beta\sinh\beta X \qquad \beta^2 = -\frac{c}{4}$$

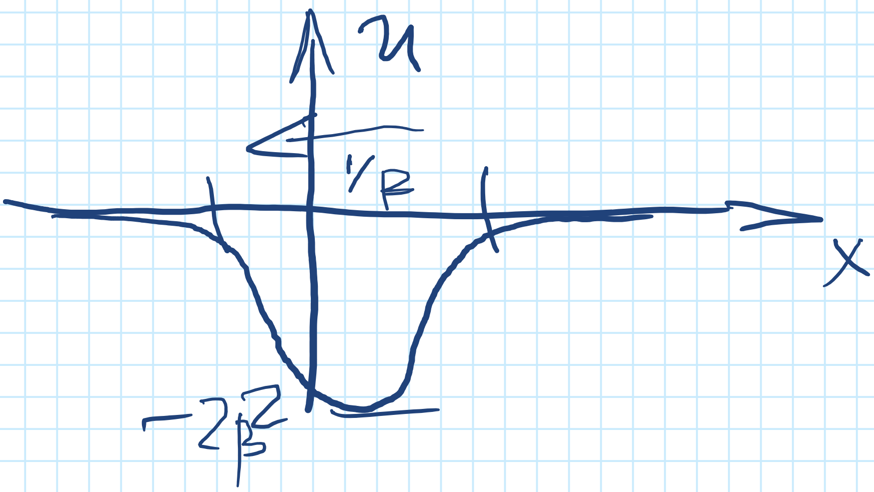
$$4\alpha^2\beta^2\sinh^2 = -2a^2 + 4\beta^2\alpha^2\cosh^2$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \qquad a^2 = +2\beta^2\alpha^2$$

$$y = -\frac{2\beta^2}{\cosh^2\beta(X+\delta)}$$

$$u = y(x-ct)$$

$$= -\frac{2\beta^2}{\cosh^2(\beta x + 4\beta^3 t + \delta)}$$



Литература

[1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.

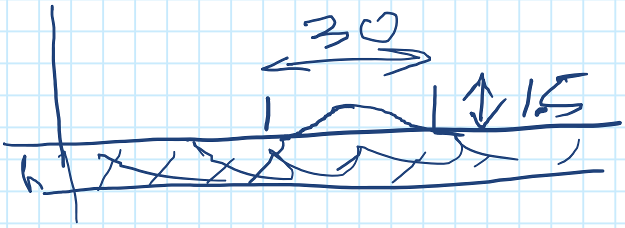
[2] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

[3] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.

[4] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

[5] Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

1895 Korteweg & de Vries



ρ, g, h, σ

1834 J S Russel

solitary wave of translation

1965 → soliton

1955 → FPU

Законы сохранения

8 февраля 2021 г. 17:34

- определени ЗС, сравнение с ОДУ
- алгоритм интегрировния по частям
- вариационная производная

* * *

- преобразование Миуры (<=> представление Лакса)
- его обращение и вывод рекуррентной формулы для ЗС КдФ

Опрделение превых интегралов для ОДУ

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ \dots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n) \end{cases} \qquad \frac{dI}{dt} = 0 \quad I(t, u_1, \dots, u_n)$$

$$dI/dt = \partial I/\partial t + f_1 \partial I/\partial u_1 + \dots + f_n \partial I/\partial u_n$$

$$u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \qquad I(t, u, u', \dots u^{(n-1)})$$

$$dI/dt = \partial I/\partial t + u'\partial I/\partial u + u'' \partial I/\partial u' \dots + f \partial I/\partial u^{(n-1)}$$

Оператор полной производной по t

$$u'' = -\mathring{P}(u) \qquad I = \frac{1}{2}u'^2 + P(u)$$

Бывают ли ПИ для УЧП? - да, иногда бывают. Но редко.

Пример. Уравнение Лиувилля (гиперболическое ур.)

$$u_{xy} = e^u \qquad u_{xxy} = e^u u_x = u_{xy} u_x$$

$$I = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 \qquad D_y(I) = 0 \quad - y\text{-интеграл}$$

$$J = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2 \qquad D_x(J) = 0 \quad - x\text{-интеграл}$$

Эволюционные уравнения $u(x,t)$

$$u_t = f(x, u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}) \qquad (1)$$

$$\partial_x^n(u) = u_n.$$

D3-1. У уравнения вида (1), при $n>0$, не бывает ПИ.

$$\nexists \; D_t(I)=0 \quad I(x, u, u_1, \ldots, u_k)$$

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_u + u_2\partial_{u_1} + u_3\partial_{u_2} + \ldots + u_{k+1}\partial_{u_k} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt} = D_t = \nabla_f = \partial_t + f\partial_u + D_x(f)\partial_{u_1} + D_x^2(f)\partial_{u_2} + \ldots + D^k(f)\partial_{u_k} + \ldots$$

Операторы полных производных по x и по t.

эволюционное дифференцирование — D_t

Бывают "интегральные" ПИ – функционалы.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6uu_x \\ u, u_x, u_{xx}, \ldots \to 0, \quad x \to \pm\infty \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(u_{xxx} - 6uu_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} D_x(u_{xx} - 3u^2)\,dx$$

$$= (u_{xx} - 3u^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

$2u\,*$: $$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} 2u(u_{xxx} - 6uu_x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} D_x(2uu_{xx} - u_x^2 - 4u^3)\,dx$$

$$(\ldots)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 + \alpha u^3)\,dx$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \Big[\underbrace{2u_x(u_{xxxx} - 6uu_{xx} - 6u_x^2) + 3\alpha u^2(u_{xxx} - 6uu_x)}_{A}\Big]\,dx$$

$$A = D_x(2u_x u_{xxx}) - 2u_{xx}u_{xxx}$$
$$+ D_x(3\alpha u^2 u_{xx}) - 6(\alpha+2)u\,\underline{u_x u_{xx}} - 12u_x^3$$
$$\left(- D_x\left(\frac{9\alpha}{2}u^4\right)\right)$$
$$= D_x\Big(2u_x u_{xxx} + 3\alpha u^2 u_{xx} - \frac{9\alpha}{2}u^4 - u_{xx}^2 - 3(\alpha+2)u u_x^2\Big) + 3(\alpha+2)u_x^3 - 12u_x^3$$

$$\alpha = 2$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 + 2u^3)\,dx \quad \text{— сохр.}$$

Опр. Закон сохранения для эв. ур. вида (1) – это соотношение вида

$$D_t(\overset{\text{плотность З.С}}{\rho}) = D_x(\underset{\text{ток}}{\sigma}) \qquad (2)$$

$\rho, \sigma \in \mathcal{F}$ — ф.ф. от динамических пер. $t, x, u, u_1, \ldots$

$$I = \int_{\mathbb{R}} \rho\,dx \qquad \frac{dI}{dt} = \int D_x(\sigma)\,dx = \sigma\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

ЗС называется тривиальным, если $\rho = D_x(a)$.

$\rho_1 \sim \rho_2 \qquad \rho_1 - \rho_2 \in \operatorname{Im} D_x.$

Пространство функционалов – это фактор-пространство

$$\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} / \mathrm{Im}\, D_x \qquad \mathrm{Im}\, D_x = D_x(\mathcal{F})$$

$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u, \dots u_k)\, dx, \ f \in \mathcal{F} \right\}$$

$$f \in \mathcal{F} \qquad f \overset{?}{=} D_x(a), \quad a = ?$$

Алгоритм интегрирования по частям

$$f = f(x, u, u_1, \dots, u_n) \qquad \mathrm{ord}\, f = n$$

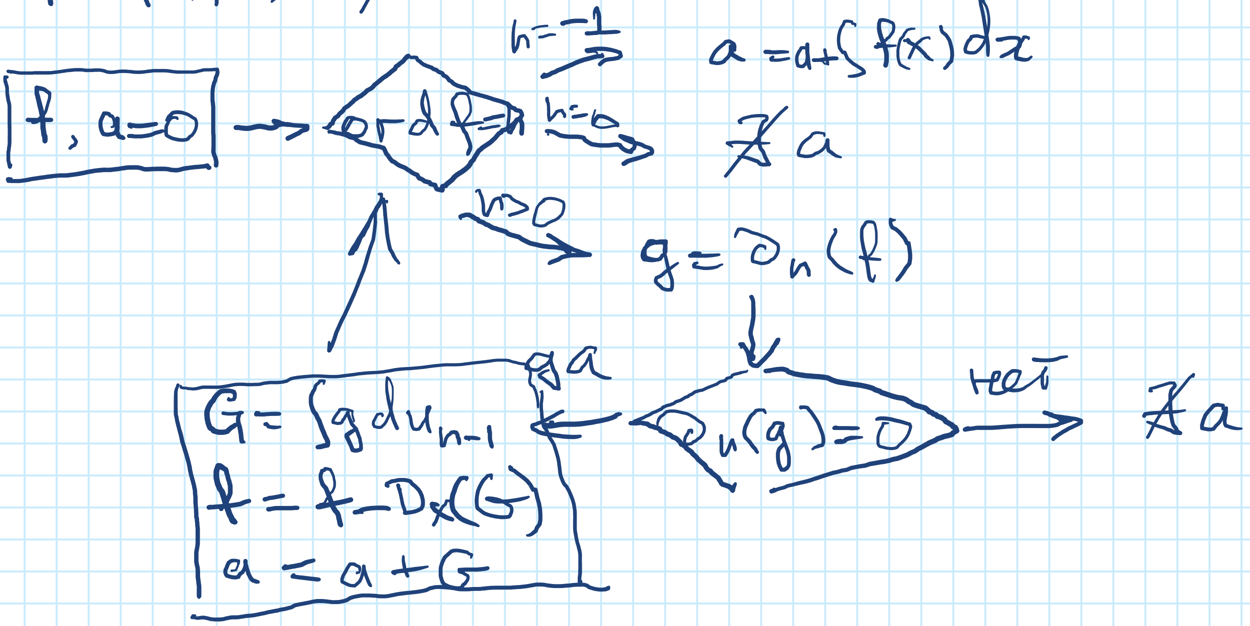
$$\mathrm{ord}\, f(x) = -1$$

$$D_x(a) = \partial_x(a) + u_1 \partial_0(a) + \dots + \underline{u_n \partial_{n-1}(a)}$$

линейность по старшей пр.

$$f = f(x) \qquad a = \int f(x)\, dx$$

$$f = f(x, u) \qquad \nexists\, a$$



$$u_t = u_{xxx} + G''(u)\, u_x$$

ДЗ-2. Обобщить для этого уравнения найденные выше зс.

D3-3. Даны выражения A,B. Для каких коэффициентов они являются полными производными?

$$A = a_0 u u_{2n} + a_1 u_1 u_{2n-1} + \ldots + a_n u_n^2$$

$$B = b_0 u u_{2n+1} + b_1 u_1 u_{2n} + \ldots + b_n u_n u_{n+1}$$

Когда $A \in \operatorname{Im} D_x$, $B \in \operatorname{Im} D_x$?

Лекция 3. Преобразование Миуры

15 февраля 2021 г. 17:31

- вывод из представления Лакса
- преобразование Бэклунда
- построение ЗС на основе обращения ПМ

* * *

$$\begin{cases} \psi_{xx} = (u-\lambda)\psi \\ \psi_t = u_x\psi - (4\lambda+2u)\psi_x \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \text{КдФ} \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

$$f = \psi_x/\psi$$

$$\psi_x = f\psi \qquad \psi_{xx} = (f_x+f^2)\psi = (u-\lambda)\psi$$

$$u = f_x + f^2 + \lambda \quad \text{— ПМ.}$$

$$\psi_t = (u_x - (4\lambda+2u)f)\psi =$$

$$= (f_{xx} + \cancel{2ff_x} - 4\lambda f - 2(\cancel{f_x} + f^2 + \lambda)f)\psi$$

$$= (f_{xx} - 6\lambda f - 2f^3)\psi$$

$$\psi_x = f\psi, \quad \psi_t = F\psi$$

$$(\log\psi)_{xt} = f_t = F_x$$

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x \qquad \text{мКдФ}$$

Утверждение. ПМ переводит любое решение мКдФ в решение КдФ

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x \xrightarrow{u = f_x + f^2 + \lambda} u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

Дифференциальные подстановки

D3-3.1 Проверьте прямым вычислением

1) $u_t = u_{xx} \xrightarrow{v = u_x/u} v_t = v_{xx} + 2 v v_x$

ур. теплопроводности — ур. Бюргерса

2) $u_{xy} = 0 \xrightarrow{v = \log\left(\frac{2 u_x u_y}{u^2}\right)} v_{xy} = e^{v}$

волновое ур. — ур. Лиувилля

3) $u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{4 u_x} \xrightarrow{v = \sqrt{u_x}} v_t = v_{xxx}$

Преобразование Бэклунда

15 февраля 2021 г. 17:55

$$f \longleftrightarrow -f$$

$$\begin{tikzcd}
 & f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\lambda) f_x \arrow[dl, "u = f_x + f^2 + \lambda"'] \arrow[dr, "\tilde{u} = -f_x + f^2 + \lambda"] & \\
u_t = u_{xxx} - 6 u u_x \arrow[rr, "\text{ПБ}"] & & \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx} - 6 \tilde{u} \tilde{u}_x
\end{tikzcd}$$

Пример: Пусть $u = 0$

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = -\lambda \varphi \\ \varphi_t = -4\lambda \varphi_x \end{cases}$$

Пусть $\lambda = -k^2$ $\quad \varphi = c_1 e^{kx + 4k^3 t} + c_2 e^{-kx - 4k^3 t}$

$f = \varphi_x / \varphi$ $\quad = M \cosh(\underbrace{kx + 4k^3 t + \delta}_{X})$

$f = k \tanh X$

$$\tilde{u} = u - 2 f_x = -2 f_x = -\frac{2k^2}{\cosh^2 X}.$$

"Одевание" dressing

D3-3.2. Проанализировать, что за решения получатся при $\cosh \longrightarrow \sinh$

или $\lambda = k^2$

схематический график

Обращение ПМ

15 февраля 2021 г. 18:10

Используем для построения ЗС.

$$\mathcal{S}[u] \quad D_x(D) = D_x(\sigma)$$

$$\mathcal{S}[f_x + f^2 + \lambda]$$

$$f_x = u - f^2 - \lambda \qquad z^2 = -4\lambda$$

$$= u - f^2 + \frac{z^2}{4}$$

$$f(z) = -\frac{z}{2} + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots$$

$$F_{0,x} + \frac{F_{1,x}}{z} + \frac{F_{2,x}}{z^2} + \dots = u - \left(-\frac{z}{2} + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots\right)^2 + z^2/4$$

z^2: $0 = 0$

z^1: $0 = F_0$

z^0: $0 = u + F_1$ $\qquad F_1 = -u$

z^{-1}: $F_{1,x} = F_2$ $\qquad F_2 = -u_x$

z^{-2}: $F_{2,x} = F_3 - F_1^2$ $\qquad F_3 = -u_{xx} + u^2$

z^{-3}: $F_{3x} = F_4 - F_1F_2 - F_2F_1$ $\qquad F_4 = -u_{xxx} + 4uu_x$

z^{-4}: $F_{4x} = F_5 - F_1F_3 - F_2^2 - F_3F_1$ $\qquad F_5 = -u_{xxxx} + (u_x^2 + 2u^3)$

$\dots$

$$F_{nx} = F_{n+1} - F_1F_{n-1} - F_2F_{n-2} - \dots - F_{n-1}F_1$$

Все коэф. рекуррентно находятся

$$f_t = D_x\left(f_{xx} - 2f^3 + \frac{3z^2}{2}f\right)$$

Некоторые коэф. тривиальны. А вдруг остальные тривиальны или друг другу эквивалентны.

Утверждение. Все $F_{2n} \overset{\mathrm{Im} D_x}{\sim} 0$, но $F_{2n-1} \not\sim 0$

$F_{2n-1} \not\sim F_{2k-1}$.

◀ Заметим, что $f(-z) =: \tilde{f}$

$$\begin{cases} \tilde{f}_x = u - \tilde{f}^2 + \frac{z^2}{4} \\ f_x = u - f^2 + \frac{z^2}{4} \end{cases}$$

$$f_x - \tilde{f}_x = (\tilde{f} - f)(\tilde{f} + f) \Rightarrow$$

$$\tilde{f} + f = \frac{2F_{2}}{z^2} + \frac{2F_4}{z^4} + \ldots = -D_x(\log(f - \tilde{f}))$$

$2n-1$ Проследим за членами u^k.

$$g = \ldots + \mu u^k \Rightarrow g \notin \mathrm{Im} D_x$$

$$\hat{F}_{n+1} = \hat{F}_1 \hat{F}_{n-1} + \hat{F}_2 \hat{F}_{n-1} \ldots + \hat{F}_{n-1} \hat{F}_1$$

н.у.: $\hat{F}_1 = -u \quad \hat{F}_2 = 0 \Rightarrow \hat{F}_{2n} = 0$

$$\hat{F}_{2n-1} = c_n(-u)^n \quad c_n > 0$$

числа Каталана

Нелинейное уравнение Шредингера

15 февраля 2021 г. 18:43

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u^2 v \\ v_t = -v_{xx} - 2uv^2 \end{cases}$$

$$i\psi_t = \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2\psi$$

$$\psi = u \qquad \psi^* = v$$

$$t \to it$$

D3-3.3. Проверить, что НУШ <=> $U_t = V_x + [V, U]$,

где $U = \begin{pmatrix} \lambda & -v \\ u & -\lambda \end{pmatrix}$ $\quad V = -2\lambda U + \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix}$

Определение ЗС не меняется $\quad D_t(\rho) = D_x(\sigma)$

$x, t, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, \ldots$

D3-3.4 Дана система

$$u_t = f[u, v] \quad , \quad v_t = g[u, v]$$

$D_x = ? \qquad D_t = ?$

D3-3.5 Проверьте, что НУШ имеет такие плотности (т.е. нужно подобрать сигмы)

$$\rho_2 = uv$$

$$\rho_3 = uv_x$$

$$\rho_4 = uv_{xx} + u^2v^2$$

Веса

$$\partial_x \sim 1 \quad \partial_t \sim 2, \quad u \sim 1 + \mu, \quad v \sim 1 - \mu$$

D3-3.6 Найти ρ_5

- перечислить все мономы веса 5
- вычеркнуть эквиалентные по модулю ImD

- расставить неопределенные коэф.
- продифференцировать по t в силу системы НУШ
- выделить полную производную по x
- приравнять 0 остаток и опредилить коэф.

Лекция 4. Потенциалы Баргманна

22 февраля 2021 г. 17:32

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi, \quad \psi_t = u_x\psi - 2(u+2\lambda)\psi_x \qquad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

В прошлый раз строили ряд для законов сохранения, а сейчас попробуем для самой пси-функции.

Сегодня $u(x,t)$ $\quad \partial_x = D_x, \quad \partial_t = D_t$

Лемма. Для любых двух решений (1) $\psi, \tilde\psi$ их вронскиан $w = \psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi$ – постоянная. $w_x = 0, \quad w_t = 0$

$\blacktriangle$ $w_x = \psi\tilde\psi_{xx} - \psi_{xx}\tilde\psi = 0.$

$$(\psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi)_t \qquad \psi_t = \underbrace{u_x}_{a_x}\psi - \underbrace{2(u+2\lambda)}_{2a}\psi_x$$

$$\psi_{xt} = a_{xx}\psi + a_x\psi_x - 2a_x\psi_x - 2a(u-\lambda)\psi$$
$$= (a_{xx} - 2a(u-\lambda))\psi - a_x\psi_x$$

$$(\psi\tilde\psi_x)_t = (\cancel{a_x\psi} - 2a\psi_x)\tilde\psi_x$$
$$+ \psi\left[(a_{xx} - 2a(u-\lambda))\tilde\psi - \cancel{a_x\tilde\psi_x}\right]$$
$$= -2a\psi_x\tilde\psi_x + (\ldots)\psi\tilde\psi \quad - \text{ симм. } \psi \Leftrightarrow \tilde\psi$$

$w_t = 0$ $\blacktriangleright$

Будем строить решение в виде ряда по z. $\quad z^2 = -\lambda$

$$\psi(z) = e^{zx+4z^3t}\left(1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} + \ldots\right) = e^X\varphi$$

$$\tilde\psi = \psi(-z) = e^{-X}\left(1 - \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} \ldots\right)$$

Такой ряд, удовлетворяющий (1), называется формальной функцией Бейкера–Ахиезера.

Сначала покажем, что он корректно определен. Имеется в виду не сходимость, а то, что при вычислении коэффициентов нет противоречий.

Система по x

$$\psi = e^X \varphi \qquad X = zx + 4z^3 t$$

$$\psi_{xx} = e^X\left(\cancel{z^2\varphi} + 2z\varphi_x + \varphi_{xx}\right) = e^X\left(u + \cancel{z^2}\right)\varphi$$

$$\varphi_{xx} + 2z\varphi_x = u\varphi \qquad (2)$$

$$\frac{\varphi_{1,xx}}{z} + \frac{\varphi_{2,xx}}{z^2} + \dots$$

$$+ 2z\left(\frac{\varphi_{1,x}}{z} + \frac{\varphi_{2,x}}{z^2} + \dots\right) =$$

$$= u\,\overbrace{\left(1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} + \dots\right)}^{\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{ll} z^0: & u = 2\varphi_{1,x} \\ z^{-1}: & \varphi_{1,xx} + 2\varphi_{2,x} = u\varphi_1 \\ \dots & \\ z^{-j}: & \varphi_{j,xx} + 2\varphi_{j+1,x} = u\varphi_j \\ \dots & \end{array}\right\} \qquad (2')$$

$$\psi_t = u_x\psi - 2(u - 2z^2)\psi_x \qquad = e^X\varphi$$

$$4z^3\varphi + \varphi_t = u_x\varphi - 2(u - 2z^2)(z\varphi + \varphi_x)$$

$$\varphi_t = -2(u - 2z^2)\varphi_x + (u_x - 2zu)\varphi \qquad (3)$$

$$\downarrow$$

Д3 4-1. Перепишите уравнение (3) в виде аналогичной системы (3') (немного более громоздкой). (3')

Замечательное свойство этой системы – ее можно оборвать.

Получаем систему ОДУ порядка $2n$

$$\begin{cases} \varphi_{1,xx} + 2\varphi_{2,x} = u\varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{j,xx} + 2\varphi_{j+1,x} = u\varphi_j \\ \dots \\ \varphi_{n,xx} = u\varphi_n \end{cases} \qquad u = 2\varphi_{1x}$$

$$\begin{cases} \varphi_{1,xx} = -2\varphi_{2x} + 2\varphi_{1x}\varphi_1 \\ \varphi_{j,xx} = -2\varphi_{j+1x} + 2\varphi_{1x}\varphi_j \\ \dots \\ \varphi_{n,xx} = \qquad\qquad + 2\varphi_{1x}\varphi_n \end{cases} \qquad (3'')$$

Определение. Функция u называется потенциалом Баргманна, если уравнение Шредингера допускает решение в виде $\psi = e^{\chi}(z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n)$.

При этом требуется, чтобы u была вещественная, регулярная и быстроубывающая. Но, вначале мы не будем за этим следить.

$2n$ произв. пост. ~ 1949

Мы найдем совместное решение (2') и (3') (при некотором дополнительном условии невырожденности).

Оно должно содержать $2n$ произвольных констант интегрирования.

$$W = \psi\tilde\psi_x - \psi_x\tilde\psi = \mathrm{const} \qquad \tilde\varphi = \varphi(-z)$$

$$\psi = e^{x}\varphi \qquad \tilde\psi = e^{-x}\tilde\varphi$$

$$W = 2z(z^{2n} + w_1 z^{2n-2} + \ldots + w_n)$$

$$= 2z(z^2 - k_1^2)\ldots(z^2 - k_n^2)$$

$$\left.\frac{\psi(z)}{\psi(-z)}\right|_{z=k_j} = c_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Утверждение c_j постоянные (по x и по t)

$$c_{j,x} = \left.\frac{\psi_x\tilde\psi - \psi\tilde\psi_x}{\tilde\psi^2}\right|_{z=k_j} = \frac{W(k_j)}{\tilde\psi^2(k_j)} = 0$$

$$c_{j,t} = \left.\frac{\psi_t\tilde\psi - \psi\tilde\psi_t}{\tilde\psi^2}\right|_{z=k_j} = \frac{(\ldots)\,W(k_j)}{\ldots} = 0$$

$$\psi_t = u_x\psi - 2(u_x + 2\lambda)\psi_x$$

$$\psi\tilde\psi_t - \psi_t\tilde\psi = -2(u_{\cancel{x}} + 2\lambda)(\psi\tilde\psi_x - \psi_{\cancel{t}}\tilde\psi)$$

ДЗ 4-2. Из курса ОДУ известно, что макс. число ПИ = порядок -1. Чем объяснить, что у нас их число = порядку?

Оговорка. Будем предполагать (это те самые условия невырожденности), что

1) $k_i^2 \neq k_j^2$ 2) $k_j \neq 0$ 3) $c_j \neq 0$

Если 1,2 не выполнены, то система все равно решается, но более сложно.

В частности, если все $k=0$, то потенциал u – рациональная функция.

Пример. $n=1$. $\quad \varphi = e^{X}(z+\varphi_1) \quad X = zx + 4z^3 t$

k_1, c_1

$$\varphi(k_1) = c_1 \varphi(-k_1)$$

$$e^{\overbrace{k_1 x + 4k_1^3 t}^{X_1}}(k_1+\varphi_1) = c_1 e^{-k_1 x - 4k_1^3 t}(-k_1+\varphi_1)$$

$$\varphi_1 \left(e^{X_1} - c_1 e^{-X_1}\right) = -k_1\left(e^{X_1} + c_1 e^{-X_1}\right)$$

$c_1 > 0 \quad c_1 = e^{-2\delta_1} \qquad \varphi_1 \sinh(X_1+\delta_1) = -k_1 \cosh(X_1+\delta_1)$

$c_1 < 0 \quad c_1 = -e^{-2\delta_1} \qquad \varphi_1 \cosh(X_1+\delta_1) = -k_1 \sinh.$

$$\varphi_1 = -k_1 \tanh(X_1+\delta_1)$$

$$u = 2\varphi_{1,x} = \frac{2k_1^2}{\cosh^2(X_1+\delta_1)}$$

Пример 2. $n=2$ $\quad \varphi = e^{X}(z^2 + \varphi_1 z + \varphi_2)$

$$X_j = k_j x + 4k_j^3 t$$

$$\begin{cases} e^{X_1}(k_1^2 + \varphi_1 k_1 + \varphi_2) = c_1 e^{-X_1}(k_1^2 - \varphi_1 k_1 + \varphi_2) \\ e^{X_2}(k_2^2 + \varphi_1 k_2 + \varphi_2) = c_2 e^{-X_2}(k_2^2 - \varphi_1 k_2 + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^{X_1} - c_1 e^{-X_1} & k_1(e^{X_1} + c_1 e^{-X_1}) \\ e^{X_2} - c_2 e^{-X_2} & k_2(e^{X_2} + c_2 e^{-X_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1^2(e^{X_1} - c_1 e^{-X_1}) \\ k_2^2(e^{X_2} - c_2 e^{-X_2}) \end{bmatrix}$$

$$y_j = e^{X_j} - c_j e^{-X_j}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_{1,x} \\ y_2 & y_{2,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_{1,xx} \\ y_{2,xx} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = W(y_1, y_2) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_{1x} \\ y_2 & y_{2x} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1 & y_{1xx} \\ y_2 & y_{2xx} \end{vmatrix} = -\frac{\Delta_x}{\Delta} = -(\log \Delta)_x$$

$$u = -2(\log \Delta)_{xx}.$$

(n) $\quad ' = \partial_x$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$W(y_1, \dots, y_n)$ $\qquad \varphi_1 = -(\log W)_x$

$$u = -2(\log W)_{xx}$$

Теорема. Потенциалы Баргманна имеют вид

$$u = -2(\log W(y_1, \dots, y_n))_{xx}$$

$$y_j = e^{X_j} - c_j e^{-X_j} \qquad X_j = k_j x + 4k_j^3 t$$

при произв. пост. $c_1 \dots c_n, k_1 \dots k_n$

Чтобы выполнялось условие веществености, регулярности и быстроубывания, нужны некоторые дополнительные ограничения на параметры.

Без доказательства:

1) $k_j, c_j \in \mathbb{R}$

2) пусть $k_1^2 > k_2^2 > \ldots > k_n^2 > 0$

Тогда д.б. чтобы $c_n > 0$, $c_{n-1} < 0$, ...

$$c_1 \begin{cases} < 0 & n = 2m \\ > 0 & n = 2m-1 \end{cases}$$

$$u = -2\partial_x^2 \log W(\cosh \chi_n, \sinh \chi_{n-1}, \ldots)$$

D3-4.3. Проверьте при $n=1,2$ (или даже докажите в общем случае), что

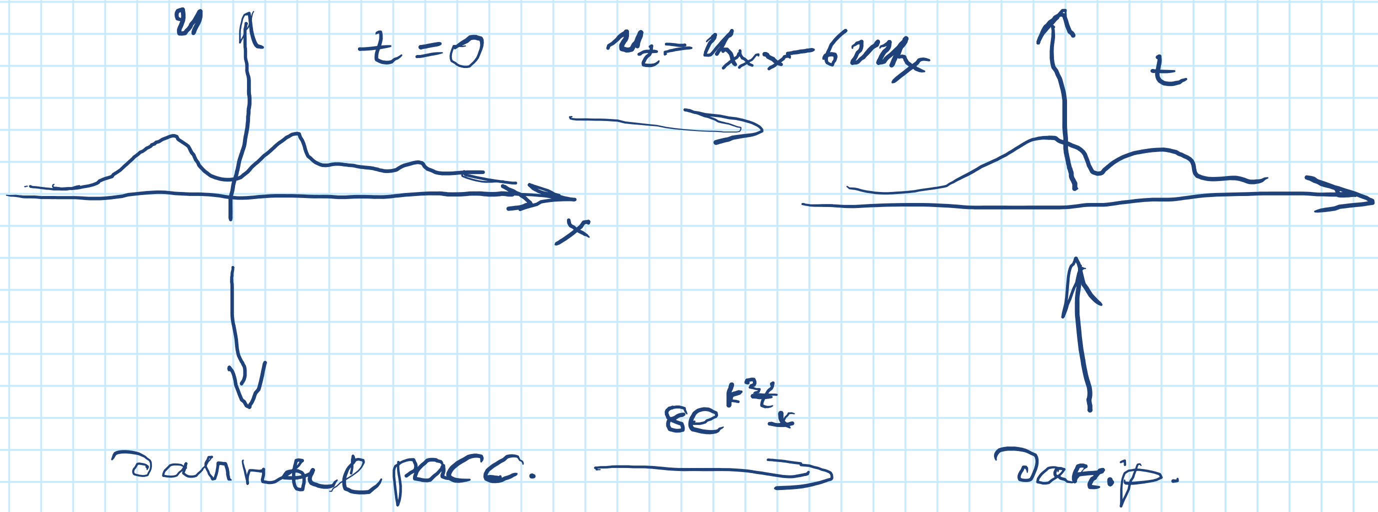
$$\psi(z) = \frac{W(y_1, \ldots, y_n, e^{zx+4z^3t})}{W(y_1 \ldots y_n)}$$

Таким образом, потенциал Баргманна - это квантово-механическая задача, допускающая точное решение.
И, по совместительству, дающая точное (хотя и частное) решение КдФ!

Лекция 5. Метод обратной задачи рассеяния

1 марта 2021 г. 17:32

Это метод решения задачи Коши для КдФ в классе быстроубывающих потенциалов. Дано начальное условие, нужно выяснить, как оно меняется по t.



План

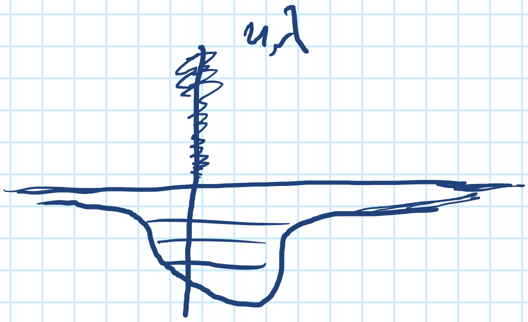
1. Спектральные свойства оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом
2. Сведение уравнения Шредингера к интегральному
3. Функции Йоста
4. Матрица перехода
5. Свойства матрицы перехода
6. Дискретный спектр
7. Зависимость данных рассеяния от t

[1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.

1. Спектральные свойства оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi \qquad \int_{\mathbb{R}} |u|(1+|x|)dx < \infty$$

Спектр вещественный.



Дискретный спектр конечен и <0.

Непрерывный спектр >0.

2. Сведение уравнения Шредингера к интегральному

$$\psi_{xx} + k^2\psi = u\psi = f$$

Функция Грина для диф. оператора

$$k^2 = \lambda$$

$$z^2 = -\lambda$$

$$A\psi = f \qquad \psi = \psi_ч + \psi_{одн}.$$

$$AG(x,y) = \delta(x-y) \qquad \psi_ч = \int_{\mathbb{R}} G(x,y) f(y)\, dy$$

$$A\psi_ч = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) f(y)\, dy = f(x)$$

$$A = D^2 + \underbrace{k^2}_{\lambda}$$

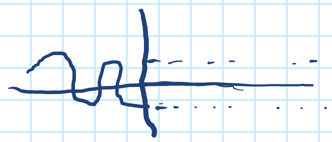
$$G(x,y) = G(x-y) \qquad AG(x) = \delta(x)$$

У+В.

$$G_+(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin kx}{k} & x<0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$G_-(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{\sin kx}{k} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$G_{+,x} = \begin{cases} -\cos kx & \ldots \\ 0 & \ldots \end{cases}$$



$$= \theta(x) + \begin{cases} -\cos kx & \ldots \\ -1 & \ldots \end{cases}$$

$$G_{+,xx} = \delta(x) + \begin{cases} k\sin kx \\ 0 \end{cases} = \delta(x) - k^2 G$$

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{\mathbb{R}} G_+(x-y)\,u(y)\,\psi(y)\,dy \qquad (*)$$

$$\int_{-\infty}^{x}$$

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

$$\psi_0 = 0 \qquad \psi_1 = g(x) \quad \ldots \qquad |K(x,y)| < M$$

ДЗ 5-1 (выполнять, только если это не проходили в других курсах) Проверьте дифференцированием, что решение этого ИУ удовлетворяет уравнению Шредингера. (Или выведите методом вариации произвольных постоянных).

3. Функции Йоста

$$\psi(x,k) = \begin{array}{c|c} \varphi_1 & \psi_1 \\ e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} & e^{-ikx} - \int_{x}^{\infty} \\ \hline e^{+ikx} + \int_{-\infty}^{x} & e^{+ikx} - \int_{x}^{\infty} \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{array} \frac{\sin k(x-y)}{k}\,u(y)\,\psi(y,k)\,dy$$

$$\psi = e^{-ikx} p$$

$$p(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} e^{+ikx}\,\frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik}\,u(y)\,e^{-iky}\,p(y,k)\,dy$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^{x} -\frac{1 - e^{2ik(x-y)}}{2ik}\,u\,p\,dy$$

0

$$k = \xi + i\eta$$

Утв. Существуют решения с асимптотиками

$\varphi_1 = e^{ikx} + o(1)$

$\varphi_1 \sim e^{-ikx}$ $\quad \operatorname{Im} k \geq 0 \qquad\qquad \tilde\varphi_1 \sim e^{-ikx}$

$\varphi_2 \sim e^{ikx} \qquad\qquad\qquad \tilde\varphi_2 \sim e^{ikx}$

$-\infty \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\infty \quad z$

и аналитические в своих полуплоскостях.
Более того, асимптоику можно дифференцировать

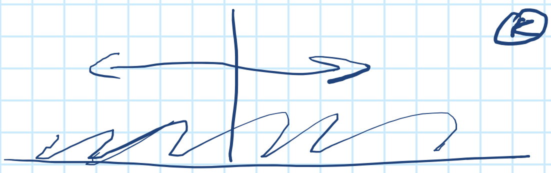
$$\varphi_{1,x} = -ik e^{-ikx}, \ \dots$$

$$\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,-k) \qquad \tilde\varphi_1 \dots$$

$$\overline{\varphi_1(x,k)} = \varphi_2(x,\bar k) \qquad \tilde\varphi_1 \dots$$

$$\overline{\varphi_i(x,k)} = \varphi_i(x,-\bar k)$$

k



Пример 1. Вернемся к потенциалу Баргманна из прошлой лекции. (Внимание – обозначения немного изменились).

$$\varphi = e^{ikx}\left((ik)^n + p_1(x)(ik)^{n-1} \dots + p_n(x)\right)$$

Это реш. опр. при всех $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 = -k^2$$

ДЗ 5-2. Постройте функции Йоста для потенциала с дельта-функцией (при $\alpha < 0$, $\alpha > 0$).

$$\psi_{xx} = (\alpha\delta(x) - k^2)\psi.$$

$$\psi(-0) = \psi(+0)$$

$x \neq 0$ $\quad \psi_{xx} = -k^2\psi$

$$\psi'_x(+0) - \psi_x(-0) = \alpha\psi(0)$$

4. Матрица перехода

При вещественных k определены все 4 функции. Это функции непрерывного спектра.

Обе пары функций Йоста образуют базисы. Можно определить матрицу перехода

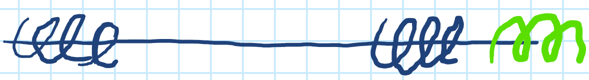
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \varphi_1(k) = \overline{\varphi_2(k)} = \varphi_2(-k)$$

$\psi_1, \ldots$

$$\underset{e^{-ikx}}{\varphi_1(k)} = a(k)\underset{e^{-ikx}}{\psi_1(k)} + b(k)\underset{e^{ikx}}{\overline{\psi_1(k)}} \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\varphi_1(k)} = \bar{b}(k)\psi_1 + \bar{a}\,\bar{\psi}_1$$

$$\underbrace{\frac{1}{a(k)}}_{t(k)}\varphi_1(k) = \psi_1 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{r(k)}\bar{\psi}_1$$



амплитуда рассеяния $a(k)$

коэфф. прохождения $t(k)=1/a(k)$

коэфф. отражения $r(k)=b(k)/a(k)$

Замечание. Матрица перехода обобщается и на случай, когда потенциал выходит на разные константы [Λ-Λ,3:25].

Пример 1'. Потенциал Баргманна – безотражательный.

при $x \to -\infty$

$$\psi \sim e^{-ikx}\left((-k)^n \ldots\right) = e^{-ikx} P(k)$$

при$_\psi$ $x \to +\infty$

$$\psi \sim e^{-ikx}\left(\ldots\right) = e^{-ikx} Q(k)$$

$$b(k) = 0 \qquad a = \frac{Q(k)}{P(k)}$$

D3-5.3. Найдите коэффициенты a(k), b(k) для примера с дельта-функцией.

5. Свойства матрицы перехода

1) $\overline{a(k)} = a(-k) \qquad \overline{b(k)} = b(-k), \quad k \in \mathbb{R}$

2) $\det T = 1 \Leftrightarrow |a|^2 - |b|^2 = 1 \Leftrightarrow |r|^2 + |t|^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_{1,x} \\ \varphi_2 & \varphi_{2,x} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_{1x} \\ \psi_2 & \psi_{2x} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} e^{-ikx} & -ike^{-ikx} \\ e^{ik} & ike^{ikx} \end{vmatrix} = 2ik \qquad \det T = 1.$$

Лекция 6. Метод обратной задачи рассеяния (продолжение)

15 марта 2021 г. 13:04

1) $\overline{a(k)} = a(-k)$, $\overline{b(k)} = b(-k)$, $k \in \mathbb{R}$

2) $|a|^2 - |b|^2 = 1$

3) $\varphi_1 = a\bar{\varphi}_1 + b\varphi_2$

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = a\, \underbrace{W(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)}_{=2ik} \Rightarrow \overline{a(k)} = a(-\bar{k})$$

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \bar{\varphi}_2) \rightarrow \text{продолж. в } \operatorname{Im} k \geq 0$$

$$b(k) = -\frac{1}{2ik} W(\varphi_1, \bar{\varphi}_1) \qquad k \in \mathbb{R}$$

4) $$\varphi_1 = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\varphi_1(y,k)\,dy$$

$$\bar{\varphi}_1 = e^{-ikx} - \int_{x}^{+\infty} \dots \qquad \bar{\varphi}_1$$

$$\bar{\varphi}_2 = e^{ikx} - \int \dots \qquad \bar{\varphi}_2$$

$$\cancel{a}\bar{\varphi}_1 + \cancel{b}\varphi_2 = \varphi_1 = e^{-ikx} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{x}^{\infty}}_{=I}$$

$$= e^{-ikx} + I - \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)(a\bar{\varphi}_1 + b\bar{\varphi}_2)\,dy$$

$$= e^{-ikx} + I + a(k)(\cancel{\bar{\varphi}_1} - e^{-ikx}) + \cancel{b(k)}(\bar{\varphi}_2 - e^{ikx})$$

$$I = e^{-ikx}(a(k) - 1) + b(k)e^{ikx}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik} u(y) \varphi_1(y,k)\, dy$$

$$= e^{ikx} \cdot \frac{1}{2ik} \int e^{-iky} u(y) \varphi_1 \, dy$$

$$- e^{-ikx} \frac{1}{2ik} \int e^{iky} u(y) \varphi_1 \, dy$$

$$= e^{-ikx}(a-1) + b e^{ikx}$$

$$a = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} u(y) \varphi_1(y,k)\, dy$$

$$b = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ik} u(x) \varphi_1(x,k)\, dx$$

5) $a = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \to \infty$

ДЗ 6-1. (Продолжение с прошлой лекции)
Проверьте выполнение свойств 1-5 для уравнения Шредингера с дельта-функцией.

6) Дискретный спектр

$a(k_0) \Longleftrightarrow \lambda = k_0^2$ – дискр. спектр.

$\Rightarrow$. $a(k_0) = 0 \quad \varphi_1(x,k_0) = c\, \varphi_2(x,k_0)$

$\Leftarrow$ y – с. ф. $\quad y = c\varphi_1, \quad y = \tilde{c}\varphi_2 \to$

$\varphi_1 \cong \varphi_2 \to a(k_0) = 0$

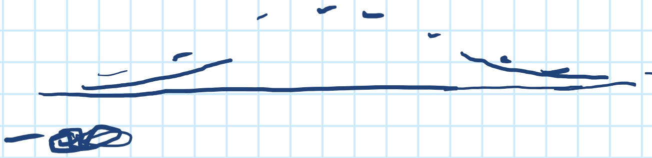
a – конечное число нулей при $\operatorname{Im} k \geq 0$

$i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_N \quad \varkappa_1 > \ldots \varkappa_N > 0$

$\varphi_1(x, i\varkappa_n) = c_n \varphi_2(x, i\varkappa_n)$

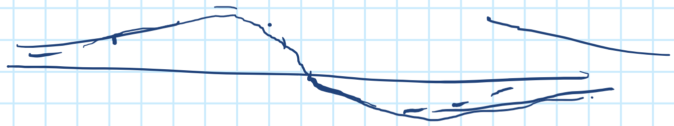
$$\overline{\varphi_1(x,k)} = \varphi_1(x,-\bar{k}) \Rightarrow \varphi_1(x,i\varkappa)\in\mathbb{R}$$
$$\varphi_2(x,i\varkappa)\in\mathbb{R}$$

$c_n \in \mathbb{R}$

$\varphi_1 \sim e^{\varkappa_1 x}$  $\varphi_2 \sim e^{-\varkappa_1 x}$

$-\infty$

$c_1 > 0$

$c_2 < 0$ $\quad e^{\varkappa_2 x}$  $e^{-\varkappa_2 x}$

$\vdots$

Пример 1 (продолжение) Для потенциала Баргманна

$$a(k) = \frac{(k-i\varkappa_1)\cdot\ldots\cdot(k-i\varkappa_N)}{(k+i\varkappa_1)\cdot\ldots\cdot(k+i\varkappa_N)}, \quad b(k)=0$$

$$|a(k)| = 1.$$

ДЗ 6-2. Для уравнения Шредингера с дельта-функцией найдите дискретный спектр (если он есть) и собственнные функции. Сравните с нулями $a(k)$.

7. $\quad u(x) \longrightarrow a(k),\ b(k),\ \varkappa_1\ldots\varkappa_N,\ c_1\ldots c_N$

$$|a|^2 - |b|^2 = 1 \qquad r = b/a.$$

Формулы Сохоцкого [см. напр. Лаврентьев-Шабат, методы ТФКП]

преобр. Гильберта

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-(k\pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-k} \pm \frac{1}{2}f(k)$$

предельные знач. $\qquad$ интеграл в см. глав. знач.

Следствие Пусть $f(k)$ – аналитична при $\operatorname{Im} k>0$

$$f(k) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{s-k}\, ds$$

Тождество Крамерса–Кронига

$$|a|^2(1 - |r|^2) = 1 \qquad |a| = (1-|r|^2)^{-1/2}$$

$$\log a = \log|a| + i \arg a$$

$$a = |a| e^{i \arg}$$

Утв. $$a(k) = \frac{1}{\sqrt{1-|r|^2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1-|r|^2)}{s-k} ds\right)$$

◁ $$f = \log\left(a(k) \prod \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n}\right) \qquad \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n} = e^{i\alpha}$$

$$\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f}{s-k} ds$$

$$i\left(\log a + \sum \log \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n}\right) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\log|a|}{s-k} ds$$

$$\arg a + \sum$$

▷

Можно показать, что $r(k)$, $\varkappa_1 \ldots \varkappa_n$, $c_1 \ldots c_n$ – незав. спектр. данные

$$\overline{r(k)} = r(-k), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$|r| < 1$$

$$r = O(1/k) \quad k \to +\infty$$

II Зависимость данных рассеяния от t

$$u(x,t):\quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x,t) \qquad \psi_i = \psi_i(x,t)$$

$$a \overset{?}{=} a(k,t) \qquad b \overset{?}{=} b(k,t) \qquad x_n \overset{?}{=} x_n(t)$$

$$c_n \overset{?}{=} c_n(t)$$

$$\begin{cases} \theta_{xx} = (u-k^2)\theta \\ \theta_t = u_x\theta - (4k^2+2u)\theta_x \end{cases} \quad \Big|\, u=0 \,\Big| \quad \begin{matrix} \theta_{xx} = -k^2\theta \\ \theta_t = -4k^2\theta_x \end{matrix}$$

$$\theta \sim e^{-ikx+4ik^3t}$$

$$W(\theta,\tilde\theta) = \theta_x\tilde\theta - \theta\tilde\theta_x \Rightarrow \text{пост. по } x \text{ и по } t$$

$$W(k_0)=0 \qquad (\theta/\tilde\theta)_{k=k_0} = \text{const}.$$

$$\theta_1 = e^{4ik^3t}\underbrace{\varphi_1}_{e^{-ikx}} \qquad \tilde\theta_1 = e^{4ik^3t}\underbrace{\psi_1}_{e^{-ikx}}$$

$$\tilde\theta_2 = e^{-4ik^3t}\underbrace{\psi_2}_{e^{ikx}}$$

Утверждение. При эволюции $u(x)$ в силу КдФ данные рассеяния меняются так

$$a(k,t) = a(k,0)$$

$$b(k,t) = e^{-8ik^3t}\, b(k,0) \quad \Big| \Rightarrow r(k,t) = e^{-8ik^3t}\, r(k,0)$$

$$x_j(t) = x_j(0)$$

$$c_j(t) = e^{-8x_j^3t}\, c_j(0) \quad \Big| \quad b = \frac{-1}{2ik}W(\varphi_1,\psi_1)$$

◄ $a = \frac{1}{2ik}W(\varphi_1,\psi_2) = \frac{1}{2ik}W(\theta_1,\tilde\theta_2) = \text{const}$ ►

III Обратная задача рассеяния

Восстановление $u(x)$ по данным рассеяния.

Это тоже сводится к интегральным уравнениям.

$$\Phi_+(x,k) = \Phi_-(x,k) + r(k)\, e^{2ikx}\, \overline{\Phi}_-(x,k)$$

$$\Phi(x,k) = \begin{cases} \Phi_+ & \mathrm{Im}\,k > 0 \\ \Phi_- & \mathrm{Im}\,k < 0 \end{cases}$$

Лекция 7. Метод обратной задачи (окончание)

22 марта 2021 г. 17:32

III Обратная задача

Восстановление $u(x)$ по данным рассеяния.

$$\varphi_1(x,k) = \underbrace{a(k)}\,\psi_1(x,k) + \underbrace{b(k)}\,\overline{\psi_1(x,k)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

задача

$$\Phi(x,k) = \begin{cases} \Phi_+ = \dfrac{e^{ikx}}{a(k)}\varphi_1(x,k), & \operatorname{Im} k > 0 \text{ мероморф.} \\ \Phi_- = e^{ikx}\psi_1(x,k) & \operatorname{Im} k < 0 \end{cases}$$

Тогда $\Phi \sim 1 + O(1/|k|)$, $|k| \to \infty$

$\Phi = \Phi_-$ – аналитична $\operatorname{Im} k < 0$

$\Phi = \Phi_+$ – мер. при $\operatorname{Im} k > 0$

с полюсами в $i\varkappa_n$, $n = 1 \ldots N$

$$\Phi_+ = \Phi_- + r(k)e^{2ikx}\overline{\Phi}_-, \quad k \in \mathbb{R}_-$$

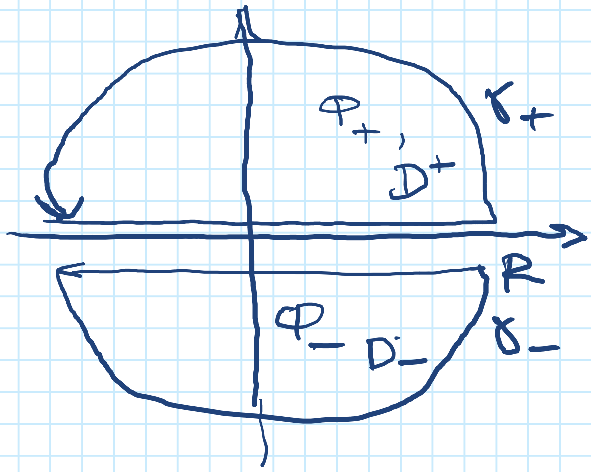
Задача типа Римана-Гильберта.

Допустим мы это сделали, тогда потенциал $u(x)$ можно восстановить так:

$$\Phi_- = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty u(y)\,dy + O(1/k)$$

(при подстановке $\psi'' = (u - k^2)\psi$, $\psi = e^{-ikx}\Phi_-$)

1) Случай $a(k)$ не имеет нулей (нет дискртеного спектра)



$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}\,ds = \begin{cases}\Phi(x,k)-1 & k\in D^+\cup D^-\\ 0, & k\notin\end{cases}$$

$$(\Phi(x,s) = 1 + O(1/|k|))$$

инт по окр. $\sim O(1/|k|)$

В пределе $R\to\infty$

$$\Phi(x,k)-1 = \int_{\mathbb{R}+i0} - \int_{\mathbb{R}-i0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Phi_+(x,s)-\Phi_-(x,s))\,ds}{s-k}$$

$$\Phi(x,k) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(s)e^{2isx}\bar{\Phi}_-(x,s)}{s-k}\,ds \qquad (*)$$

Переходим к пределу $k\to\mathbb{R}-i0$.

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2isx}r(s)\bar{\Phi}_-(x,s)}{s-k}\,ds \qquad (1)$$

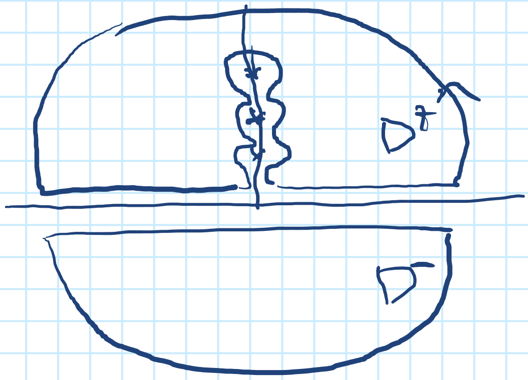
$k\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-(k\pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)}{s-k}\,ds \pm \frac{1}{2}f(k)$$

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^{\infty} u(y)\,dy$$

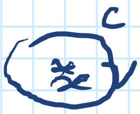
$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\pi}\partial_x\int_{\mathbb{R}} r(s)e^{2isx}\bar{\Phi}_-(x,s)\,ds.$$

2) $a(k)$ имеет нули $i\varkappa_1, \dots, i\varkappa_N$.



$$\Phi(x,k)-1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi(x,s)-1}{s-k}$$

Интегралы вокруг полюсов



$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)}{s-k}ds$$

$$= -\operatorname{res}_{s=i\varkappa} \frac{f(s)}{s-k} = \frac{\operatorname{res} f(s)}{k-i\varkappa}$$

Тогда

$$\Phi(x,k) = 1 + \sum_n \frac{\Gamma_n(x)}{k-i\varkappa_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2isx} r(s)\overline{\Phi_-(x,s)}ds}{s-k}$$

В пределе $k \to \mathbb{R} - i0$

$$\Phi_-(x,k) = 1 + \sum \frac{\Gamma_n(x)}{k-i\varkappa_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2isx} r(s)\overline{\Phi_-(x,s)}ds}{s-k} \quad (2)$$

$k \in \mathbb{R}$

Чтобы замкнуть уравнение, нужно связать Γ и Φ

$$\Gamma_n = \operatorname{res}_{i\varkappa_n} \frac{e^{ikx}\varphi_1(x,k)}{a(k)} = \frac{e^{-\varkappa_n x}\varphi_1(x,i\varkappa_n)}{a'(i\varkappa_n)}$$

$$= \left\{ \varphi_1(x,i\varkappa_n) = c_n \overline{\varphi_2}(x,i\varkappa_n) = c_n \overline{\varphi_1}(x,-i\varkappa_n) \right\}$$

$$= \frac{c_n e^{-\varkappa_n x}}{a'(i\varkappa_n)} \overline{\Phi_-}(x,-i\varkappa_n)$$

В дополнение к (2) получили систему

$$\begin{cases} \Gamma_m = \dfrac{c_m e^{-2\varkappa_m x}}{a'(i\varkappa_m)}\left(1 + i\sum_n \dfrac{\Gamma_n}{\varkappa_n+\varkappa_m} + \dfrac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{2isx}\cancel{a}(s)\overline{\Phi}_-(x,s)}{s+i\varkappa_m}\right) \\ m = 1 \ldots N \end{cases} \qquad (3)$$

(2) + (3)

Если $r=0$ (безотр. потенц.)

$\Rightarrow$ СЛАУ $\Gamma_m \to$ Баргманн

(2)+(3) – замкнутая система ур.

Можно сначала найти Г через интегралы от Ф

Подстановка в (2) дает ИУ на Ф с каким-то сложным ядром.

$$u = \frac{d}{dx}\left(-2i\sum_n \Gamma_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2isx}\, r(s)\,\overline{\Phi}_-(x,s)\,ds\right)$$

Высшие уравнения КдФ

Дифференциальная алгебра

$$\varphi_{xx} = (u-\lambda)\varphi, \qquad \varphi_t = b\varphi + 2a\varphi_x. \qquad (1)$$

Вычислим условие совместности $\varphi_{xxt} = \varphi_{txx}$

$$\varphi_{tx} = b_x\varphi + b\varphi_x + 2a_x\varphi_x + 2a(u-\lambda)\varphi$$
$$= (b_x + 2a(u-\lambda))\varphi + (b+2a_x)\varphi_x$$

$$\varphi_{txx} = (b_{xx} + 2a_x(u-\lambda) + 2au_x)\varphi$$
$$+ (2b_x + \cancel{2a(u-\lambda)} + 2a_{xx})\varphi_x$$
$$+ (\cancel{b} + 2a_x)(u-\lambda)\varphi =$$

$$\varphi_{xxt} = u_t\varphi + (u-\lambda)(\cancel{b\varphi} + \cancel{2a\varphi_x})$$

$$\begin{cases} \varphi_x: & b_x + a_{xx} = 0 \\ \varphi: & u_t = -\cancel{b_{xx}} + 4a_x(u-\lambda) + 2au_x \end{cases} \qquad (2)$$

Можно считать $b = -a_x$ (константы интегр. не важна, $\varphi \Rightarrow B(t)\varphi$)

Потребуем: $a = a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \ldots + a_N$.

В матричном виде:

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_t = V\Psi, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2a(u-\lambda) & a_x \end{pmatrix}$$

$$U_t = V_x + [V, U]$$

ДЗ 7-1. Проверьте, что условие совместности в точности <=> (2).

Анализируем (2)

$$u_t = -a_{xxx} + 4(u-\lambda)a_x + 2u_x a$$

$$a = a_0\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \dots + a_N$$

$\lambda^{N+1}:\quad a_{0,x} = 0$

$\lambda^N:\quad a_{0,xxx} - 4ua_{0,x} - 2u_x a_0 = -4a_{1,x}$

$\lambda^{N-1}:\quad a_{1,xxx} - 4ua_{1x} - 2u_x a_1 = -4a_{2,x}$

$\dots$

$a_{n,xxx} - 4ua_{n,x} - 2u_x a_n = -4a_{n+1,x}$

$\dots$

$\lambda^0:\quad a_{N,}\dots = -u_t$

$a_0 = 1, \quad a_1 \sim u$

$a_{2x} = u_{xxx} - 6uu_x$

$$a_{3,x} = u_5 - 6uu_3 - 18u_1u_2 - 4u(u_3 - 6uu_1) - 2u_1(u_2 - 3u^2)$$

$$a_{3,x} = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1 = D(\underbrace{u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3}_{a_3})$$

$$D^3 - 4uD - 2u_x = K$$

$D(a_{n+1}) = K(a_n) \qquad a_{n+1} = D^{-1}K(a_n)$

$D(a_n) = g_n \quad \Rightarrow \quad g_{n+1} = KD^{-1}(g_n)$

$$R = KD^{-1} = D^2 - 4u - 2u_x D^{-1}$$

— оператор рекурсии

Возникает последовательность дифф. многочленов

$$g_1 = u_1, \quad g_{n+1} = R(g_n)$$

$$g_2 = u_3 - 6uu_1$$

$$g_3 = u_5 - 10uu_3 - 20u_1u_2 + 30u^2u_1$$

Опр. Уравнения $u_{t_n} = g_n$

называются высшими уравнениями КдФ