

Лекция 8. Высшие уравнения КДФ

27 марта 2021 г. 8:08

С прошлой лекции:

Утв. 1. Условие совместности для

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -a_x \psi + 2a\psi_x \quad (1)$$

имеет вид

$$u_t = -a_{xx} + 4(u - \lambda)a_x + 2u_x a. \quad (2)$$

Матричная формулировка: $\psi_x = U\psi, \quad \psi_t = V\psi \Rightarrow$

$$U_t = V_x + [V, U] \quad (3)$$

(представление нулевой кривизны, представление Лакса).

(3) $\Leftrightarrow$ (2) при выборе

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2(u - \lambda)a & a_x \end{pmatrix} \quad (4)$$

Утв. 2. При $a = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1$;

(2) $\Leftrightarrow$

$$a_0 = 1,$$

$$-4D_x(a_{j+1}) = K(a_j), \quad K = D_x^2 - 4u - 2u_x D_x,$$

$$j = 0, \dots, n-1, \quad \underline{(n, n+1, \dots)}$$

$$u_{t_{n+1}} = -K(a_n) = 4D_x(a_{n+1}). \quad (\text{коэф. не важен})$$

Оператор рекурсии $R = K D_x^{-1} = D_x^2 - 4u - 2u_x D_x^{-1}$

порождает последовательность высших КДФ

$$u_{t_n} = g_n(u, \dots, u_{2n-1}) = R^{n-1}(u_1), \quad u_j := \partial_x^j(u)$$

$$g_1 = u_1, \quad g_{n+1} = R(g_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$g_2 = u_3 - 6u_1 u_1,$$

$$g_3 = u_5 - 10u_1 u_3 - 20u_1 u_2 + 30u_1^2 u_1, \dots$$

Возникает вопрос, корректно ли определение (5). Можем ли мы применять R неограниченно? Ведь на каждом шаге нужно интегрировать.

Рассмотрим производящую функцию

$$A = 1 + a_1/\lambda + a_2/\lambda^2 + \dots$$

$$A_n = (\lambda^n A)_{\geq 0} = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

$$u_{t+n} = -A_{n,xxx} + 4(u-\lambda)A_{n,x} + 2u_x A_n$$

Поделим на λ^n и пусть $n \rightarrow \infty$.

Уравнение для произв. ф.:

$$A_{xxx} - 4(u-\lambda)A - 2u_x A = 0. \quad (6)$$

Утв. Ур. (6) допускает первый интегр. $(\times 2A)$

$$\begin{aligned} 2A_{xx}A - A_x^2 - 4(u-\lambda)A^2 &= c(\lambda) \\ &= 4\lambda \left(1 + \frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

Расписывая по λ , получим

$$a_n = \partial_{\lambda} \text{ ф. многогран от } (a_1, \dots, a_{n-1}, u)$$

$$\Rightarrow a_n = \partial_u \text{ ф. мн от } u, u_1, \dots, u_{2n-2}.$$

$$u_{t+n} = D_x(a_n) = g(u, u_1, \dots, u_{2n-1})$$

Можно написать произв. и для матриц

$$V_{t_n} = V_x + [V, U],$$

$$V_n = \begin{pmatrix} -a_x & 2a \\ -a_{xx} + 2(n-1)a & a_x \end{pmatrix} \quad a = A_n$$

полим. и на λ^n , $n \rightarrow \infty$

$$V = \begin{pmatrix} -A_x & 2A \\ -A_{xx} + 2(n-1)A & A_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_x = [U, V] \quad - \text{упр. для мат. произв. } \Phi. \\ \text{--- уб. лагранжева}$$

Умв. $\det V = \text{const.}$

Формула Лифшица: $\frac{(\det V)_x}{\det V} = \text{tr}(V_x V^{-1})$

$$(\log \det V)_x = \text{tr}((UV - VU)V^{-1}) = \text{tr}(U - VUV^{-1}) \\ = 0.$$

$$\det V = \text{const} = 2AA_{xx} - 4(n-1)A^2 - A_x^2$$

D3 8-1. Рассмотрим уравнения

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_z = V\Psi \Rightarrow U_z = V_x + [U, V]$$

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ v & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \text{ --- многочл. по } \lambda.$$

Пусть
$$\begin{cases} a = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \\ b = b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n \\ c = c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{t_n} = f_n \\ v_{t_n} = g_n \end{cases}$$

1) Выпишите рек. соотнош. для a, b, c

2) Вывести отсюда матричный оператор рекурсии

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

3) Доказать, что результат - диф. многочлен от u, v .

В чем смысл высших КДФ?

Во-первых, они ничем не хуже самого КДФ.

Отличие при построении многосолитонных решений - замена экспоненты

$$\textcircled{z^2 = -\lambda} \quad e^{zx + 4z^3 t} \mapsto e^{z(x + (4z^2)^n t_{n-1})}$$

в формах солитонов соотв. $\mathbb{C}P^1$

$$x + (4k_j^2)t_2 + (4k_j^2)^2 t_3 + \dots + (4k_j^2)^n t_{n+1}$$

В МОЗР тоже меняется лишь множитель на который умножаются спектральные данные.

$$\psi(k) e^{8k^2 t} \mapsto \psi(k) e^{2k(4k^2)^n t_{n-1}}$$

Итак, уравнения допускают совместные решения.

Видимо, D_{t_n} коммутируют? Да.

Определение. Пусть заданы эв. уравнения

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n) \quad u_j = \partial_x^j(u) \\ u_m = g(x, u, u_1, \dots, u_m)$$

Эти уравнения называются симметричными друг для друга, если

$$[D_t, D_m] = 0. \quad (10)$$

$$D_t = \nabla_f = f \partial_0 + D_x(f) \partial_1 + \dots + D_x^k(f) \partial_k + \dots$$

$$\nabla_g(f) - \nabla_f(g) = [g, f]$$

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f, g]}.$$

$$\text{Опр. сим.} \Leftrightarrow [f, g] = 0, \quad \nabla_f(g) = \nabla_g(f). \quad (10')$$

$$f_* = \partial_0(f) + \partial_1(f) D_x + \dots + \partial_n(f) D_x^n$$

$$[f, g] = g_*(f) - f_*(g), \quad (10'')$$

Утверждение. Все уравнения КдФ попарно коммутируют.

Нужно научиться дифф. a_j .

Пусть ψ, φ — реш. ур. Шр.

тогда $\psi\varphi = P$ — удовл. тому же ур. что и A .

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \varphi_{xx} = (u - \lambda)\varphi$$

$$P_{xx} = \psi_{xx}\varphi + 2\psi_x\varphi_x + \psi\varphi_{xx} = 2(u - \lambda)P + 2\psi_x\varphi_x$$

$$\begin{aligned} (\psi_x\varphi_x)_x &= \psi_{xx}\varphi_x + \psi_x\varphi_{xx} = (u - \lambda)(\psi\varphi_x + \psi_x\varphi) \\ &= (u - \lambda)P_x \end{aligned}$$

$$P_{xxx} = 4(u - \lambda)P_x + 2u_x P \quad \text{— э. и т. д.}$$

$$\psi = e^{2x + 4x^3 + \dots} \left(1 + \varphi_1/x + \dots \right)$$

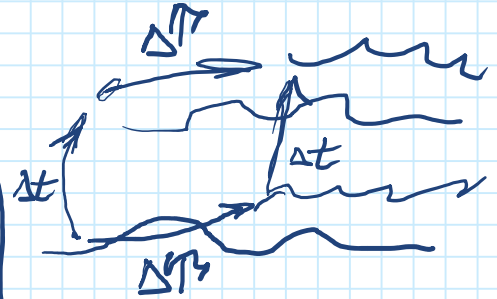
$$\varphi = \varphi(-2)$$

$$P = 1 + p_1/\lambda + p_2/\lambda^2 + \dots = A$$

Решение диф. φ известно:

$$\varphi_{x_n} = -a_x \varphi + 2a \varphi_x, \quad a = A_{n-1} = (\lambda^{n-1} A)_{\geq 0}.$$

$$\begin{aligned} A_{x_n} &= (-a_x \varphi + 2a \varphi_x) \varphi + (-a_x \varphi + 2a \varphi_x) \varphi \\ &= 2a A_x - 2a_x A. \end{aligned}$$



$$= 2a A_x - 2a_x A,$$

$$A_{t_n} = 2(A_{n-1}A_x - A_{n-1,x}A)$$

$$A = 1 + a_1/\lambda + \dots$$

$$A_{n-1} = \lambda^{n-1}a_0 + \dots + a_{n-1}$$

$$\frac{1}{2}a_{m,t_n} = a_0a_{m+m-1,x} + a_1a_{m+m-2,x} + \dots$$

$$+ a_{n-1}a_{m,x}$$

$$- a_{0,x}a_{m+m-1} - a_{1,x}a_{m+m-2} + \dots$$

$$- a_{n-1,x}a_m$$

$$\frac{1}{2}a_{n,t_m} = a_0a_{m+m-1,x} + \dots + a_{m-1}a_{n,x}$$

$$- a_{0,x}a_{m+m-1} - \dots - a_{m-1,x}a_n$$

$$\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i a_{m+n-i,x}$$

$$u_{t_n} = D_x(a_n)$$

$$D_{t_m}(u_{t_n}) = D_x(D_{t_m}(a_n))$$

$$= D_x(D_{t_n}(a_m))$$

$$= D_{t_n}(u_{t_m}).$$

$V_x = [U, V]$ - решение этого уравнения имеет вид $V = \Phi C \Phi^{-1}$, Φ - ф.ср. $\Phi_x = U \Phi$.

$$V_{t_n} = (\Phi C \Phi^{-1})_t = [V_n, V]$$

$$V_{n,t_m} = V_{m,t_n} = [V_n, V_m]$$

а это и есть усл. сойм. $\{D_{t_m}, D_{t_n}\} = 0$.

Гамильтоновость

см [Олвер, гл. 7]

$$p_0 = u$$

$$p_1 = \frac{1}{2} u^2$$

$$p_2 = \frac{1}{2} u_1^2 + u^3$$

$$p_3 = \frac{1}{2} u_2^2 + 5 u u_1^2 + \frac{5}{2} u^4$$

Вычислим вариацион производ.

$$\frac{\delta p_0}{\delta u} = 1 = a_0$$

$$\frac{\delta p_1}{\delta u} = \partial_0(p_1) = u = a_1$$

$-a_2$
//

$$\frac{\delta p_2}{\delta u} = \partial_0(p_2) - D_x \partial_1(p_2) = 3u^2 - D_x(u_1) = -u_2 + 3u^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_3}{\delta u} &= \partial_0(p_3) - D_x \partial_1(p_3) + D_x^2 \partial_2(p_3) \\ &= 10u^3 + 5u_1^2 - D_x(10uu_1) + D_x^2(u_2) \\ &= u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3 = a_3 \end{aligned}$$

...

$$D_x \left(\frac{\delta p_0}{\delta u} \right) = 0$$

$$u_{t_1} = D_x \left(\frac{\delta p_1}{\delta u} \right) = K \left(\frac{\delta p_0}{\delta u} \right)$$

$$u_{t_2} = D_x \left(\frac{\delta p_2}{\delta u} \right) = K \left(\frac{\delta p_1}{\delta u} \right)$$

$$u_{t_n} = D_x \left(\frac{\delta p_n}{\delta u} \right) = K \left(\frac{\delta p_{n-1}}{\delta u} \right)$$

Терм.-мех. система Ньютона

$$f, g \in \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}/\mathcal{I} \cap \mathcal{D}$$

γ - диф. опер.

$$\{f, g\} = \frac{\delta f}{\delta u} \gamma \left(\frac{\delta g}{\delta u} \right)$$

$$(aD)^+ = -Da$$

Требуется лб:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad \gamma^+ = -\gamma$$

$$\{\{f, g\}h\} + \{\{g, h\}f\} + \{\{h, f\}g\} = 0$$

$$X_f(g) = \{g, f\} \quad \{X_f, X_g\} = X_{\{g, f\}}$$

$$u_t = \gamma \frac{\delta h}{\delta u}$$

Уб. $D_x, K = D^3 - 4uD - 2u_x D - 2uDu_x$

Лекция 9. Конечноразностные решения КДФ

5 апреля 2021 г.

17:20

$$g_{n+1} + c_1 g_n + \dots + c_n g_1 = 0 \quad (1)$$

ОДУ порядка $2n+1$,

где g_i — одн. многоч.

$$g_1 = u_1$$

$$g_{n+1} = (D^2 - 4u - 2u_1 D^{-1}) g_n$$

$$g_2 = u_3 - 6u_1 u_2$$

$$g_3 = u_5 - 10u_1 u_3 - 20u_1 u_2 + 30u_1^2 u_1$$

- - - -

(1) — уравнение Новикова (1974), конечноразностные решения КДФ. При $n=1$ — бегущая волна, эллиптические функции.

* Зачем нужны симметрии DY?

Пример 1. * В тождестве DY $u = f(x-ct)$
на f — получается ОДУ.

Пример 2. $u_{xx} + u_{yy} = f(u)$

$$u(x, y) = u(z), \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$u'' + \frac{1}{z} u' = f(u)$$

D3 9-1. $u_{xy} = f(u)$

Выпишите уравнение для решений, инвариантных относительно $u(x, y) = u(z) \quad z = xy$.

$$u_z = f(x, u, \dots, u_n) \quad (3)$$

$$u_T = g(x, u, \dots, u_m)$$

$$\begin{aligned} D_z(g) &= D_T(g) \equiv f_*(g) \\ &= \partial_0(f)g + \partial_1(f)D_x(g) + \dots + \partial_n(f)D_x^n(g) \end{aligned} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow D_z(g)|_{g=0} = 0.$$

$g=0$ — и.в. подпространства $\mathcal{D}_1(3)$

D3 9-2. $\mathcal{M}_2$ - Бюржерси

$$u_z = u_{xx} + 2u u_x \quad (5)$$

Припишите к (5) любое ODU

$$u_{xxx} + u^2 = 0 \quad (6)$$

и убедитесь, что при дифференцировании в силу (5) и исключения производных в силу (6) получаются какие-то дополнительные связи и в результате нетривиальных решений не будет.

D3 -9-3 Заметим (6) на $\mathcal{M}_2$ (7)

$$u_{xxx} + 3u u_x + u^2 + c_1(u_x + u^2) + c_2 u + c_3 = 0$$

(прим. сумм. слагаем.)

Покажите, что теперь диф. по t не приводит к новой связи.

(5)+(7) — пара совм. вект. полей на $\mathcal{M}_2$, $v = u_x$.

Вернемся к КЭФ

$$g_n = D_x(a_n)$$

$$a_{n+1} + c_1 a_n + \dots + c_n a_1 + c_{n+1} = 0 \quad (\Delta')$$

Утверждение 1. (1) $\Leftrightarrow$

$$2AA_{xx} - A_x^2 - 4(n-\lambda)A^2 = 4P(\lambda) = \text{const} \quad (8)$$

где $A = \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_n$

$$P = P_{2n+1} \lambda^{2n+1} + P_{2n} \lambda^{2n} + \dots + P_1 \lambda + P_0$$

Найдем КЭФ строим из ур.

$$\psi_{xx} = (n-\lambda)\psi, \quad \psi_{xt} = -A_x \psi + 2A\psi_x$$

при $A = \lambda^n + \dots$

$$u_{xt} = -A_{xxx} + 4(n-\lambda)A_x - 2u_x A = 4D_x(A_{n+1})$$

$$-4D_x(A_{j+1}) = (D_x^3 - 2u_x D_x - 2u_x)(A_j)$$

$$A = \lambda^n \left(1 + \frac{a_1 + c_1}{(-4\lambda)} + \frac{a_2 + c_1 a_1 + c_2}{(-4\lambda)^2} + \dots + \frac{a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_n}{(-4\lambda)^n} \right)$$

$$\psi_t = -a_x \psi + 2a\psi_x, \quad \text{КЭФ от } \psi$$

$$a = -4\lambda - 2u$$

$$A_t = 2(aA_x - a_x A) \quad (9)$$

Замечание (1) $\rightarrow$ (8) + (9).

$$c_1 \dots c_{n+1} \rightarrow P_1 \dots P_{2n+1}$$

$$A(\lambda) = (\lambda - \gamma_1(x; t)) \dots (\lambda - \gamma_n(x; t))$$

$$P(\lambda) = (\lambda - e_0) \dots (\lambda - e_{2n})$$

$$-A_x^2(\gamma_j) = 4P(\gamma_j) \quad (8')$$

$$A_t(\gamma_j) = -2(u + 2\gamma_j)A_x(\gamma_j) \quad (9')$$

$$-4(u - \lambda)(\lambda^n - \sum \gamma_j \lambda^{n-1} - \dots)^2 = 4(\lambda^{2n+1} - \sum e_j \lambda^{2n} - \dots)$$

$$u = \sum_0^{2n} e_j - 2 \sum_1^n \gamma_j \quad (10)$$

$$A_x(\gamma_j) = -\gamma_{j,x} \prod_{s \neq j} (\gamma_j - \gamma_s)$$

Утверждение 2. (Уравнения Дубровина)

$$(1) + K\partial\Phi \Leftrightarrow (8) + (9) \Rightarrow (8') + (9') + (10) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_{j,x} = \frac{2\sqrt{-P(\gamma_j)}}{\prod_{s \neq j} (\gamma_j - \gamma_s)} \quad j=1, \dots, n \quad (11)$$

$$\gamma_{j,t} = -2(u + 2\gamma_j) \frac{\sqrt{-P(\gamma_j)}}{\prod_{s=1}^n (\gamma_j - \gamma_s)} \quad (12)$$

$$u = \sum e_j - 2 \sum \gamma_j \quad (13)$$

Схема доказательств.

$$\frac{A_x}{A} = - \sum \frac{\gamma_{j,x}}{x - \gamma_j} \quad \frac{A_{xx}}{A} = - \sum \frac{\gamma_{j,xx}}{x - \gamma_j} - \sum \frac{\gamma_{j,x}^2}{(x - \gamma_j)^2} - \frac{A_x^2}{A^2}$$

$$\frac{A_{xx}}{A} - \frac{A_x^2}{A^2} + 4(u - \lambda) = 4 \frac{P}{A^2} \quad \text{— прав. вып. по } \lambda$$

AZ

no X

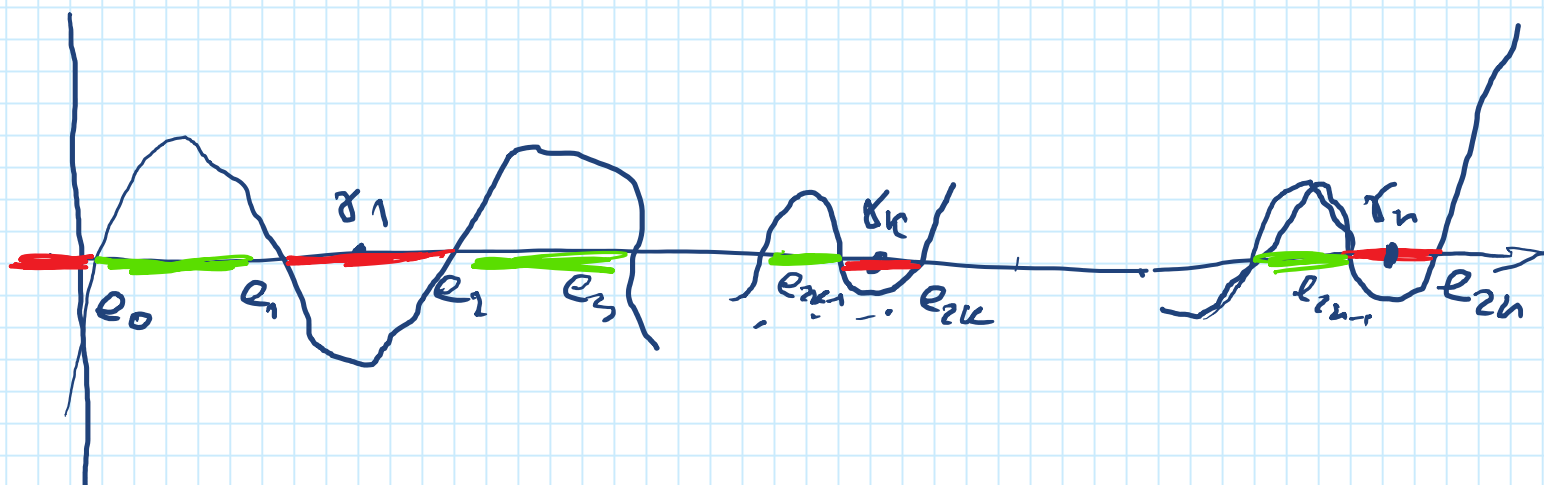
нужно по док. что это так.

напр. рассм. возьмем $\chi_1 \dots \chi_n$.

Также без доказательства: чтобы потенциал был вещественным и регулярным, н. и д. чтобы все корни были вещественными и чередовались таким образом:

$$e_0 \leq e_1 \leq \chi_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq \chi_2 \leq \chi_4 \dots \quad (14)$$

$$\leq e_{2k-1} \leq \chi_k \leq e_{2k} \leq \dots \quad \chi_n \leq e_{2n}$$



— разреш. зоны
— запрещ. зона

ДЗ 9-4. Покажите, что из (13) и усл. (14) $\Rightarrow$

$$e_0 + e_1 - e_{2n} \leq u \leq e_{2n}$$

Вспомогат. интегр. А задан $\psi - \varphi$.

$$A = \psi \bar{\varphi} \quad \varphi_{xx} = (u - \lambda) \varphi$$

$$W = \varphi_x \bar{\varphi} - \varphi \bar{\varphi}_x \quad A_{xx} = 2(u - \lambda)A + \frac{A_x^2 - W^2}{2A}$$

$$A_x = \varphi_x \bar{\varphi} + \varphi \bar{\varphi}_x \quad 4D = -W^2$$

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_x}{A} - \frac{W}{A} \right) \Rightarrow \varphi$$

$$\psi(x, \lambda) = A^{1/2} \exp\left(\pm \sqrt{-P(\lambda)} \int_{x_0}^x \frac{\lambda x}{A} dx\right)$$

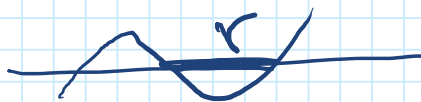
Там где $P(\lambda) > 0$ покаж. экстр. чистоты мнимый и подынт. в вирт. ч. полей особенн.

ψ — остр. осцилл. ф.

Там где $P < 0$ — все плохо.

Уравнения Дубровина интегрируются в квадратурах.

$$n=1.$$



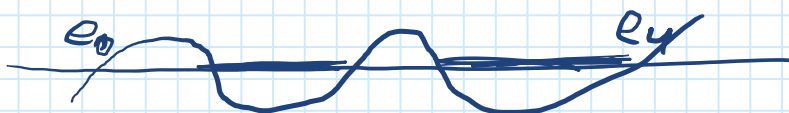
$$\gamma_{1,x} = 2\sqrt{-P(\gamma_1)}$$

$$\gamma_{1,t} = -4E\gamma_{1,x}$$

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{dx}{\sqrt{-P(x)}} = 2(x - x_0)$$

— эдл. пнт,
обр — эдл. ф.

$$n=2$$



$$\begin{cases} \gamma_{1,x} = \frac{2\sqrt{-P(\gamma_1)}}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ \gamma_{2,x} = \frac{2\sqrt{-P(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{1,t} = \frac{-4(E - 2\gamma_2)\sqrt{-P(\gamma_1)}}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ \gamma_{2,t} = \frac{-4(E - 2\gamma_1)\sqrt{-P(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{cases}$$

$$F_0(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{dx}{\sqrt{-P(x)}} + \int_{\gamma_0}^{\gamma_2} \frac{dx}{\sqrt{-P(x)}}$$

$$F_1(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{x dx}{\sqrt{-P(x)}} + \int_{\gamma_0}^{\gamma_2} \frac{x dx}{\sqrt{-P(x)}}$$

$$L_1(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{da}{\sqrt{-P(r)}} + \int_{\gamma_0}^{\gamma_2} \frac{da}{\sqrt{-P(r)}}$$

$$\partial_x(F_0) = 0, \quad \partial_x(F_1) = 2$$

$$\partial_t(F_0) = 8, \quad \partial_t(F_1) = -4E$$

$$F_0 = 8t + \alpha_0 \quad F_1(x) = -4E + 2x + \alpha_1$$

$$F_0(x_1, x_2)$$

(n.)

$$\frac{x_{j,n}}{\sqrt{P(x_j)}} = \frac{2}{\prod_{s \neq j} (x_j - x_s)}$$

$$x_{j-2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i}{\prod_{s \neq j} (x_j - x_s)}$$

$$\text{Усп. 3.} \quad \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{\prod_{s \neq j} (x_j - x_s)} = \begin{cases} 0, & k=0, \dots, n-2 \\ 1, & k=n-1 \\ \Gamma, & k=n \end{cases}$$

ДЗ 9-5. Докажите это тождество (например при помощи вычетов).

$$F_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \int_{x_0}^{x_j} \frac{x^k dx}{\sqrt{P(x)}} \quad k=0, \dots, n-1$$

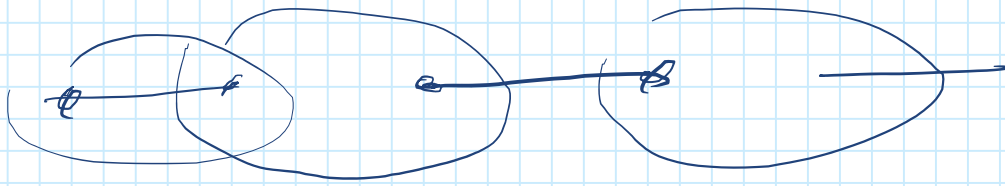
$$F_{0,x} = \dots = F_{n-2,x} = 0, \quad F_{n-1,x} = 2$$

$$F_{0,t} = \dots = F_{n-2,t} = 0, \quad F_{n-2,t} = -8, \quad F_{n-1,t} = -4E$$

$$\begin{cases} F_0(x_1, \dots, x_n) = \alpha_0, \dots, F_{n-2} = -8t + \alpha_{n-2}, \\ F_{n-1} = 2x - 4Et + \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

γ_j — лямбда на рилан. повор.

$$\gamma^2 + P(\lambda) = 0$$



T_k — мног. ф. многообр. Якоби

Дз 9-6. Решите систему

$$y'_j = y_j \left(\sum_{\bar{j}=1}^n y_{\bar{j}} \right) - y_j^2 \quad j = 1 \dots n$$

(здесь порядок или один гиперэл.
интеграл).

Лекция 10. Одевающая цепочка

12 апреля 2021 г. 17:19

В программе - цепочка Вольтерры, схема Забуски-Краскала, система шаров-ящиков.

В отличие от КДФ - модели с дискретной переменной

D3 10-1. Ц. Вольтерры

$$u_{n,x} = u_n (u_{n+1} - u_{n-1}) \quad (1)$$

экв. отображением

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = v_x / v + u \quad (2)$$

$$(u, v) = (u_{n-1}, u_n) \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_n, u_{n+1})$$

Докажите, что преобр. (2) переводит
реш. системы

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx} + (u^2 + 2uv)_x \\ v_t = v_{xx} + (v^2 + 2uv)_x \end{cases} \quad (3)$$

в реш. такой же системы.

Отобр. (2) - пример автомата ПБ.

D3 10-2. Докажите, что если в (1)

$$u_0 = 0, \quad u_1 = w_x / w \quad w = x^k + \dots + a_k$$

$$\text{то} \quad u_{2k+1} = 0.$$

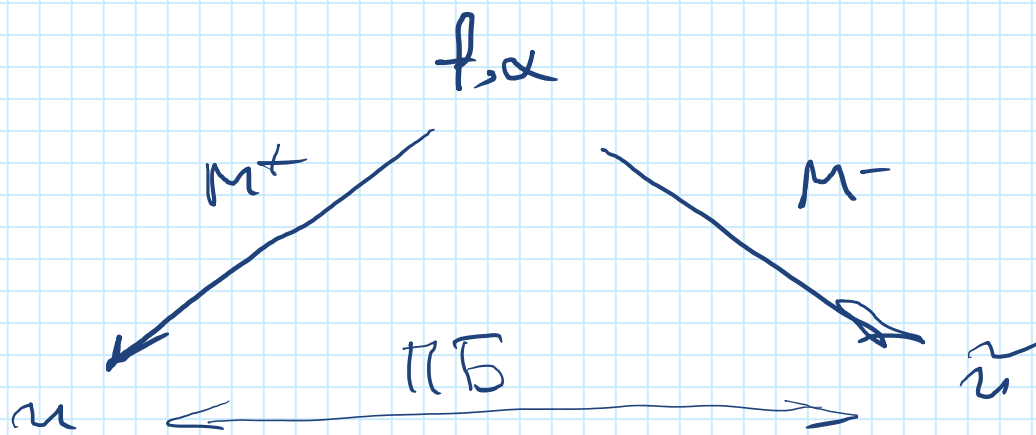
Теперь займемся ПБ для КДФ

У нас было преобразование Миуры: МКДФ $\rightarrow$ КДФ

$$f_z = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x \quad \frac{u = f_x + f^2 + \alpha}{u_+ = u_{xxx} + 6uf_x} \quad u_- = -\tilde{f}_x + \tilde{f}^2 + \alpha$$

$$\tilde{f} = -f \quad \updownarrow$$

$$\tilde{f}_z = \tilde{f}_{xxx} - 6(\tilde{f}^2 + \alpha)\tilde{f}_x$$



В отличие от (2) это ПБ невыпол.

1) по заданному u найти f

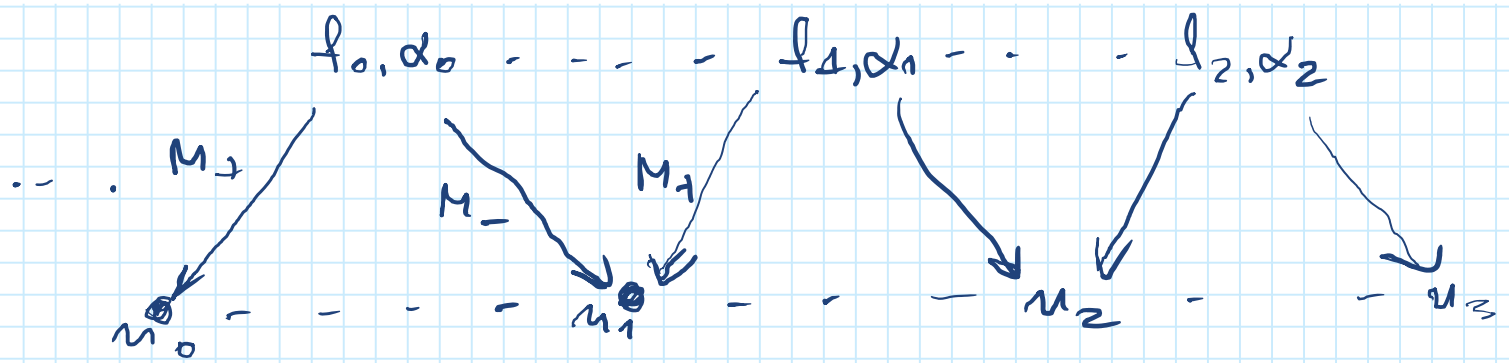
$$f_x + f^2 + \alpha = u$$

2) выбрать конст. интегр. так, что

$$f_z = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x$$

$$3) \quad \tilde{u} = u - 2f_x$$

Можно применять ПБ многократно, меняя параметры



$$\begin{cases} f_{n,x} + f_n^2 + \alpha_n = u_n \\ u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n-1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}, (4)$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Оказывается решение можно построить, если есть запас в.ф. для ур. Шр.

$$\psi_{0,x} = (u_0 - \lambda) \psi_0.$$

Утверждение. Пусть $u, \tilde{u}$ связаны ПБ

$$u = f_x + f^2 + \alpha, \quad \tilde{u} = u - 2f_x \quad (5)$$

Тогда соответствующие в.ф. связаны преобразованием Дарбу (ПД)

$$\tilde{\psi} = \psi_x - f\psi. \quad (6)$$

Наоборот, если (6) переводит в.ф. $L\psi = \lambda\psi$ в

$$\text{в.ф. } L\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}, \text{ то } u, \tilde{u} \text{ связ. (5).}$$

Дано. $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$

$$\tilde{\psi} = \psi_x - f\psi.$$

Выведем, к чему приводит ур.

$$\tilde{\psi}_{xx} = (\tilde{u} - \lambda)\tilde{\psi}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x &= \psi_{xx} - f_x\psi - f\psi_x \\ &= (u - \lambda - f_x)\psi - f\psi_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{xx} &= (u_x - f_{xx})\psi + (u - \cancel{\lambda} - 2f_x)\psi_x \\ &\quad - f(u - \cancel{\lambda})\psi \\ &= (\tilde{u} - \cancel{\lambda})(\psi_x - f\psi) \end{aligned}$$

$$\psi_x: \quad \tilde{u} = u - 2f_x$$

$$\psi: \quad u_x - f_{xx} = f(u - \tilde{u}) = 2ff_x$$

$$\Rightarrow u = f_x + f^2 + \alpha.$$

Утверждение 2. Решение ур. Риккати (5)
строится по частной в.ф. УШ:

$$f = \varphi_x / \varphi, \quad \varphi_{xx} = (\alpha - \lambda) \varphi.$$

Замет. При этом ПД имеет
ненулевое Ядро при $\lambda = \alpha$.

Из утв. 1, 2 следует способ построения
многократного ПД, при условии, что мы знаем
много частных в.ф. исходного потенциала u_0 .

1) Пусть при $n=0$ дан u_0
и φ_0^j :

$$\varphi_{0,xx}^j = (u_0 - \alpha_j) \varphi_0^j, \quad j = 0, 1, 2, 2, \dots$$

2) Если уже вычислены

u_n, φ_n^j , то используем
одну из φ_n^j . По определению,
выберем φ_n^n

$$f_n := \varphi_{n,x}^n / \varphi_n^n$$

3) Пересчитаем потенциал и в.ф.

$$u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}$$

$$\varphi_{n+k}^{j+1} = \varphi_{n+k}^j, x - f_n \varphi_{n+k}, \quad k=1, \dots$$

4) переходим к $n.2$) пока не найдется
или пока не закончатся в.ф.

Послед. f_n зависит от произведений
их соседей в.ф. φ_n^i .

Но оказывается, что результат n -кратного ПД
не зависит от перестановки $\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}$

Это докажем на следующей лекции.

Некоторые итоги.

ПБ - это преобразование между двумя уравнениями,
не сводимое к точечному. Может быть явным
(обратима диф. подстановка, как в примере с
Вольтеррой). Или неявное, как для КДФ (нужно решать
вспомогательное уравнение). ПБ может зависеть от
параметра, но не образуют непрерывную группу. Не
бывает бесконечно малого ПБ.

Опр. ПБ. Уравнение

$$A[u, \tilde{u}] = 0, \quad B[u, \tilde{u}] = 0$$

опр. ПБ между ур. $E[u] = 0$ и $\tilde{E}[\tilde{u}] = 0$

если u $A=B=E=0 \Rightarrow \tilde{E}=0$

$$u \quad A=B=\tilde{E}=0 \Rightarrow E=0.$$

ДЗ 10-3. Уравнение синус-Гордона $u_{xy} = \sin u$

$$\tilde{u}_x + u_x = 2 \sin \frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{x} \sin \frac{\tilde{u} + u}{2}$$

Проверьте, что искл. $\tilde{u}$ дает ур. $\nabla^2 u$ и эквивалентно.

ПД - это продолжим ПБ на пси-функции
 помогают своей линейной задаче.

Если исходное уравнение имеет представление

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_z = V\Psi \Rightarrow U_z = V_x + [V, U]$$

то ПД задается ур. в виде

$$\tilde{\Psi} = F\Psi \Rightarrow \begin{cases} F_x = \tilde{U}F - FV \\ F_z = \tilde{V}F - FU \end{cases}$$

ДЗ 10-4. Покажите, что о.ц. имеет представление

$$F_{n,x} = U_{n+1}F_n - F_n U_n$$

$$\text{мы } U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad F_n = F(f_n, \lambda) = ??$$

Чтобы выписать F, нужно переписать вычисления
 из Утв.1 в матричном виде, для вектора

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix}.$$

Лекция 11. Одевающая цепочка

(окончание)

19 апреля 2021 г.

17:26

Вронскианские формулы

Пусть y_i произвольные функции дифференцируемые достаточное число раз

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_{1,x} & \dots & y_{n,x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_x^{n-1}(y_1) & \dots & \partial_x^{n-1}(y_n) \end{vmatrix}$$

Лемма. Выполняется тождество

$$W(y_1, \dots, y_n) = y_1 W(A(y_2), \dots, A(y_n))$$

$$\text{где } A = \partial_x - \frac{y_{1,x}}{y_1}.$$

Пусть функции линейно независимы. Индукция по n . При $n=2$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_{1,x} & y_{2,x} \end{vmatrix} = y_1 (y_{2,x} - \frac{y_{1,x}}{y_1} y_2) =$$

Пусть доказано для $n-1$. Разложим по последнему столбцу

$$W(y_1, \dots, y_n) = (a_1 \partial_x^{n-1} + \dots + a_n)(y_n) =: P(y_n)$$
$$a_1 = W(y_1, \dots, y_{n-1})$$

$$y_1 W(A(y_2), \dots, A(y_n)) =$$

$$y_1 (b_1 \partial_x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) (\partial_x^n f_n - \frac{y_{1x}}{y_1} f_n)$$

$$= : Q(y_n)$$

$$y_1 b_1 = y_1 W(A(y_2), \dots, A(y_{n-1})).$$

$$P - Q - \text{короткая} < n-1 \Rightarrow$$

$$P = Q \quad \triangleright$$

Применим тождество к ПД. Пусть для потенциала u , известны частные решения УШ:

$$\varphi_{0,x}^n = (u_0 - \alpha_n) \varphi_0^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для простоты будем считать, что все α_n различны.

D3-11.1 Доказать, что φ_0^n линейно независимы.

Последовательность ПД строится так:

$$f_n = \varphi_{n,x}^n / \varphi_n^n \Rightarrow f_{n,x} + f_n^2 + \alpha_n = u_n$$

||

0,

1,

2,

⋮

⋮

$$u_{n+1} = u_n - \alpha f_{n,x}$$

$$\varphi_{n+1}^{\bar{j}} = (\partial_x - f_n) (\varphi_n^{\bar{j}}) \quad \bar{j} = n+1, n+2, \dots$$

Обозначим

$$\Delta_n = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1})$$

$$\Delta_n(\varphi) = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1}, \varphi)$$

$$\Delta_0 = 1 \quad \Delta_0(\varphi) = \varphi$$

$$\Delta_n = \varphi_0^0 W(A(\varphi_0^1), \dots, A(\varphi_0^{n-1})), \quad A = D - f_0$$

$$= \varphi_0^0 W(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{n-1})$$

$$= \varphi_0^0 \varphi_1^1 W(\varphi_2^2, \dots, \varphi_2^{n-1})$$

$$= \dots$$

$$= \varphi_0^0 \varphi_1^1 \dots \varphi_{n-1}^{n-1};$$

$$\Delta_n(\varphi_0^j) = \varphi_0^0 \varphi_1^1 \dots \varphi_{n-1}^{n-1} \varphi_n^j, \quad j \geq n$$

$$\varphi_n^j = \frac{\Delta_n(\varphi_0^j)}{\Delta_n}, \quad j \geq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это выражение для в.ф. преобразованного УШ через затравочные в.ф.

$$\begin{aligned} \varphi_n^n &= \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \Rightarrow f_n = (\log \Delta_{n+1} / \Delta_n) x. \\ &= \frac{\Delta_{n+1, x}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n, x}}{\Delta_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 2f_n x = u_{n-1} - 2(f_{n-1} + f_n)x \\ &= \dots = u_0 - 2(f_0 + \dots + f_n)x \\ &= u_0 - 2(\log \Delta_{n+1})xx. \end{aligned}$$

Теорема. Решение одеватой цепочки

$$u_n = f_{n,x} + f_n^2 + \alpha_n, \quad u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x} \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

(с редуцированными α_n) имеет вид

$$\begin{cases} f_n = (\log \Delta_{n+1} / \Delta_n) x \\ u_n = u_0 - 2(\log \Delta_n) x x \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta_n = W(\varphi_0^0, \dots, \varphi_0^{n-1})$$

$$\varphi_0^n, x x = (u_0 - \alpha_n) \varphi_0^n.$$

Если при этом u_0 удовл. КДФ,

и φ_0^n подобраны так, что

$$\varphi_{0,x}^n = u_{0,x} \varphi_0^n - 2(2\alpha_n + u_0) \varphi_{0,x}^n$$

то все u_n также удовл. КДФ

$$f_n - \text{ур. н. КДФ} \quad f_{n,x} = f_{n,x} - 6(f_n^2 + \alpha_n) f_x$$

Пример. Пусть $u_0 = 0$, тогда

$$\varphi_0^n = c_n e^{k_n x + 4k_n^3 t} + d_n e^{-k_n x - 4k_n^3 t}$$

$$k_n^2 = -\alpha_n, \quad c_n, d_n - \text{произвол. конст.}$$

это приводит к потенциалам Баргманна = n-солитонные решения. (С точностью до правила выбора знаков).

Коммутативность преобразований Дарбу

$$u_0 \xrightarrow{\alpha_0, f_0} u_1 \xrightarrow{\alpha_1, f_1} u_2 \xrightarrow{\alpha_2, f_2} \dots$$

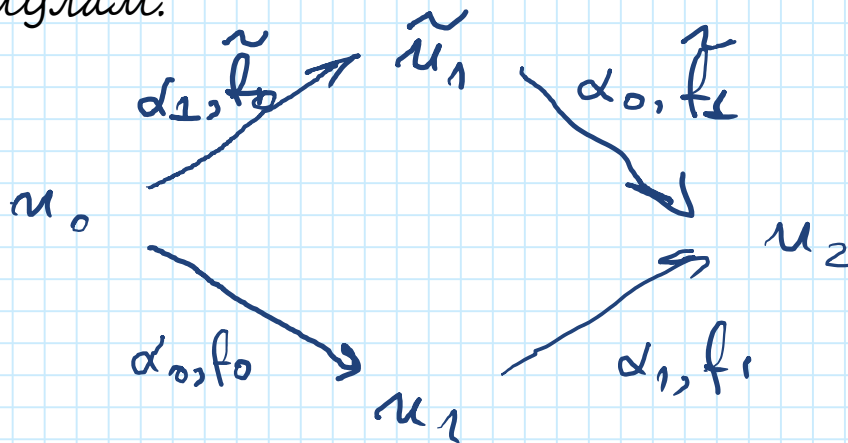
Что получится, если перенумеровать в.ф и

параметры? Из формулы (1) видно что

изменяются только промежуточные u_j, f_j

а окончательный ответ u_n будет тот же.

Достаточно рассмотреть перестановку двух параметров. Оказывается, что при этом f_j преобразуются по простым алгебраическим формулам.



Утверждение. Если u_0, u_1, u_2 связаны ПД с α_0 и α_1 ,

то $\exists \tilde{u}_1$ такой, что $u_0, \tilde{u}_1, u_2$

связаны ПД с α_1 и α_0 , при этом

$$\tilde{f}_0 = f_0 - \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{f_0 + f_1}, \quad \tilde{f}_1 = f_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{f_0 + f_1} \quad (2)$$

D3-11.2 Доказать (2). [применить представление f через в.ф.]

Другая формулировка формулы суперпозиции
 UD .

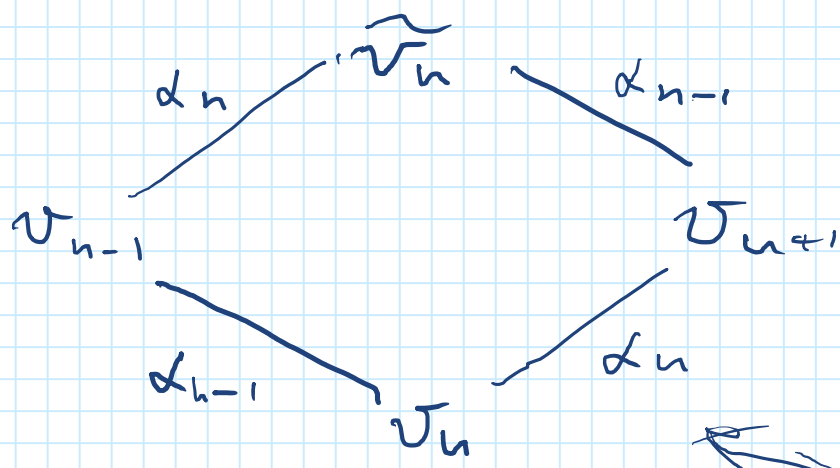
$$u_{n+1} = u_n - 2f_{n,x}$$

v_n :

$$u_n = 2v_{n,x} \quad , \quad f_n = v_n - v_{n+1}$$

$$u_n = f_{n,x} + f_n^2 + \alpha_n$$

$$v_{n,x} + v_{n+1,x} = (v_n - v_{n+1})^2 + \alpha_n$$



$$v'_{n-1} + v'_n = (v_{n-1} - v_n)^2 + \alpha_{n-1} \quad (1)$$

$$v'_n + v'_{n+1} = (v_n - v_{n+1})^2 + \alpha_n \quad (2)$$

$$v'_{n-1} + \tilde{v}'_n = (v_{n+1} - \tilde{v}_n)^2 + \alpha_n \quad (\tilde{1})$$

$$\tilde{v}'_n + v'_{n+1} = (\tilde{v}_n - v_{n+1})^2 + \alpha_{n-1} \quad (\tilde{2})$$

$$(1) - (2) - (\tilde{1}) + (\tilde{2})$$

$$= (v_{n-1} - v_n)^2 + (v_n - v_{n+1})^2 + (v_{n+1} - \tilde{v}_n)^2 - (v_n - v_{n+1})^2 \\ = 2(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

$$- (V_{n-1} - V_n)^2 + (V_n - V_{n+1})^2 + (V_{n+1} - \tilde{V}_n)^2 - (\tilde{V}_n - V_{n+1})^2 = 2(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

$$2(V_{n-1}V_n - V_nV_{n+1} - V_{n+1}\tilde{V}_n + \tilde{V}_nV_{n+1})$$

$$(V_n - \tilde{V}_n)(V_{n-1} - V_{n+1}) = \alpha_{n-1} - \alpha_n$$

$$\tilde{V}_n = V_n - \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{V_{n-1} - V_{n+1}}, \quad (5)$$

Можно проверить, что при этом (1), (2) выполняются.

Формула суперпозиции (5) удобнее для вычисления вронскианов.

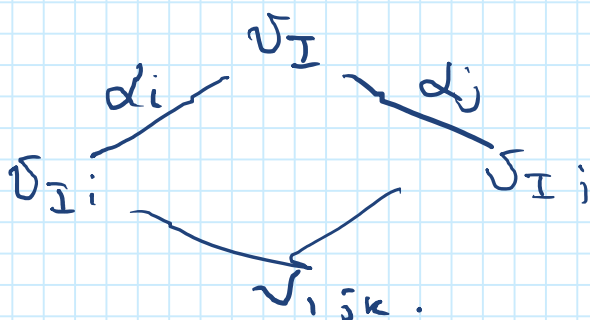
Сменим обозначение: пусть

$v_{i,j,k,\dots}$ — результаты

MD с пар. $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \dots$

$$v_{I,j,k} = v_I - \frac{\alpha_j - \alpha_k}{v_{I,j} - v_{I,k}} \quad (6)$$

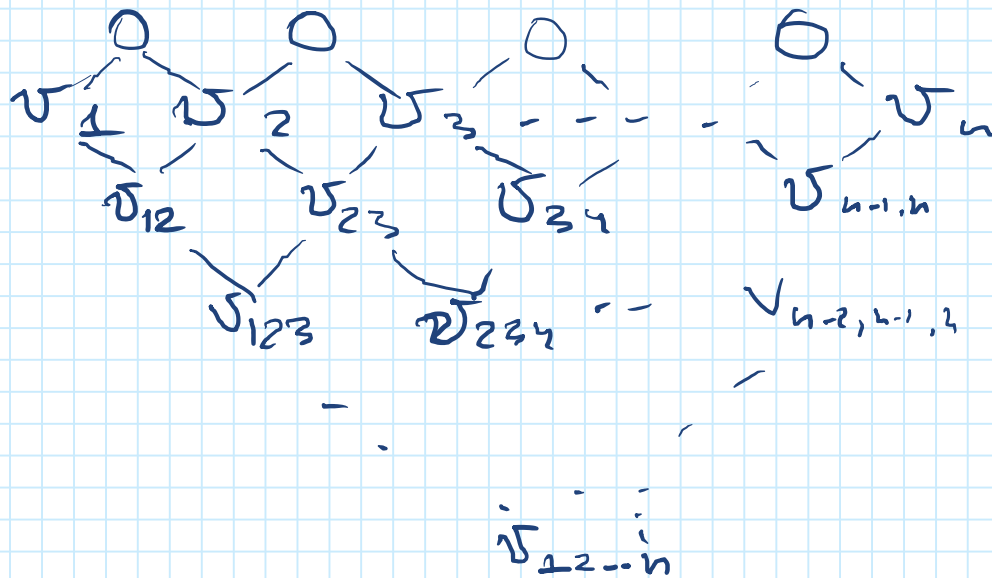
где I — любой мультииндекс $\text{от } j, k$.



Страна имеет n городов

1-компонентный путь.

$$v_j = -k_j \begin{cases} \coth \zeta_j \\ \tanh \zeta_j \end{cases} (X_j) \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 t + \delta_{0j}$$



n 1-ком.

$n-1$ 2-ком.

$n-2$ 3-ком.

Всего приходится применить (6)

$$n(n-1)/2 \text{ раз.}$$

Лекция 12. Уравнения Пенлеве

26 апреля 2021 г.

17:18

$$y'' = 6y^2 + z \quad (P_1)$$

$$y'' = 2y^3 + zy + \alpha \quad (P_2)$$

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \quad (P_3)$$

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \quad (P_4)$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{y'}{z} + \frac{(y-1)^2}{z^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{z} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \quad (P_5)$$

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{y-z} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{z}{y^2} + \gamma \frac{z-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(y-z)^2} \right) \quad (P_6)$$

1. многосолитонные решения – элементарные функции
2. эллиптические функции, конечнозонные решения – интегрируются в квадратурах (и выражаются через тэта-функции)

2.5 уравнения типа Пенлеве

3. неинтегрируемые ODU

Уравнения Пенлеве – это какие-то спецфункции

Пример 1. Синус-Гордон $\rightarrow P_3(1, -1, 0, 0)$

$$u_{xt} = 2 \sin u$$

Группа растяжений $x \rightarrow \varepsilon x, t \rightarrow t/\varepsilon$

Решения инв.-отн. этой группы

$$u(x, t) = y(z), \quad z = xt.$$

$$u_x = t y', \quad u_{xt} = y' + xt y'' = y' + z y''$$

$$y'' = -\frac{1}{z} y' + \frac{2}{z} \sin y$$

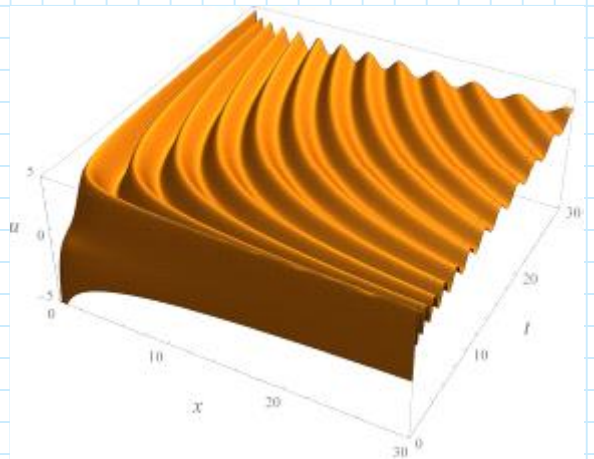
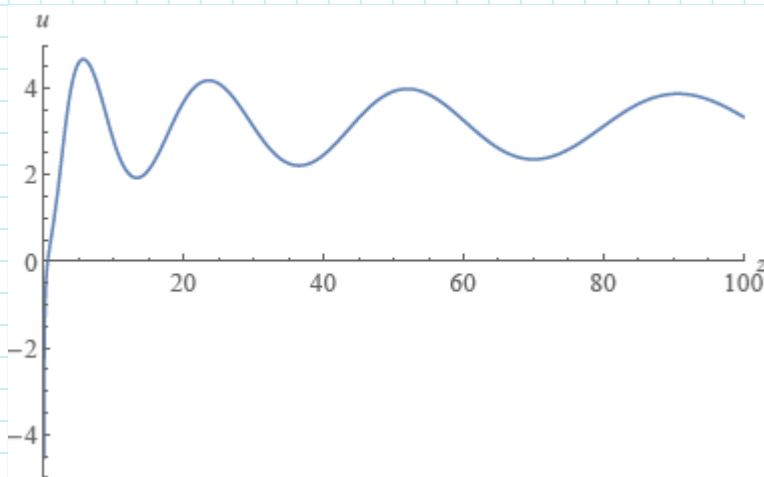
$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Замена $e^{iy} = \sigma$

$$(\log \sigma)'' = -\frac{1}{z} (\log \sigma)' + \frac{1}{z} (\sigma - 1/\sigma)$$

$$1' \quad \sigma''/\sigma - \sigma'^2/\sigma^2$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma'^2}{\sigma} - \frac{\sigma'}{z} + \frac{\sigma^2 - 1}{z} \rightarrow P_3(1, -1, 0, 0)$$



Решение в квадранте, с особенностями вдоль осей,
постоянное вдоль кривых $xt = \text{const.}$

Пример 2. МкДФ $\rightarrow$ P2

$$f_t = f_{xxx} - 6f^2 f_x$$

Здесь растяжения действ. так

$$f \rightarrow \varepsilon f \quad \partial_x \rightarrow \varepsilon \partial_x \quad \partial_t \rightarrow \varepsilon^3 \partial_t$$

инварианты: $t^{1/3} f$, $t^{-1/3} x$

$$f(x, t) = \mu t^{-1/3} y(z), \quad z = \nu t^{-1/3} x$$

$$f_x = \mu \nu t^{-2/3} y'$$

$$f_{xx} = \mu \nu^2 t^{-1} y''$$

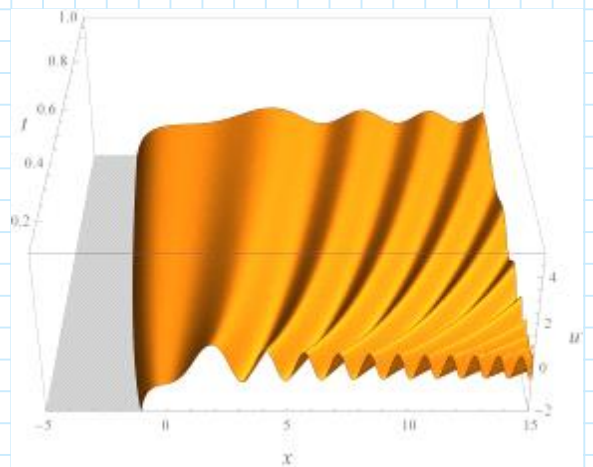
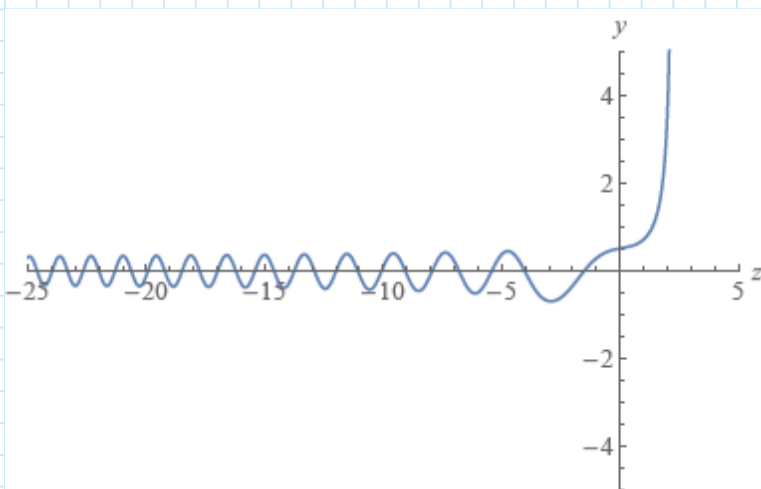
$$f_{xxx} = \mu \nu^3 t^{-4/3} y'''$$

$$f_z = -\frac{\mu}{z} t^{-4/3} y - \frac{\mu \nu}{z} t^{-5/3} x y' = -\frac{\mu}{z} t^{-4/3} y - \frac{\mu \nu}{z^{-4/3} z} t^{-5/3} x y'$$

$$-\frac{\mu}{z} t^{-4/3} y - \frac{\mu}{z} t^{-4/3} z y' = \mu \nu^3 t^{-4/3} y''' - 6 \mu^3 t^{-4/3} y^2 y'$$

$$\nu^3 y''' = -\frac{1}{z} (z y)' + 6 \mu^2 \nu y^2 y'$$

$$(P_2) y'' = 2y^3 + z y + \alpha \quad \begin{cases} \mu = \nu, \nu^3 = -1 \end{cases}$$



Пример 3. КДФ $\rightarrow P_1$

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

Будем искать решение в таком виде:

$$u(x,t) = 2y(z) + 2t, \quad z = x - 6t^2.$$

$$u_x = 2y'$$

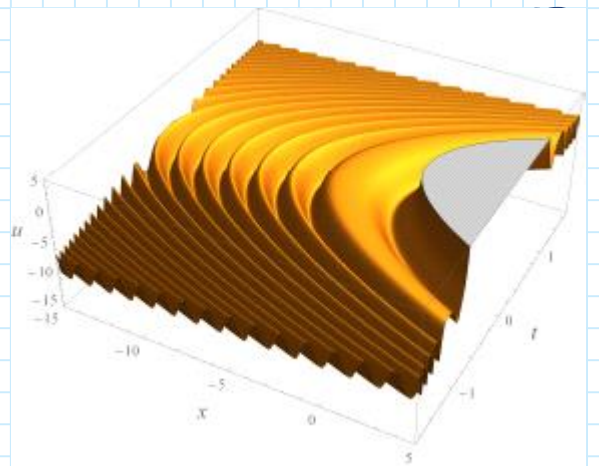
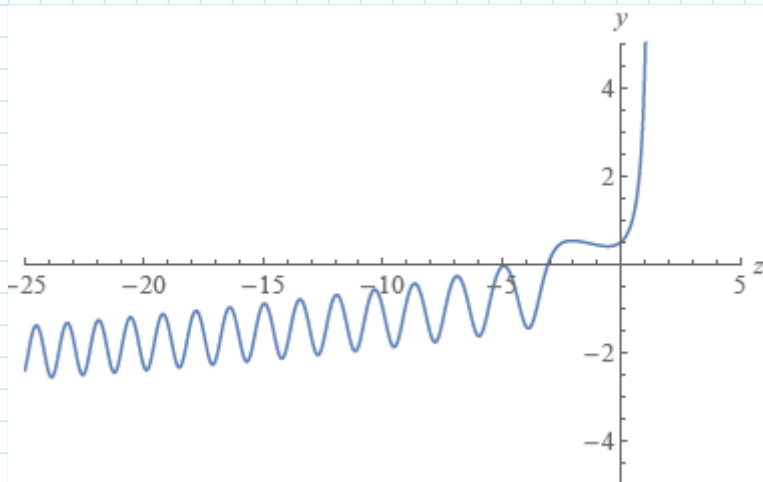
$$u_t = 2 - 24ty'$$

$$u_{xx} = 2y''$$

$$u_{xxx} = 2y'''$$

$$2 - 24ty' = 2y''' - 6(2y + 2t)2y'$$

$$y''' = 12yy' + 1 \Leftrightarrow y'' \pm 6y^2 + z + c \quad (P_1)$$



Эта подстановка - тоже переход к инвариантам группы.

Группа сдвигов по t $\tilde{u}(x,t) = u(x,t + \epsilon)$

Группа преобразований Галилея

$$\hat{u}(x,t) = u(x - 6\delta t, t) + \delta.$$

Перейдем от функции u к каноническим

$$X_1 = \left. \frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = u_t, \quad X_2 = \left. \frac{d\hat{u}}{d\delta} \right|_{\delta=0} = -6tu_x + 1$$

Любой 1-пар. подгруппе отвечает вектор

$$X = X_1 + \alpha X_2$$

Удобно считать этой подгруппой
испытал как перв. инт. для

$$X = 0$$

$$u_t + \alpha(-6tu_x + 1) = 0$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-6\alpha t} = \frac{du}{-\alpha} = d\varepsilon \quad (\text{ур. Ли})$$

$$-6\alpha t dt = dx, \quad du = -\alpha dt$$

$$x + 3\alpha t^2 = C_1, \quad C_2 = u + \alpha t$$

$$\alpha = -2 \therefore u = y(x - 6t^2) + 2t -$$

D3 12-1. Найдите соотв. группу, решая ур. Ли

$$\text{опар. урн. } (x, t, u)|_{\varepsilon=0} = (x, t, u).$$

Это дает отображ. $T_\varepsilon: (x, t, u) \mapsto F(x, t, u; \varepsilon)$

Проверьте, что это группа, т.е. $T_\varepsilon T_\delta = T_{\varepsilon+\delta}$.

Пример 4. Редукции в УЧП – не единственный источник.
Рассмотрим одевающую цепочку

$$f_n' + f_{n+1}' = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}$$

и наложим условие квази-периодичности (N – нечетное)

$$f_{n+N} = f_n, \quad \alpha_{n+N} = \alpha_n + 2.$$

Первый интеграл $f_1 + \dots + f_N = -x \quad (+c \text{ } m \geq 0)$

Предположим, что все f_n регулярны и ведут себя как $f_n \sim -\frac{x}{N} + O(1)$.

Тогда потенциала

$$u_n = f_n' + f_n^2 + \alpha_n \sim \frac{x^2}{N^2} + O(x)$$

– это – вброс квадрат. гарм. осциллятора.

$$\psi_n^h = \exp\left(\int_0^x f_n dx\right) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2N}\right)$$

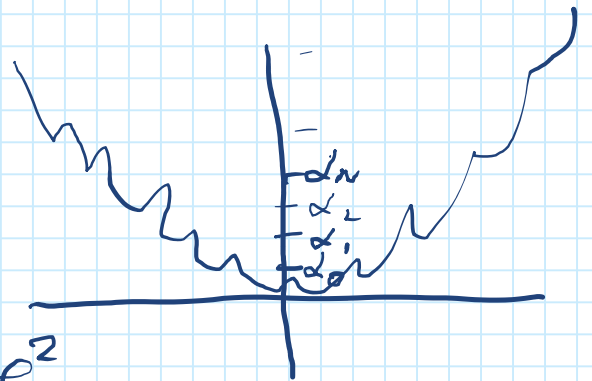
– основное сф. для u_n , отв. $\mathcal{A} = \alpha_n$.

ψ_0^0

$\psi_0^1 \longleftrightarrow \psi_1^1$

$\psi_0^2 \longleftrightarrow \psi_1^2 \longleftrightarrow \psi_2^2$

$\psi_0^3 \longleftrightarrow \psi_1^3 \longleftrightarrow \psi_2^3 \longleftrightarrow \psi_3^3$
⋮



$$N = 3:$$

$$\begin{cases} f_1' + f_2' = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_1 - \alpha_2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$f_1 + f_2 = g_1$$

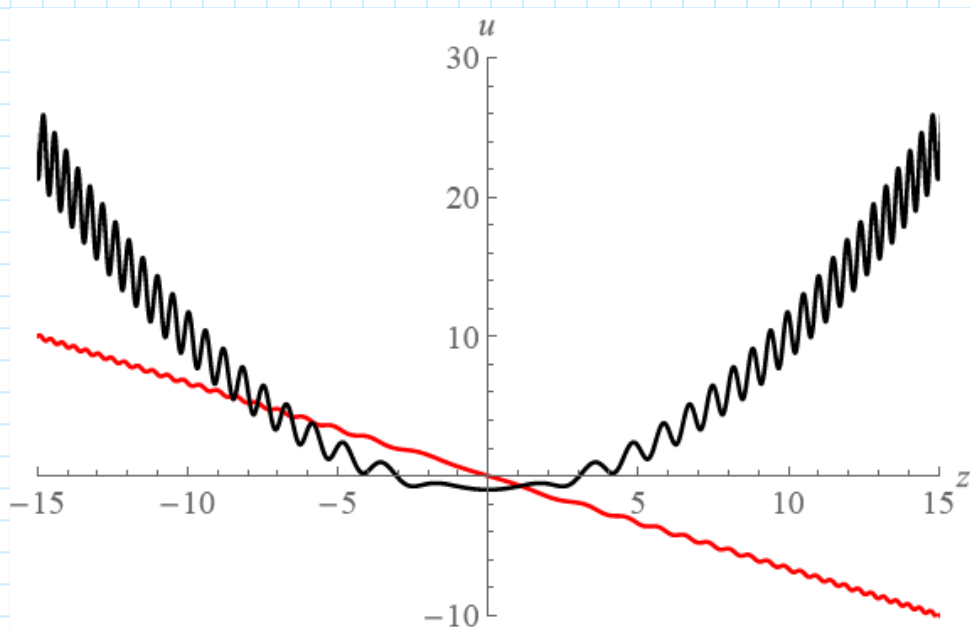
$\vdots$

$$f_n = -x - g_{n+1} \pmod{3}$$

$$\begin{cases} g_1' = g_1(g_3 - g_2) + \beta_1 \\ g_2' = g_2(g_1 - g_3) + \beta_2 \\ g_3' = g_3(g_2 - g_1) + \beta_3 \end{cases}$$

$$\Sigma g = -2x \quad \Sigma \beta = -2(\varepsilon)$$

D3 12-2. Проверьте, что при $\varepsilon = 0$ система решается в эк. функциях, а при $\varepsilon = 1$ кант гае из g_i $y \cap P_a$.



Определение. ОДУ обладает свойством Пенлеве, если все подвижные особые точки его решений являются полюсами.

$$y'' = R(y, y', z) \quad - \text{рац. по } y, y' \\ \text{анал. и непрерывно по } z.$$

$$\text{Фукс (1900)} \quad \Psi_z = A \Psi \quad \Psi_z = B \Psi.$$