Задачи к лекции 11. (Некоммутативные/неавтономные симметрии, уравнения Пенлеве)

Формулировки задач получились очень длинными, что не должно пугать; вычисления не особенно сложные.

Рассмотрим комплексную систему НШ

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2.$$

На лекции 7 мы вывели для нее оператор рекурсии

$$R = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & -D_x \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} D^{-1} \langle (v, u), \cdot \rangle$$

и строили высшие симметрии, применяя его к простейшей классической симметрии

$$u_{t_0} = u, \quad v_{t_0} = -v$$

(кстати, какой однопараметрической группе преобразований она отвечает?) Теперь рассмотрим группу растяжений

$$\tilde{x} = e^a x, \quad \tilde{t} = e^{2a} t, \quad \tilde{u} = e^{-a} u, \quad \tilde{v} = e^{-a} v,$$

которой отвечает симметрия

$$u_T = 2tu_t + xu_x + u, \quad v_T = 2tv_t + xv_x + v.$$

Отбрасываем здесь первые члены с t и применяем R к $(xu_x + u, xv_x + v)$.

55. Покажите, что: 1) в результате получается

$$u_\tau = x(u_{xx} + 2u^2 v) + 2u_x + 2uD_x^{-1}(uv), \quad -v_\tau = x(v_{xx} + 2uv^2) + 2v_x + 2vD_x^{-1}(uv);$$

2) при коммутировании D_t и D_τ возникает следующая симметрия $u_{t_3} = u_{xxx} + 6uvu_x$, $v_{t_3} = v_{xxx} + 6uvv_x$ из основной части иерархии. (При дифференцировании $D_x^{-1}(uv)$ следует воспользоваться тем, что D_x^{-1} и D_t коммутируют).

56. Не следует думать, что мастер-симметрия обязательно должна содержать какую-то нелокальную переменную, как в случае КдФ и НШ. Для некоторых уравнений это может быть и локальным уравнением (хотя нелокальности все же возникают при дальнейшем применении оператора рекурсии). Хороший пример дает уравнение магнетика Гайзенберга

$$s_t = [s, s_{xx}], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1. \tag{1}$$

Мастер-симметрия для него имеет вид (примем это без доказательства)

$$s_\tau = x[s, s_{xx}] + [s, s_x].$$

Вычислите коммутатор $[D_t, D_\tau]$ и получите высшую симметрию

$$s_{t_3} = \Big(s_{xx} + \frac{3}{2} \langle s_x, s_x \rangle s \Big)_x$$

(желательно также проверить, что $[D_t, D_{t_3}] = 0$). При вычислениях необходимо пользоваться тождествами для смешанного и двойного векторного произведения

$$\langle a,[b,c]\rangle = \langle [a,b],c\rangle, \quad [a,[b,c]] = \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c$$

и, конечно, соотношениями $\langle s, s_x\rangle = 0$, $\langle s, s_{xx}\rangle + \langle s_x, s_x\rangle = 0$, ..., которые следуют из $\langle s, s\rangle = 1$.

Замечание. Уравнение (1) является частным (изотропным) случаем уравнения Ландау–Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s\rangle = 1, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Добавка члена с J существенно усложняет свойства модели. На самом деле, в результате получается наиболее общая интегрируемая система с двумя компонентами. Тем не менее, вид мастер-симметрии у уравнения ЛЛ остается столь же простым: $s_\tau = x[s, s_{xx} + Js] + [s, s_x]$ (проверять это не надо, это уже более сложное вычисление).

57. Рассмотрим уравнение P_2

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha.$$

Проверьте, что преобразование (Лукашевич, 1971)

$$B: \quad \tilde{w} = w + \frac{2\alpha + 1}{2w' + 2w^2 + z}, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha - 1 \tag{2}$$

переводит его решения в решения такого же уравнения с параметром $\tilde{\alpha}$, и что $B^2 = \mathrm{id}$. Ещё одно очевидное преобразование есть

$$R: \quad \tilde{w} = -w, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha.$$

Постройте несколько рациональных решений, отвечающих целым значениям α, стартуя с $w = 0$ и применяя поочередно B, R.

Подсказка. Непосредственная проверка преобразования B довольно тяжела и её лучше делать на компьютере. Но, вручную нетрудно справиться, введя вспомогательную переменную для знаменателя $v = 2w' + 2w^2 + z$ (преобразование Миуры!) и переписав уравнение в виде системы на v, w.

Замечание. Преобразование R также удовлетворяет тождеству $R^2 = \mathrm{id}$, но преобразование BR имеет бесконечный порядок (как оно действует на параметр α?). Это напоминает построение цепочки преобразований Бэклунда для КдФ из преобразования Миуры со сменой знака (см. лекцию 9). Фактически, это оно и есть, после перехода к автомодельным переменным. По этой причине, подстановки такого типа для уравнений Пенлеве также принято называть преобразованиями Бэклунда, хотя это не очень согласуется с тем определением, что у нас было.

58. Уравнение sin–Гордона $u_{xy} = \sin u$, очевидно, допускает однопараметрическую группу преобразований

$$\tilde{x} = e^a x, \quad \tilde{y} = e^{-a} y, \quad \tilde{u} = u.$$

Выпишите уравнение для решений, инвариантных относительно этой группы. Подберите точечную замену, приводящую его к какому-нибудь частному случаю уравнения P_3

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}$$

(два параметра будут равна 0, а два можно отмасштабировать в 1).

59. Проверьте, что цепочка Вольтерра

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

согласована со связью

$$u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1}) + 2axu_n + an + b + (-1)^n c = 0, \tag{4}$$

где a, b, c произвольные постоянные (Итс, Китаев, Фокас, 1990). Для этого нужно продифференцировать (4) по x в силу (3); получится некоторое соотношение $g(n, u_{n-2}, \dots, u_{n+2}) = 0$; требуется показать, что оно является следствием (4). Это можно сделать по разному, например, можно выразить из (4) $u_{n+1} = f(n, u_n, u_{n-1})$ и несколько раз подставить в $g = 0$. Или же показать, что $g = A(f)$ для некоторого разностного оператора $A = aT + b + cT^{-1}$, где $T : n \mapsto n + 1$.

60. Покажите, что из уравнений (3), (4) следует, что при каждом n пара переменных u_n, u_{n+1} удовлетворяет некоторой системе из двух ОДУ первого порядка. Исключив одну из переменных, получите уравнение второго порядка на другую переменную. Покажите, что оно эквивалентно уравнению P_4

$$w'' = \frac{w'^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}$$

(параметры будут выражаться через a, b, c и n, то есть, для разных n будут получаться немного разные уравнения). Перепишите (4) в виде отображения $u_{n+1} = f(n, u_n, u_{n-1})$ и получите отсюда подстановку (преобразование Бэклунда) $w_{n+1} = F(n, z, w_n, w'_n)$ действующую на P_4.

Замечание. Уравнение (4) принято обозначать dP_1 (дискретное уравнение P_1), несмотря на то, что оно определяет преобразование Бэклунда для непрерывного P_4. Такое название объясняется тем, что оно переходит в P_1 в результате некоторого предельного перехода (вспомним предельный переход от самой цепочки Вольтерра к КдФ).