Задачи к лекции 10. (Преобразования Дарбу–Бэклунда, продолжение)

Продолжаем серию задач про уравнение sin/sinh-Гордона. Вычисления в следующих задачах довольно объемные (если без компьютера), так что вполне можно ограничиться рассмотрением только sinh (попроще) или sin (посложнее). Задача 53 это фактически все 4 предыдущие задачи в одной.

Во всех задачах используются обозначение преобразований Бэклунда индексами, как это было сделано на лекции при рассмотрении свойства коммутативности. То есть, если B_i обозначает ПБ с параметром α_i, то его действие на u будем обозначать приписыванием индекса i:

$$u \xrightarrow{B_i} u_i \xrightarrow{B_j} u_{ij} \xrightarrow{B_k} u_{ijk} \quad \dots$$

49. Выведите формулу суперпозиции преобразований Бэклунда для уравнения sinh-Гордона. Используйте уравнения в рациональной форме из задачи 46. В них финальный ответ должен иметь простой вид

$$\alpha_i(vv_j - v_iv_{ij}) = \alpha_j(vv_i - v_jv_{ij}). \tag{1}$$

Пояснение. Для этого нужно проделать следующие вычисления. ПБ имеют вид

$$vv_{i,x} + v_xv_i = f(v, v_i, \alpha_i), \quad vv_{i,y} - v_yv_i = g(v, v_i, \alpha_i).$$

Нужно выписать такие же формулы, заменив i на j и потом еще пару формул, добавляя к v второй индекс (но не меняя параметры):

$$\begin{aligned}
&vv_{j,x} + v_xv_j = f(v, v_j, \alpha_j), && vv_{j,y} - v_yv_j = g(v, v_j, \alpha_j),\\
&v_jv_{ij,x} + v_{j,x}v_{ij} = f(v_j, v_{ij}, \alpha_i), && v_jv_{ij,y} - v_{j,y}v_{ij} = g(v_j, v_{ij}, \alpha_i),\\
&v_iv_{ij,x} + v_{i,x}v_{ij} = f(v_i, v_{ij}, \alpha_j), && v_iv_{ij,y} - v_{i,y}v_{ij} = g(v_i, v_{ij}, \alpha_j).
\end{aligned}$$

Теперь нужно скомбинировать уравнения так, чтобы производные сократились и проверить, что оставшееся алгебраическое уравнение сводится к (1) (обе системы, по x и по y, должны дать одно и то же). Точнее, возможно, что это уравнение будет иметь вид $PQ = 0$, где и P и Q многочлены от v, v_i, v_j, v_{ij}. Нужно еще проверить, какое из двух уравнений $P = 0$ или $Q = 0$ совместно с дифференцированиями по x и y.

50. Выведите формулу (1) альтернативным способом, основанным на использовании матриц A из задачи 45 (естественно, переписанных в переменных v). Действительно, так как преобразования Дарбу задаются уравнениями

$$\Psi_i = A^{(i)}\Psi, \quad A^{(i)} := A(u, u_i, \alpha_i, \lambda)\Psi,$$

то их коммутативность приводит к условию совместности

$$A^{(i)}_jA^{(j)} = A^{(j)}_iA^{(i)}.$$

Проверьте, что это дает как раз (1). Как и раньше, нужно еще проверить согласованность с D_x и D_y.

51. Запишите (1) в виде $v_{ij} = \dots$ и используйте эту формулу, чтобы построить решение из $v = 1$ и v_i, v_j найденных в задаче 46. (Конечно, желательно построить и график для переменной u. Как и в случае КдФ, необходимо правильно выбирать параметры, чтобы решение было регулярным.)

52. Проверьте прямым вычислением, что уравнение (1) совместно вокруг куба, то есть, значения v_{ijk} построенные по v, v_i, v_j, v_k тремя возможными способами совпадают. В принципе, эту формулу можно применить, чтобы построить решение v_{123}. Вручную это уже достаточно сложно, так что это только для тех, кто программирует.

53. Повторите подвиги из задач 49–52 для уравнения sin-Гордона. ПБ в рациональной форме из задачи 47 имеет вид

$$(1+v^2)v_{i,x} + (1+v_i^2)v_x = f(v, v_i, \alpha_i), \quad (1+v^2)v_{i,y} - (1+v_i^2)v_y = g(v, v_i, \alpha_i),$$

отсюда и еще трех таких же уравнений нужно исключить производные и получить формулу для v_{ij}. Она будет немного сложнее, чем (1), но по прежнему v_{ij} выражается через v, v_i, v_j рациональным образом. Если в полученной формуле для двукратного преобразования Бэклунда брать α_i и α_j вещественными, то u_{ij} будет двух-кинковым решением.

54. Покажите, что, в отличие от случая sinh–Гордона, для sin–Гордона возможен и другой вариант, когда u_{ij} будет регулярным решением. А именно, можно взять α_i и α_j, а также соответствующие фазовые сдвиги комплексно сопряженными. Тогда промежуточные решения v_i, v_j будут комплексными, но для v_{ij} вещественность восстановится. Полученное решение будет солитоном огибающей, а при некотором специальном наборе параметров — бризером (стоячей осциллирующей волной).