Задачи к лекции 9. (Преобразования Дарбу–Бэклунда)

Несколько задач на преобразования Бэклунда для уравнений sin- и sinh-Гордона. Формально, эти два уравнения сводятся друг к другу простой заменой $u \to iu$, $x \to ix$, но, конечно, она не годится для вещественных решений. В этом смысле, уравнения неэквивалентны, их решения не похожи друг на друга и строятся по разным формулам. Тем не менее, комплексную замену допустимо использовать в задачах 43–45, так как в них рассматриваются сами уравнения, а не их решения, и после замены i в формулах сокращается.

43. На лекции было показано, что ПБ для уравнения

$$u_{xy} = \sin u \tag{1}$$

задается парой уравнений

$$\tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sin\frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\tilde{u} + u}{2}. \tag{2}$$

Проверьте (при помощи замены или непосредственно), что для

$$u_{xy} = \sinh u \tag{3}$$

аналогичная пара имеет вид

$$\tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sinh\frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha}\sinh\frac{\tilde{u} + u}{2}. \tag{4}$$

44. Проверьте, что первое из уравнений (2) служит также x-частью ПБ для уравнения

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3. \tag{5}$$

Вычисление заключается в том, чтобы продифференцировать соотношение $A[u, \tilde{u}] = 0$ по t в силу соответствующего эволюционного уравнения и показать, что результат есть следствие соотношений $D_x(A) = 0$, $D_x^2(A) = 0, \ldots$ При помощи замены покажите, что в случае (4) уравнение по t заменяется на

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3. \tag{6}$$

45. Напомним (см. задачу 22), что уравнение (1) служит условием совместности для линейных уравнений $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_y = V\Psi$ с матрицами

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}.$$

Подберите матрицу $A(u, \tilde{u}, \alpha, \lambda)$ такую, чтобы преобразование (2) служило условием совместности с уравнениями $\tilde{\Psi} = A\Psi$, то есть

$$A_x = \tilde{U}A - AU, \quad A_y = \tilde{V}A - AV$$

(подсказка: ищите A в виде $\lambda A_1 + A_0$). Перепишите ответ и для (3), заменяя также λ.

В задачах 46–48 строятся простейшие точные решения, стартуя с затравочного $u = 0$. Здесь уже приходится различать между $\sin$ и $\sinh$. Чтобы формулы были эффективными, нужно привести уравнения к рациональному виду, и это приходится делать разными подстановками. Начнем с более простого случая $\sinh$.

46. Для уравнений (3), (4) естественно применить замену $v = e^{u/2}$. Перепишите эти уравнения для переменной v. При этом уравнения (4) должны принять вид некоторых уравнений Риккати относительно любой из переменных v или $\tilde{v}$. Положив $v = 1$ (что отвечает $u = 0$), найдите совместное решение этих уравнений $\tilde{v}(x, y)$. Желательно построить график соответствующего решения в исходных переменных $\tilde{u} = 2\log\tilde{v}$ (это несложно для тех, кто программирует хотя бы в минимальном объеме).

47. Для уравнений (1), (2) формальным аналогом предыдущей замены является $v = e^{iu/2}$, но мы теперь не хотим использовать мнимую единицу. Поэтому, нужно использовать чуть более хитрую замену. Вспомним, что тригонометрические функции рационализируются при переходе к тангенсу половинного угла и сделаем замену $v = \tan(u/4)$ [замечание: фактически, это композиция старой замены $w = e^{iu/2}$ и дробно-линейного преобразования $(w - 1)/(w + 1) = iv$, при этом мнимые единицы съедаются]. Перепишите (1), (2) для переменной v (относительно любой из переменных v или $\tilde{v}$ опять должны получиться уравнения Риккати, но другого вида). Положив $v = 0$ (что отвечает $u = 0$), найдите решение $\tilde{v}(x, y)$. Желательно построить график соответствующего решения в исходных переменных $\tilde{u} = 4\arctan\tilde{v}$.

48. Продолжите решение $\tilde{u}(x, y)$ задачи 46 до функции $\tilde{u}(x, y, t)$, удовлетворяющих одновременно (3) и (6). Для этого нужно лишь уточнить зависимость постоянных интегрирования от t; как обычно, получается фаза, линейная по x, y, t.

Аналогично, продолжите решение $\tilde{u}(x, y)$ задачи 47 до функции $\tilde{u}(x, y, t)$, удовлетворяющих одновременно (1) и (5).

Эта серия задач будет продолжена в задачах к следующей лекции; там мы научимся строить из полученных решений более сложные при помощи суперпозиции ПБ.