Задачи к лекции 8. (Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы, продолжение)

37. Докажите тождества в $F((D))$:

$$(D+D(f)/f)^{-1}=f^{-1}D^{-1}f,$$
$$(D-g)^{-1}f=f(D-g)^{-1}-D(f)(D-g)^{-2}+D^2(f)(D-g)^{-3}-\dots$$

(примените сопряжение $h^{-1}Lh$ к тождеству из задачи 35).

38. (Извлечение корня из ПДО) Пусть задан $A\in F((D))$,

$$A=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots,\quad a_n\neq 0,$$

причем $\exists\ a\in F: a_n=a^n$, то есть в F определен корень n-й степени от старшего коэффициента. Докажите, что тогда существует ПДО

$$B=A^{1/n}=aD+b_0+b_{-1}D^{-1}+b_{-2}D^{-2}+\dots$$

такой, что $B^n=A$. (Нужно убедиться, что из уравнения $B^n=A$ все b_j однозначно определяются по некоторым рекуррентным формулам при помощи алгебраических операций и дифференцирования D; явно эти рекуррентные формулы выписать сложно, но это не требуется — важно, что они есть). Докажите, что ряд $A^{1/n}$ единственный с точностью до умножения на корень из 1 в F.

39. Вычислите несколько членов ряда $L^{1/2}$, где $L=D_x^2+u\in\mathcal{F}((D_x))$. Проверьте, что оператор A из задачи 32 равен $A=4(L^{3/2})_{\geq}$, где значок $\geq$ обозначает дифференциальную часть ПДО (то есть, отбрасываются все члены с отрицательными степенями D).

40. Пусть ПДО L удовлетворяет уравнению Лакса $D_t(L)=[A,L]$ (где D_t — дополнительное дифференцирование, см. задачу 32). Докажите, что тогда $D_t(L^k)=[A,L^k]$ для произвольного $k\in\mathbb{Z}$. Докажите, что если существует корень $L^{1/n}$ (где n степень L), то он также удовлетворяет уравнению Лакса: $D_t(L^{1/n})=[A,L^{1/n}]$.

41. Для $A\in F((D))$, обозначим через $\operatorname{res}A$ (вычет A) коэффициент при D^{-1}. Докажите, что для любых $A,B\in F((D))$ вычет от коммутатора есть полная производная:

$$\operatorname{res}[A,B]\in\operatorname{Im}D.$$

42. (Еще один способ вычисления законов сохранения КдФ) Из задач 40, 41 следует, что если уравнение $u_t=f[u]$ допускает представление Лакса $D_t(L)=[A,L]$ с некоторыми ДО $L,A\in\mathcal{F}[D]$, то

$$\operatorname{res}D_t(L^{k/n})\in\operatorname{Im}D_x,\quad n=\deg L,$$

то есть, вычеты дробных степеней $L^{k/n}$ служат плотностями законов сохранения. Пользуясь результатами задачи 39, найти несколько плотностей КдФ по этой формуле. (Понятно, что здесь нужно рассматривать только нечетные степени $L^jL^{1/2}$, так как $\operatorname{res}L^j=0$.)