Задачи к лекции 7. (Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы)

На лекциях мы пользовались представлениями нулевой кривизны $U_t - V_x = [V, U]$, где U, V матрицы (или элементы некоторой алгебры Ли), зависящие от спектрального параметра λ. Другой подход основан на представлениях Лакса $L_t = [A, L]$, где L, A дифференциальные или псевдодифференциальные операторы по D_x. Кроме того, мы видели, что такие операторы возникают естественным образом при изучении симметрий (оператор линеаризации f_*, операторы рекурсии). Поэтому полезно освоить этот язык. В принципе, этому можно было бы посвятить отдельную лекцию, но, на мой взгляд, будет полезнее прорешать серию задач (в этом листке только начало, в следующий раз будет продолжение).

* * *

Пусть F некоторое поле. Линейное отображение $D : F \to F$ называется дифференцированием, если выполняется правило Лейбница $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ для любых $f, g \in F$. В основном, нас будет интересовать случай, когда $F = \mathcal{F}$ — поле локально-аналитических функций от конечного числа динамических переменных и $D = D_x$ — оператор полной производной, но в некоторых задачах это неважно. Рассмотрим множество дифференциальных операторов (ДО)

$$F[D] = \Big\{\sum_{n=0}^{M} f_n D^n,\ f_n \in F\Big\}.$$

Свободный член $f_0 \in F$ интерпретируется, как оператор умножения на f_0. Множество $F[D]$ является кольцом, причем правило Лейбница равносильно правилу умножения

$$Df = fD + D(f), \tag{1}$$

позволяющему проносить D направо. Этого достаточно, чтобы определить произведение любых двух ДО.

31. Покажите по индукции, что из (1) следует правило

$$D^n f = fD^n + \binom{n}{1} D(f) D^{n-1} + \binom{n}{2} D^2(f) D^{n-2} + \dots + D^n(f), \tag{2}$$

где биномиальные коэффициенты определяются как

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{3}$$

(Эта формула должна быть хорошо знакома со школы, просто примените обе части к произвольному элементу g. Смысл этого упражнения в том и состоит, чтобы научиться обходиться без g.)

32. Проверьте, что уравнение КдФ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ эквивалентно уравнению Лакса $D_t(L) = [A, L]$ с

$$L = D_x^2 + u, \quad A = 4D_x^3 + 6uD_x + 3u_x.$$

Под D_t подразумевается «внешнее» дифференцирование коммутирующее с D_x, так что $D_t(L) \equiv [D_t, L]$ есть ДО, полученный из L применением D_t к коэффициентам L; в данном случае это просто u_t.

33. Найдите оператор A порядка 5, который даёт аналогичное представление для симметрии КдФ $u_T = u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1$ (оператор L тот же самый). Можно (но не обязательно) использовать однородность: вес $D_x = 1$, вес $u_j = 2 + j$.

Пусть дано уравнение $u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_n)$. Как мы знаем, его симметрии $u_T = g[u]$ определяются уравнением $f_*(g) = g_*(f)$, что можно записать также, как

$$(\nabla_f - f_*)(g) = 0 \quad \text{или} \quad (D_t - f_*)(g) = 0.$$

ДО R называется оператором рекурсии, если выполнено равенство

$$D_t(R) = [f_*, R]. \tag{4}$$

34. Докажите, что R переводит симметрии уравнения $u_t = f$ в симметрии, то есть если $u_T = g$ симметрия, то $u_\tau = R(g)$ также симметрия. Проверьте, что $R = D_x + u$ является оператором рекурсии для потенциированного уравнения Бюргерса $u_t = u_{xx} + u_x^2$.

К сожалению, одними ДО обойтись не удается, например, оператор рекурсии для КдФ не является дифференциальным. Во многих задачах приходится переходить к следующему расширению кольца $F[D]$. Введем символ D^{-1} и положим $DD^{-1} = D^{-1}D = 1$. В отличие от D, этот символ никакого оператора на F не обозначает. Однако, его можно использовать, чтобы построить расширение $F[D]$ до множества псевдодифференциальных операторов (ПДО)

$$F((D)) = \Big\{ \sum_{n=-\infty}^{M} f_n D^n,\ f_n \in F \Big\}.$$

35. Докажите, что для сохранения ассоциативности умножения необходимо и достаточно, чтобы произведение D^{-1} на элемент из F определялось формулой

$$D^{-1}f = fD^{-1} - D(f)D^{-2} + D^2(f)D^{-3} - \ldots$$

Докажите, что отсюда следует общая формула

$$D^n f = fD^n + \binom{n}{1} D(f)D^{n-1} + \binom{n}{2} D^2(f)D^{n-2} + \ldots, \tag{5}$$

где биномиальные коэффициенты как для положительных, так и для отрицательных n определяются формулой (3) (отличие в том, что для $n \geq 0$ сумма обрывается, так как $\binom{n}{n+1} = 0$, а при $n < 0$ всегда имеется бесконечный ряд).

Докажите, что $\mathcal{F}((D))$ — тело (некоммутативное поле), то есть, для любого ПДО $A \neq 0$ существует ПДО A^{-1} такой, что $AA^{-1} = 1$.

36. Проверьте, что $R = D_x^2 + 4u + 2u_xD_x^{-1}$ — оператор рекурсии для уравнения КдФ $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$, то есть, выполняется уравнение (4).