Задачи к лекции 6. (Симметрии)

В задачах 25–28 функции f, g, h принадлежат $\mathcal{F}$ — полю локально-аналитических функций от конечного числа динамических переменных $x, u_0, u_1, \ldots$, где $u_n = \partial_x^n(u)$ (зависимость от t для простоты не будем рассматривать). Напомним обозначения: оператор полной производной это

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + \cdots + u_{n+1}\partial_n + \ldots,$$

эволюционное дифференцирование это

$$\nabla_f = f\partial_0 + D_x(f)\partial_1 + \cdots + D_x^n(f)\partial_n + \ldots,$$

оператор линеаризации это

$$f_* = \partial_0(f) + \partial_1(f)D_x + \cdots + \partial_n(f)D_x^n + \ldots,$$

коммутатор функций из $\mathcal{F}$ определяется как

$$[f, g] = \nabla_f(g) - \nabla_g(f) = g_*(f) - f_*(g).$$

25. Докажите тождество

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f,g]}$$

(в левой части $[,]$ обозначают коммутатор векторных полей, в правой — коммутатор функций). Проще всего применять обе части к координатным функциям u_n. Выведите отсюда тождество

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

Покажите, что отсюда следует:

— эволюционные дифференцирования образуют подалгебру Ли в алгебре Ли всех дифференцирований $\mathcal{F}$;

— $\mathcal{F}$ есть алгебра Ли относительно скобки $[,]$;

— правые части симметрий для заданного уравнения $u_t = f$ образуют подалгебру Ли в $\mathcal{F}$ (коммутатор симметрий — симметрия).

26. Докажите тождества

$$(\nabla_f(g))_* = [\nabla_f, g_*] + g_* f_*,$$
$$[\nabla_f - f_*, \nabla_g - g_*] = \nabla_{[f,g]} - [f, g]_*.$$

Покажите, что отсюда следует, что определяющее уравнение $[f, g] = 0$ для симметрий уравнения $u_t = f$ можно переписать в операторном виде

$$[\nabla_f, g_*] - [\nabla_g, f_*] = [f_*, g_*].$$

27. Докажите, что если уравнения

$$u_t = f(x, u, \ldots, u_n), \quad u_T = g(x, u, \ldots, u_m),$$

совместны и $n, m > 1$, то $(\partial_n(f))^{1/n} = (\partial_m(g))^{1/m}$. В частности, если уравнение имеет вид

$$u_t = u_n + \text{младшие члены},$$

то и высшие симметрии имеют такой же вид (если они существуют).

28. Докажите, что если f, g — многочлены, однородные относительно некоторого веса $w(u_n) = a + bn$, то и $[f, g]$ есть многочлен, однородный относительно этого веса. Докажите, что если уравнение имеет вид

$$u_t = u_n + \text{младшие члены},$$

где правая часть — однородный многочлен, то полиномиальные высшие симметрии этого уравнения коммутируют друг с другом.

29. Вернёмся к цепочке Вольтерра

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Вычислите для неё высшую симметрию вида

$$u_{n,t} = g(u_{n-2}, \ldots, u_{n+2}).$$

Задачу можно решить в общем виде, но если вычисления кажутся слишком громоздкими, можно принять упрощающее предположение. Заметим, что цепочка имеет структуру $u_{n,x} = u_n(T - T^{-1})(u_n)$, где $T : u_n \mapsto u_{n+1}$ оператор сдвига, и предположим, что это верно и для симметрии:

$$u_{n,t} = u_n(T - T^{-1})(G(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})).$$

Запишите, к чему сводится коммутатор в этом случае и найдите G. [Напомню, что при работе с цепочками рекомендуется для краткости опускать индекс n]

30. Перепишите ответ из предыдущей задачи в виде системы из задачи 11, обозначив $u_n = u$, $u_{n+1} = v$ для фиксированного номера n.