Задачи к лекции 4. (Линейные задачи)

На лекции был разобран пример, связанный с линейной задачей

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\lambda & -v \\ u & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Было показано, что если

$$V = 2\lambda U + U_1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix},$$

то условие совместности (представление нулевой кривизны)

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_t - V_x = [V, U] \tag{2}$$

эквивалентно системе Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2.$$

Отметим, что если сделать замену $t \to it$, то получившаяся комплексная система будет допускать редукцию $v = \pm\bar{u}$ к уравнению НШ$^{\pm}$

$$-iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2 u.$$

Задачи 19, 21 и 22 связаны с этой же матрицей U.

19. Выведите систему на u и v, получающуюся из условия совместности (2), если взять U из (1) и

$$V = 4\lambda^2 U + 2\lambda U_1 + U_2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & -v_{xx} - 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & u_x v - uv_x \end{pmatrix}$$

(матрица U_1 указана выше). Проверьте, что эта система допускает редукции $v = \pm u$ и $v = 1$ (или $u = 1$).

20. (Калибровочное преобразование) Допустим, что у нас есть пара совместных линейных задач

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi$$

и мы делаем замену $\tilde{\Psi} = A\Psi$ с некоторой (вообще говоря переменной) матрицей A. Выясните, как при такой замене меняются матрицы U и V.

21. (Еще одно представление для КдФ) Рассмотрим редукцию $v = 1$ в задаче 19. Покажите, что при этой редукции уравнение $\Psi_x = U\Psi$ эквивалентно уравнению Шрёдингера $\psi_{xx} + (u - \lambda^2)\psi = 0$. Сравните это с представлением нулевой кривизны для КдФ, найденным на лекции (нужно будет переобозначить λ). Найдите матрицу A замены

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

и проверьте, что оба представления калибровочно эквивалентны.

22. (Уравнения sin- и sinh-Гордона) Выпишите уравнения, получающиеся при выборе

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix},$$

и при выборе

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u \\ \sinh u & -\cosh u \end{pmatrix},$$

Матрица U здесь фактически та же, что в (1) при редукции $u = \pm v$, с точностью до замены $u \to u_x$ и переобозначения λ.

23. (Уравнение Цицейки) Рассмотрим систему уравнений

$$\psi_{xx} = -u_x\psi_x + \lambda e^u \psi_t, \quad \psi_{xt} = e^{-u}\psi, \quad \psi_{tt} = \lambda^{-1}e^u\psi_x - u_t\psi_t.$$

Выпишите условие совместности, приравнивая перекрестные производные $(\psi_{xx})_t = (\psi_{xt})_x$, $(\psi_{xt})_t = (\psi_{tt})_x$. Также, запишите эту систему в матричном виде $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_t = V\Psi$, с матрицами 3×3, приняв в качестве Ψ вектор-столбец $(\psi, \psi_x, \psi_t)^\top$. Проверьте, что матричное условие совместности даёт то же самое, что и первоначальное вычисление.

24. (Уравнение Дима) Выпишите условие совместности линейных задач

$$\psi_{xx} = -\frac{\lambda}{u^2}\psi, \quad \psi_t = 2\lambda(u_x\psi - 2u\psi_x),$$

вычисляя перекрестные производные $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$ и переписывая систему в матричном виде.